K. Nipp Numerische Mathematik, D-MAVT und RW

Prüfung, Frühling 2001

Wichtige Hinweise

- Zweistündige Prüfung.
- Alle Aufgaben werden gleich gewichtet!
- Begründen Sie jeweils Ihre Aussagen. Nichtmotivierte Lösungen werden nicht akzeptiert!

1. Die Ableitung f' der Funktion f soll an der Stelle x_0 durch den Differenzenquotienten

$$D_h f(x_0) := \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h}$$

approximiert werden.

a) Berechnen Sie $D_h f(x_0)$ für $f(x) = e^x$ und $x_0 = 0$ zu den $h-$Werten $h = \frac{1}{2}$ und $h = \frac{1}{4}$.

b) Bestimmen Sie aus den Resultaten von a) eine verbesserte Approximation von $f'(x_0)$ mittels Rombergextrapolation.

2. Die Sinus-Funktion nimmt an den Stellen $x_1 = \frac{\pi}{4}, x_2 = \frac{\pi}{3}, x_3 = \frac{\pi}{2}$ die Werte $y_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}, y_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}, y_3 = 1$ an.

a) Bestimmen Sie das Interpolationspolynom $P(x)$ durch diese Punkte in der Lagrange'schen Darstellung.

b) Berechen Sie eine Approximation von $\sin \frac{2\pi}{5}$, indem Sie $P(x)$ an der Stelle $x = \frac{2\pi}{5}$ auswerten.

c) Vergleichen Sie Ihre Approximation mit dem exakten Wert $\sin \frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$ und berechnen Sie den relativen Fehler.

3. Gegeben sei das bestimmte Integral

$$I = \int_0^1 \sqrt{x} f(x) dx.$$

Approximieren Sie I durch eine Quadraturformel der Form

$$\tilde{I} = w_1 f(0) + w_2 f(b) \text{ mit } 0 < b < 1$$

wobei

Bitte wenden!

a) die Grössen w_1, w_2 so zu bestimmen sind, dass $\tilde{I} = I$ für alle Polynome f von Grad 1.

b) die Grösse b zusätzlich so zu bestimmen ist, dass $\tilde{I} = I$ für jedes Polynom f von Grad 2.

c) Berechnen Sie mit der gefundenen Quadraturformel eine Approximation von

$$\int_0^1 \sqrt{x}e^{-x}dx = 0.378944\cdots$$

Führen Sie dazu die Rechnung mit 6 signifikanten Ziffern durch.

4. Betrachten Sie in der $x-y-$Ebene den Graphen der Funktion $y = \sin x$ und eine Gerade durch den Punkt $(0, 2)$, die diesen Graphen berührt (im Intervall $(0, \pi)$). Der Berührungspunkt (x^*, y^*) soll mit Hilfe des Newton-Verfahren bestimmt werden. Führen Sie für den Startwert $x_0 = 2$ einen Newton-Schritt durch zur Approximation von x^*.

5. Bestimmen Sie für die implizite Mittelpunktsregel

$$\tilde{x}_{j+1} = \tilde{x}_j + hf(t_j + \frac{h_j}{2}, \frac{\tilde{x}_j + \tilde{x}_{j+1}}{2})$$

a) die Stabilitätsfunktion R

b) das (reelle) Stabilitätsintervall B

c) das (komplexe) Stabilitätsgebiet A.

6. Gegeben seien die Fehlergleichungen

$$A\mathbf{x} - \mathbf{c} = \mathbf{r}$$

eines linearen Ausgleichproblems mit

$$A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 27 & 18 \\ 4 & -8 & 12 \\ 8 & -16 & 24 \end{pmatrix}, \mathbf{c} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 3 \\ 27 \\ -15 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Für die QR-Zerlegung der Matrix A gilt

$$Q = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 8 \\ 0 & 9 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 7 & -4 \\ 8 & 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie dasjenige x mit der kleinsten 2-Norm für das $\|r\|^2$ minimal wird.