K. Nipp Numerische Mathematik, D-MAVT und RW

Prüfung, Frühling 2000

Wichtige Hinweise

- Zweistündige Prüfung.
- Alle Aufgaben werden gleich gewichtet!
- Begründen Sie jeweils Ihre Aussagen. Nichtmotivierte Lösungen werden nicht akzeptiert!

1. Das kubische Polynom $p(x)$ sei durch die Werte

$$p(0) = 1, \qquad p(1) = 2, \qquad p(2) = 15, \qquad p(3) = 52$$

gegeben.
Berechnen Sie $p(4)$ und $p(5)$ mittels Lagrange-Interpolation.

2. Gesucht ist die positive Lösung x^* der Gleichung

$$x = \sqrt{x} + 1.$$

a) Finden Sie ein Intervall so, dass die Iteration

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n} + 1$$

für alle Startwerte in diesem Intervall gegen x^* konvergiert.

b) Wie viele Iterationen benötigt man höchstens, um ausgehend von $x_0 = 16$ x^* bis auf einen absoluten Fehler von 10^{-2} anzunähern?

3. Legen Sie eine Funktion der Form

$$y = ae^{bx} \qquad (*)$$

"möglichst gut" durch die Punkte

x	1	2	3	4
y	1	4	9	30

.

Logarithmieren Sie dazu die Gleichung $(*)$ und wenden Sie die Methode der kleinsten Quadrate an.

Bitte wenden!

4. Das bestimmte Integral

$$I = \int_1^2 e^x sin(x) dx$$

soll mit Hilfe der Trapezregel bis auf einen gesicherten absoluten Fehler von 10^{-1} genau berechnet werden. Geben Sie ein geeignetes h an und bestimmen Sie $T(h)$.

5. Gegeben sei die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Konvergiert das Jacobi- bzw. Gauss-Seidel Verfahren für diese Matrix?

6. Betrachten Sie das Butcher-Tableau

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 2/3 & 1/3 & 1/3 \\ \hline & 1/4 & 3/4 \end{array}.$$

a) Ist das Verfahren explizit oder implizit?

b) Wieviele Stufen hat das Verfahren ?

c) Formulieren Sie dieses Verfahren für das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -100 \end{pmatrix} x, \qquad x(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

und berechnen Sie eine Approximation von $x(100h)$, wobei h die Schrittweite ist.