ETHZ, D-MAVT und RW
Prüfung Frühjahr 2002
Numerische Mathematik
K. Nipp

Wichtige Hinweise

- Zweistündige Prüfung.
- Alle Aufgaben werden gleich gewichtet!
- Begründen Sie jeweils Ihre Aussagen. Nichtmotivierte Lösungen werden nicht akzeptiert!

— • —

1. Ein Bergbauer möchte möglichst genau bestimmen, wieviel Milch jede seiner 3 Kühe pro Tag gibt. An verschiedenen Tagen notiert er die folgenden Daten:

Gemolkene Kühe	Milch [*Liter*]
Erna, Frida	42
Erna, Milka	45
Frida	18
Frida, Milka	40
Milka	22
Erna, Frida, Milka	58

   a) Bestimmen Sie ausgeglichene Werte nach Gauss für die Milchproduktion pro Tag der einzelnen Kühe.

   b) Wie gross ist die Kondition in der 2–Norm der Normalgleichungs–Matrix für das Gauss'sche Ausgleichsproblem in a)?

2. Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

   a) Formulieren Sie das Jacobi–Verfahren in der Form $x^{k+1} = Tx^k + c$, d.h. bestimmen Sie T und c.

   b) Sei $n = 2$.

      (i) Konvergieren das Jacobi– und das Gauss–Seidel–Verfahren in diesem Fall?

      (ii) Führen Sie einen Schritt des Jacobi– und des Gauss–Seidel–Verfahrens durch mit Anfangswert $x^0 = (1, 2)^T$.

3. Die Gleichung

$$\ln(x+2) + 2x = 0, \quad x \in I = (-2, 10) \tag{1}$$

soll mit Fixpunktiteration gelöst werden .

a) Zeigen Sie graphisch, dass in I genau ein Fixpunkt $\overline{x}$ existiert.

b) Bestimmen Sie mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes ein möglichst kleines $\alpha > -2$, so dass die Fixpunktiteration für jeden Startwert $x^0 \in I_\alpha = (\alpha, 10)$ gegen den Fixpunkt $\overline{x}$ konvergiert.

c) Berechnen Sie einen Schritt zur Lösung von (1)

(i) mit dem Newton–Verfahren

(ii) mit Fixpunktiteration

jeweils mit Startwert $x^0 = 9$.

4. Gesucht sei der Wert des bestimmten Integrals

$$I = \int_0^1 e^{-x^2}\,dx.$$

a) Approximieren Sie I, indem Sie den Integranden durch das Interpolationspolynom $p(x) = a + bx^2 + cx^4$ an den Stützstellen $x = 0, \frac{1}{2}, 1$ ersetzen.

b) Bestimmen Sie I mit der 5–Punkt–Gaussformel mit den Knoten und Gewichten

$\pm x_i$:	0	0.53846931	0.90617985
w_i :	0.56888889	0.47862867	0.23692689

.

5. Gegeben sei das Butcher–Tableau des Schemas von *Hammer–Hollingsworth*:

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \hline & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{array}$$

a) Formulieren Sie einen Schritt des Runge–Kutta–Verfahrens (in impliziter Form) für die Differentialgleichung $\dot{x} = \frac{x^2}{t}$ zu den Anfangswerten x_0, t_0.

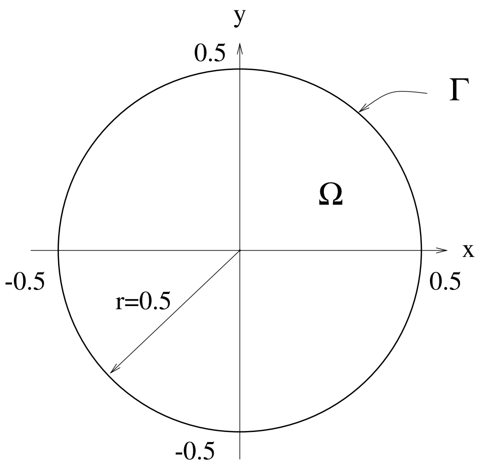
b) Bestimmen Sie die Stabilitätsfunktion $R(\mu)$ des Verfahrens.

c) Bestimmen Sie das (reelle) Stabilitätsintervall des Verfahrens.

6. Gegeben sei das Randwertproblem (RWP) für die Poissongleichung

$$\left.\begin{aligned} -(u_{xx}+u_{yy}) &= 1 \qquad \text{im Gebiet } \Omega \\ u &= 1 \qquad \text{auf dem Rand } \Gamma \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

wobei Ω die Kreisscheibe um $x = y = 0$ mit Radius $r = \frac{1}{2}$ ist:



a) Betrachten Sie zuerst das eindimensionale Problem

$$-u_{xx} = 1, \quad x \in \Omega = (-0.5, 0.5), \qquad u(\pm 0.5) = 1.$$

(i) Bestimmen Sie die exakte Lösung dieses Problems für $x = 0$.

(ii) Approximieren Sie die Lösung aus (i) mit zentralen Differenzen mit Schrittweite $\Delta x = \frac{1}{2}$.

b) (i) Diskretisieren Sie das RWP (2) mit dem 5–Punkte–Differenzenstern. Wählen Sie dazu $\Delta x = \Delta y = \frac{1}{2}$.

(ii) Bestimmen Sie die Approximation an der Stelle $x = y = 0$.