ETHZ, D-MAVT und RW
Prüfung Herbst 2003
Numerische Mathematik
K. Nipp

Wichtige Hinweise

- Zweistündige Prüfung.
- Alle Aufgaben werden gleich gewichtet!
- Begründen Sie jeweils Ihre Aussagen. Nichtmotivierte Lösungen werden nicht akzeptiert!

— • —

1. Sei
$$A = \begin{pmatrix} a & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

   a) Für welche $a > 0$ konvergiert das
      (i) Jacobi-Verfahren?
      (ii) Gauss-Seidel-Verfahren?

   b) Führen Sie für das lineare Gleichungssystem $Ax = (0,1)^T$ einen Schritt des Gauss-Seidel-Verfahrens durch für $a = 5$ mit Startwert $x^0 = (1,1)^T$.

2. Es seien vier Punkte $A = (4,3)$, $B = (3,6)$, $C = (2,1)$ und $D = (0,6)$ in der Ebene gegeben. Bestimmen Sie die Koeffizienten a,b und c der Kreisgleichung
$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$
mit Hilfe der Ausgleichsrechnung (Normalgleichungen) so, dass die Summe der Quadrate der Abstände der Punkte zum Kreis möglichst klein wird. Lösen Sie das dabei auftretende lineare Gleichungssystem mittels LR-Zerlegung.

3. Sei $\overline{x}$ die Lösung der Gleichung
$$x = \frac{1}{1+x}, \quad x > -1. \tag{1}$$

   a) Bestimmen Sie ein möglichst grosses Intervall $I = [a,b]$ mit $-1 < a < b < \infty$ derart, dass die Fixpunktiteration zur Lösung von (1) für alle Startwerte $x_0 \in I$ gegen $\overline{x}$ konvergiert (Begründung!).

   b) Wie viele Iterationen reichen bei der Wahl $x_0 = 9$, um den Fixpunkt auf einen gesicherten absoluten Fehler von 10^{-2} anzunähern?
   Hinweis: Betrachten Sie dazu das Intervall $I = [\frac{1}{10}, 10]$.

4. Der Parameter λ sei so zu bestimmen, dass

$$\int_0^1 e^{-\lambda x^2}\, dx = \frac{1}{2} \tag{2}$$

gilt. Lösen Sie dieses Problem näherungsweise wie folgt:

a) Approximieren Sie das Integral in (2) indem Sie zwei Schritte der Trapezmethode durchführen.

b) Lösen Sie anschliessend die nichtlineare Gleichung für λ näherungsweise durch einen Newtonschritt mit Startwert $\lambda_0 = 3$.

5. Gegeben sei das Differentialgleichungssystem zweiter Ordnung

$$\begin{array}{rcl} \ddot{y}_1 & = & 2y_1 - 3y_2 \\ \ddot{y}_2 & = & -3y_1 + 4y_2 \end{array} \quad \text{mit} \quad \begin{array}{rclrcl} y_1(0) & = & 2, & \dot{y}_1(0) & = & 0, \\ y_2(0) & = & 1, & \dot{y}_2(0) & = & 1. \end{array} \tag{3}$$

Approximieren Sie die Lösung $(y_1(h), y_2(h))$ mit der Trapezmethode für $h = 1$.

6. Betrachten Sie für $\gamma > 0$ das durch das folgende Butcher-Tableau gegebene Runge-Kutta-Verfahren

$$\begin{array}{c|c} \frac{1}{2} & \gamma \\ \hline & 1 \end{array} \, . \tag{4}$$

a) Formulieren Sie den Schritt $x_k \to x_{k+1}$ für die Differentialgleichung $\dot{x} = f(t, x)$.

b) Bestimmen Sie für $\mu \in \mathbb{C}$ die Stabilitätsfunktion $R(\mu)$ in Abhängigkeit von γ.

c) Bestimmen Sie γ so, dass $|R(\mu)| = 1$ gilt für μ auf der imaginären Achse, das heisst für alle μ mit Realteil 0.

d) Bestimmen Sie für das in c) gefundene γ das Stabilitätsgebiet des Runge-Kutta-Verfahrens (4).