

Prüfung

Alle Aufgaben haben das gleiche Gewicht. Bitte begründen Sie Ihre Ergebnisse ausreichend und geben Sie Zwischenschritte an.

1. Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} a-2 & a(a-2) & 0 \\ a(a-2) & a^2(a-2)+b & ab \\ 0 & ab & a^2b+1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -8 \end{pmatrix}$$

mit $a, b \in \mathbb{R}$.

- a) Für welche a und b ist die Systemmatrix A positiv definit?
 - b) Berechnen Sie die Determinante der Systemmatrix.
 - c) Lösen Sie das Gleichungssystem für $a = 1$ und $b = 2$.
2. Ein kubisch, periodischer Spline $s(x)$ mit Periode 3 soll durch die folgenden Punkte gelegt werden:

$$\frac{x}{f(x)} \left\| \begin{array}{c|c|c} 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 6 & 5 \end{array} \right.$$

- a) Berechnen Sie die Momentengleichung für s .
 - b) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem mit dem Gauss-Algorithmus.
 - c) Bestimmen Sie alle Wendestellen von $s(x)$.
3. Betrachten Sie das Anfangswertproblem

$$y'(t) = \lambda y(t), \quad y(0) = y_0, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

- a) Für welche Werte von λ bleibt die Folge $(y(t_n))$ beschränkt? ($t_n = nh$, $n \in \mathbb{N}_0$, h sei eine positive Konstante).

Bitte wenden!

- b) Ein Zeitschrittverfahren approximiert $y(t_n)$ durch y_n . Für welche Werte von λh bleibt die Folge (y_n) beschränkt beim Heun-Verfahren mit dem folgenden Butcher Tableau:

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ 1 & & 1 \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array}$$

- c) Leiten Sie die Ordnung vom Heun-Verfahren her.
4. Die Parameter $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ der Funktion $T(x, y, z) = \alpha(x + \beta y^2 + \gamma \sqrt{z})$ sollen durch die Messwerte

x	2	0	0	-1
y	0	2	2	0
z	1	64	0	49
T	37	55	-15	-1

näherungsweise bestimmt werden.

- a) Formulieren Sie das Problem als lineares Ausgleichsproblem.
- b) Bestimmen Sie die LU -Zerlegung der Matrix der Normalgleichungen und berechnen Sie α, β und γ .
5. **Programmieraufgabe:** Siehe Zusatzblatt!

Siehe nächstes Blatt!

Geben Sie dieses Blatt ab!

Name, Vorname:

LEGI-Nummer:

5. Programmieraufgabe: Das lineare Gleichungssystem

$$Ax = b$$

soll iterativ mittels des Relaxationsverfahrens (SOR-Verfahren) gelöst werden. Vervollständigen Sie folgende Matlab Funktion mit einem geeigneten Abbruchkriterium:

```
function [x, m] = solveSOR(A, b, x0, tol, omega)
%
% Matrix A und rechte Seite b mit
% Anfangsvektor x0, Fehlertoleranz tol und Relaxationsparameter omega.
% Rueckgabe: Resultat x und Anzahl der Iterationen m

M = ...                               ;% Diagonal- und untere
                                       % Dreiecks-Matrix von A

N = M - A;
m = 0;
x = x0;                               % Starwert x0
R = norm(b-A*x);                      % berechne erstes Residuum
while R>tol

    x = ...                            ; % Berechne x

    R = ...                            ; % Berechne neues Residuum

    m = ...                            ; % Zaehle die Iterations-
                                       % schritte

end;
```

MATLAB-Help:

DIAG Diagonal matrices and diagonals of a matrix. DIAG(X) is the main diagonal of X. DIAG(DIAG(X)) is a diagonal matrix.

TRIL Extract lower triangular part. TRIL(X) is the lower triangular part of X. TRIL(X,K) is the elements on and below the K-th diagonal of X. K = 0 is the main diagonal, K > 0 is above the main diagonal and K < 0 is below the main diagonal.

NORM Matrix or vector norm.