ETHZ, D-MAVT und RW

Prüfung Frühjahr 2004

Numerische Mathematik

K. Nipp

Wichtige Hinweise

- Zweistündige Prüfung.
- Alle Aufgaben werden gleich gewichtet!
- Begründen Sie jeweils Ihre Aussagen. Nichtmotivierte Lösungen werden nicht akzeptiert!

— • —

1. Das nichtlineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2^2 - 3 &= 0 \\ 4x_2 + x_1 + 2 &= 0 \end{aligned}$$

soll mit dem Newton-Verfahren gelöst werden.

a) Formulieren Sie das Verfahren, und führen Sie mit dem Startwert $(0,0)$ zwei Newton-Schritte von Hand durch.

b) Geben Sie Startwerte an, für welche das Newton-Verfahren nicht funktioniert. (Begründung!)

2. Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

a) Konvergiert das Jacobi- bzw. das Gauss-Seidel-Verfahren für dieses System? (Begründung !)

b) Berechnen Sie für die konvergenten (oder das konvergente) Verfahren aus a) einen Iterationsschritt mit dem Startvektor $\binom{1}{1}$, und bestimmen Sie die Anzahl Iterationen, die es braucht, um den relativen Fehler um einen Faktor 10^{-6} zu verkleinern (in der 2-Norm).

3. Ein Ingenieur misst in einem schmalen Tank in Längsrichtung x die Abweichung f vom Sollwert der Wasserhöhe. Er findet die folgenden Werte:

i	1	2	3	4	5
x_i	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1
f_i	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1

Er weiss, dass das Wasser an den Tankenden in einem 90^o-Winkel auftrifft, d.h. die Wasserlinie hat x-Ableitung 0 auf beiden Seiten des Tanks.

Bestimmen Sie die Spline-Interpolierende mit $f_1' = 0$ und $f_n' = 0$ ($n = 5$) durch diese Daten, und werten Sie sie aus an der Stelle $x = 0.1$.

4. Gegeben sei das Integral

$$I = \int_0^2 e^{4x}\, dx\,.$$

a) Approximieren Sie I durch einen Simpsonwert ($h = 1$), und berechnen Sie den absoluten Fehler.

b) Approximieren Sie I durch zwei Simpsonwerte ($h = \frac{1}{2}$), und berechnen Sie den absoluten Fehler.

c) Extrapolieren Sie aus a) und b) eine bessere Approximation zu I, und berechnen Sie den absoluten Fehler.

5. Gegeben sei die gewöhnliche Differentialgleichung 2. Ordnung des harmonischen Oszillators

$$\ddot{x} + x = 0$$

mit Anfangsbedingungen $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = y_0$.

a) Wenden Sie die Implizite Mittelpunktsregel (IMR) darauf an.

Zur Erinnerung: Die IMR angewandt auf das System 1. Ordnung $\dot{\underline{z}} = f(\underline{z})$ hat die Form

$$\underline{z}^{j+1} = \underline{z}^j + h \cdot f\left(\frac{1}{2}\,(\underline{z}^j + \underline{z}^{j+1})\right).$$

b) Zeigen Sie, dass ein Kreis in der x–$\dot{x}$–Ebene ($x^2 + \dot{x}^2 = R^2$) durch die IMR in sich abgebildet wird.

Hinweis: Es genügt, einen Schritt des Verfahrens zu betrachten.

6. Betrachten Sie das Randwertproblem

$$\begin{aligned} u'' + u &= 0, \quad x \in (0,1) \\ u(0) = 1, &\ \ u(1) = 0\,. \end{aligned} \tag{$*$}$$

a) Diskretisieren Sie (*) mit zentralen Differenzen, und bestimmen Sie damit eine Approximation u^* von $u(x)$ an der Stelle $x = \frac{1}{2}$

i) mit Schrittweite $h = \frac{1}{2}$;

ii) mit Schrittweite $h = \frac{1}{4}$.

b) Bestimmen Sie die exakte Lösung $u(x)$ von (*), und berechnen Sie den relativen Fehler der beiden in a) gefundenen Approximationen von $u(\frac{1}{2})$.