Inégalités de normes avec poids et fermeture d'un espace d'intégrales stochastiques

F. Delbaen, P. Monat, W. Schachermayer, M. Schweizer et C. Stricker

Résumé : Soit X une semimartingale et Θ l'espace de tous les processus prévisibles X-intégrables θ tels que $\int \theta^* dX$ appartient à l'espace $\mathcal{S}^2$ des semimartingales. On cherche à déterminer des conditions nécessaires et suffisantes pour que l'espace $G_T(\Theta)$ défini par $G_T(\Theta) := \left\{ \int_0^T \theta_s^* dX_s \mid \theta \in \Theta \right\}$ soit fermé dans $\mathcal{L}^2(P)$. Dans certains cas, on donne une caractérisation de l'adhérence de $G_T(\Theta)$ dans $\mathcal{L}^2$.

Weighted Norm Inequalities and Closedness of a Space of Stochastic Integrals

Abstract : Let X be a semimartingale and Θ the space of all predictable X-integrable processes θ such that $\int \theta^* dX$ is in the space $\mathcal{S}^2$ of semimartingales. We are looking for some necessary and sufficient conditions such that the space $G_T(\Theta)$ defined by $G_T(\Theta) := \left\{ \int_0^T \theta_s^* dX_s \mid \theta \in \Theta \right\}$ is closed in $\mathcal{L}^2(P)$. In some cases, we characterize the closure of $G_T(\Theta)$.

1. Introduction. Soit X une semimartingale continue à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, appartenant à l'espace $\mathcal{S}^2_{loc}$ des semimartingales et de décomposition canonique $X = X_0 + M + A$. Si θ est un processus prévisible à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, θ^* désigne la transposée du vecteur colonne θ, et $\theta \cdot X$ ou $\int \theta^* dX$, l'intégrale stochastique vectorielle de θ par rapport à X (voir Jacod (1979)). Introduisons les espaces suivants: $L^2(M)$ (resp. $L^2(A)$) est l'espace de tous les processus prévisibles θ tels que $\|\theta\|_{L^2(M)} := \left\| \int_0^T \theta_s^* dM_s \right\|_2 \left(\text{resp. } \|\theta\|_{L^2(A)} := \left\| \int_0^T |\theta_s^* dA_s| \right\|_2 \right)$ est finie. On appelle Θ l'intersection de $L^2(M)$ et $L^2(A)$ et $G_T(\Theta)$ l'espace des variables aléatoires $\int_0^T \theta_s^* dX_s$ avec $\theta \in \Theta$. Notons $\mathcal{R}^2(P)$ l'espace des processus H càdlàg adaptés tels que $\|H\|_{\mathcal{R}^2(P)} := \left\| \sup_{0 \le t \le T} H_t \right\|_2$ est finie. On dira que l'inégalité (D_c) est vérifiée si:

$$\exists c > 0, \ \forall \theta \in \Theta, \ \|\theta\|_{L^2(A)} \le c \, \|\theta\|_{L^2(M)} \, .$$

Lorsque, pour tout i, $A^i << \langle M^i \rangle$ avec une densité prévisible α^i, on note $\gamma_t^i := \alpha_t^i \sigma_t^{ii}$ et $\sigma_t^{ij} := \dfrac{d \langle M^i, M^j \rangle_t}{dB_t}$ où B est un processus prévisible croissant càdlàg nul en 0 tel que pour tout i, $\langle M^i \rangle << B$. S'il existe un processus prévisible $\widehat{\lambda}$ tel que $\sigma_t \widehat{\lambda}_t = \gamma_t$, le processus $\widehat{K}$ est défini par :

$$\widehat{K}_t := \int_0^t \widehat{\lambda}_s^* dA_s = \int_0^t \widehat{\lambda}_s^* \sigma_s \widehat{\lambda}_s dB_s = \left\langle \int \widehat{\lambda}^* dM \right\rangle_t .$$

