

# Prüfung

**Alle Aufgaben haben das gleiche Gewicht. Bitte begründen Sie Ihre Ergebnisse ausreichend.**

1. Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = 1 - \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{24}x^4.$$

- a) Zeigen Sie, dass  $f(x)$  im Intervall  $[0, 1]$  genau einen Fixpunkt  $\bar{x}$  besitzt und dass die Fixpunktiteration  $x_{n+1} = f(x_n)$  für jeden Startwert  $x_0 \in [0, 1]$  gegen  $\bar{x}$  konvergiert.
- b) Wieviele Iterationsschritte des Verfahrens  $x_{n+1} = f(x_n)$  müssen ausgehend vom Startwert  $x_0 = 0$  mindestens durchgeführt werden, um  $|\bar{x} - x_n| < 10^{-5}$  garantieren zu können?
- c) Ausgehend vom Startwert  $x_0 = 0$  liefert das Iterationsverfahren  $x_{n+1} = f(x_n)$  die Näherungen  $x_{11} \simeq 0.855658$  und  $x_{12} \simeq 0.855640$ . Zeigen Sie, dass der absolute Fehler von  $x_{12}$  zum Fixpunkt  $\bar{x}$  bereits kleiner als  $10^{-4}$  ist.

2. Gegeben sei das lineare Gleichungssystem  $Ax = b$  mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ \alpha & 1 & \alpha \\ \alpha^2 & \alpha & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \\ \beta^2 \end{pmatrix}$$

mit  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

- a) Für welche  $\alpha$  und  $\beta$  hat das Gleichungssystem genau eine Lösung, keine Lösung und mehr als eine Lösung?
- b) Für welche  $\alpha$  ist die Matrix  $A$  des Systems positiv definit?

**Hinweis:** Bringen Sie zuerst die Matrix  $A$  auf die Form  $LU = LDV$ , wobei  $L$  und  $U$  die Faktoren der  $LU$ -Zerlegung von  $A$  sind und  $D = \text{diag}(U)$  ist. Anschliessend leiten Sie allgemein eine Bedingung für die Positiv-Definitheit von  $A$  her. Wählen Sie die Testvektoren  $(L^{-1})^T e_i$  mit den Standardbasisvektoren  $e_i$  ( $= i$ -te Kolonne der Einheitsmatrix),  $i = 1, 2, 3$ .

3. Bestimmen Sie die Funktion  $g(x) = a(1 + b \exp(x))$ , die den Abstand

$$h := \sqrt{\sum_{j=1}^5 (y_j - g(x_j))^2}$$

für  $x = (-2, -1, 0, 1, 2)^T$  und  $y = (1, 1, 0, -1, -1)^T$  minimiert. Geben Sie auch  $h$  an.

**Hinweis:** Benutzen Sie dazu die Normalgleichungen.

4. Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right).$$

Sei  $p \in P_3$  das kubische Interpolationspolynom zu dieser Funktion  $f(x)$  in den Knoten  $x_0 = -3, x_1 = -1, x_2 = 1$  und  $x_3 = 3$ .

- a) Berechnen Sie, ohne explizit das Polynom  $p$  auszurechnen, eine obere Schranke für den Interpolationsfehler in  $x = 2$ .
- b) Bestimmen Sie das Interpolationspolynom  $p$ .
- c) Berechnen Sie das Interpolationspolynom  $q$  vom Höchstgrad 4 zur Funktion  $f(x)$  mit der zusätzlichen Stützstelle  $x_5 = 0$ .

5. Gegeben sei ein Anfangswertproblem der Form

$$y' = f(t, y), \quad y(0) = y_0. \tag{1}$$

Schreiben Sie eine Matlab-function, die das obige Anfangswertproblem durch ein Runge-Kutta-Verfahren mit dem Koeffizientenschema (Butcher-Tableau)

0				
1/2	1/2			
1/2	0	1/2		
1	0	0	1	
	1/6	1/3	1/3	1/6

und der Schrittweite  $h$  approximativ löst.

Die Matlab-function soll folgende Form haben:

```
function [t, y] = rungekutta(t0, t1, h, y0)

% Loest das Anfangswertproblem (1)
% Eingabe-Argumente: [t0,t1]: Integrations-Intervall,
%                   Schrittweite h (ganzzahliger Teiler von t1-t0),
%                   Anfangswert y0.
% Ausgabe-Argumente: Vektoren der Funktionswerte y und
%                   Koordinaten t im Intervall [t0,t1]
```