ETHZ, D-MAVT und RW
Prüfung Frühjahr 2003
Numerische Mathematik
K. Nipp

Wichtige Hinweise

- Zweistündige Prüfung.
- Alle Aufgaben werden gleich gewichtet!
- Begründen Sie jeweils Ihre Aussagen. Nichtmotivierte Lösungen werden nicht akzeptiert!

— • —

1. Das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ a & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

soll iterativ mit dem SOR-Verfahren gelöst werden.

a) Setzen Sie $a = \frac{1}{9}$ und berechnen Sie einen Schritt des SOR-Verfahrens mit Relaxationsparameter $\omega = 1$. Wählen Sie als Startwet $x^{(0)} = (1,1)^T$.

b) Setzen Sie $a = 0$ und berechnen Sie das optimale $\omega \in [0,2]$, so dass der Spektralradius der Iterationsmatrix T minimal ist.

2. Gegeben seien die Fehlergleichungen

$$Ax - c = r \tag{1}$$

eines linearen Ausgleichproblems mit

$$A = \begin{pmatrix} 0.4 & 1.6 & 1.4 \\ -2.8 & -2.2 & -0.8 \\ -5.6 & -4.4 & -1.6 \\ 0.8 & 3.2 & 2.8 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad c = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Weiter sei von A die Singulärwertzerlegung $A = USV^T$ bekannt:

$$U = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & -2 \\ -2 & 1 & -2 & 4 \\ -4 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad V = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie mit Hilfe der Singulärwertzerlegung

a) alle Lösungen des linearen Ausgleichproblems (1).

b) diejenige Lösung x für die $\|x\|_2$ minimal ist.

3. Gegeben seien die Daten

x	0	1	2	3
y	0	3	-1	0

einer Funktion $y = f(x)$. Geben Sie das zu lösende Gleichungssystem $Af' = d$ an für

a) die Spline-Interpolierende mit not-a-knot Bedingungen (de Boor-Spline).

b) die periodische Spline-Interpolierende.

Hinweis: Das Gleichungssystem muss *nicht* gelöst werden – bestimmen Sie in beiden Fällen lediglich die Matrix A und die rechte Seite d.

4. Die Ableitung $f'(x)$ der Funktion

$$f(x) = \frac{\sin(x)\cos(x+1)}{x}$$

soll an der Stelle $x = 0$ mit zentralen finiten Differenzen angenähert werden.

a) Bestimmen Sie eine Näherung für die Schrittweite $h_0 = 0.2$.

b) Bestimmen Sie zwei weitere Näherungen mit $h_i = \left(\frac{3}{2}\right)^i h_0$, $i = 1, 2$.

c) Berechnen Sie aus diesen drei Näherungen durch geeignete Extrapolation eine bessere Näherung.

5. Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(0) = x_0. \tag{2}$$

Es soll näherungsweise durch das Verfahren gelöst werden, welches durch das Butcher-Tableau

$$\begin{array}{c|c} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline & 1 \end{array}$$

gegeben ist.

a) Formulieren Sie den Schritt $x_k \to x_{k+1}$ des Verfahrens angewandt auf (2).

b) Zeigen Sie: Der Schritt $x_k \to x_{k+1}$ kann als

$$x_{k+1} = x_k + hf\left(t_k + \frac{h}{2}, \frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right)$$

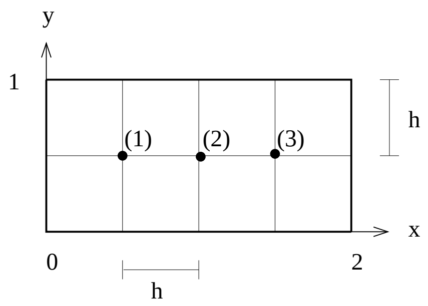
geschrieben werden.

c) Ist das Verfahren explizit oder implizit? (Begründung!)

d) Sei nun $f(t, x) = -2tx^2$ und $x_0 = 1$. Berechnen Sie mit dem Verfahren eine Näherung für $x(h)$ mit Schritt h. Lösen Sie dabei die implizite Gleichung approximativ, indem Sie zwei Schritte der Fixpunktiteration durchführen mit Startwert x_0.

6. Betrachten Sie das folgende Randwertproblem in $D = (0,2) \times (0,1)$ (siehe Skizze):

$$\left.\begin{array}{rcll} u(x,y) & = & f(x,y) & \text{in } D \\ u(x,y) & = & \psi(x,y) & \text{auf } \partial D \end{array}\right\} \qquad (3)$$



Das Problem (3) soll mit einem Differenzenverfahren (5-Punkte-Formel) mit Schrittweite $h_x = h_y = 0.5$ für verschiedene $f(x,y)$ und $\psi(x,y)$ approximativ gelöst werden. Indem der Vektor der Unbekannten $u = (u_1, u_2, u_3)$ eingeführt wird (Nummerierung aus der Skizze), führt dies bei konkreten $f(x,y)$ und $\psi(x,y)$ auf ein Gleichungssystem der Form $Au = b$.

a) Betrachten Sie (3) mit $f(x,y) = 0$ und $\psi(x,y) = 1$. Bestimmen Sie A und b.

b) Betrachten Sie (3) mit $f(x,y) = x + y$ und $\psi(x,y) = 0$. Bestimmen Sie A und b.