Si $\widehat{K}_T$ est uniformément bornée, $G_T(\Theta)$ est fermé mais cette condition n'est pas nécessaire (Schweizer (1994), Monat-Stricker (1994)). Lorsque X admet une loi de martingale équivalente dont la densité est de carré intégrable, une condition nécessaire pour que $G_T(\Theta)$ soit fermé est que X vérifie (D_c) et que $\widehat{K}$ existe, mais cette condition n'est pas suffisante (DMSSS (1994)).
En revanche, si on s'intéresse à la fermeture de $G_T(\Theta)$, non plus dans $\mathcal{L}^2(P)$, mais dans $\mathcal{R}^2(P)$, on a équivalence entre ($G_T(\Theta)$ est fermé dans $\mathcal{R}^2(P)$) et (X vérifie (D_c) et $\widehat{K}$ existe). C'est le résultat du théorème 2.
Si on suppose à présent que X admet une loi de martingale équivalente Q dont la densité est de carré intégrable, une condition suffisante pour que $G_T(\Theta)$ soit fermé dans $\mathcal{L}^2(P)$ est que $\mathcal{E}(-\widehat{\lambda} \cdot M)$ satisfasse l'inégalité de Hölder inverse d'indice 2 sous P (théorème 3). On ne sait pas, dans la plupart des cas, si cette condition suffisante est aussi nécessaire. On peut néanmoins le montrer lorsque M admet la propriété de représentation prévisible sous P (théorème 4).
Lorsque X admet une loi de martingale équivalente Q et que M vérifie la propriété de représentation prévisible sous P, on peut même caractériser l'adhérence de $G_T(\Theta)$ dans $\mathcal{L}^2(P)$, notée $\overline{G_T(\Theta)}$: si la densité est de carré intégrable, alors $\overline{G_T(\Theta)}$ est l'ensemble de toutes les variables aléatoires $H \in \mathcal{L}^2(\mathcal{F}_T, P)$ d'espérance nulle sous Q (théorème 5). Si la densité n'est pas de carré intégrable, alors $\overline{G_T(\Theta)}$ est égal à $\mathcal{L}^2(\mathcal{F}_T, P)$ (théorème 7).
Les résultats de cette note dont certains s'étendent au cas discontinu seront développés dans DMSSS (1994). Pour les inégalités de normes avec poids, on pourra se référer à Doléans-Dade/Meyer (1979) ou à la toute récente monographie de Kazamaki (1994).
Enfin nous tenons à remercier N. El Karoui de nous avoir indiqué les inégalités de normes avec poids et M. Yor pour des discussions fructueuses sur BMO.

2. Résultats.

En combinant les théorèmes 3.18 et 3.19 de Kazamaki (1994) on obtient le

Théorème 1. L'inégalité (D_c) est vérifiée si et seulement si $\widehat{K}$ existe et $\widehat{\lambda} \cdot M$ est dans BMO.

Théorème 2. L'espace $(G_T(\Theta)\ ,\ \| \ . \ \|_{\mathcal{R}^2(P)})$ est fermé si et seulement si $\widehat{K}$ existe et l'inégalité (D_c) est vérifiée.

La démonstration de ce théorème repose sur le théorème de l'application ouverte et le

Lemme. Soient $\theta \in \Theta$ et $\eta > 0$. Alors, il existe un processus prévisible ε prenant les valeurs 1 ou -1, et tel que

$$\forall t \in [0, T], \quad \left| \int_0^t \varepsilon_s \theta_s^* dA_s \right| \leq \eta.$$

On suppose dorénavant que $\widehat{K}$ existe, que la densité $\dfrac{dQ}{dP} = \mathcal{E}\left(-\widehat{\lambda} \cdot M\right)$ est de carré intégrable et qu'elle définit une loi de martingale équivalente. Sous ces conditions, le théorème suivant fournit une condition suffisante pour que $G_T(\Theta)$ soit fermé dans $\mathcal{L}^2$.

Théorème 3. Si $\mathcal{E}(-\widehat{\lambda} \cdot M)$ vérifie l'inégalité de Hölder inverse d'exposant 2 (notée $R_2(P)$), i.e.

$$\exists C > 0, \ \ \forall t \geq 0, \ \ E_P\left[\mathcal{E}(-\widehat{\lambda} \cdot M)_T^2 \mid \mathcal{F}_t\right] \leq C\mathcal{E}(-\widehat{\lambda} \cdot M)_t^2,$$

alors $G_T(\Theta)$ est fermé dans $\mathcal{L}^2(P)$.

Nous ignorons si l'inégalité $R_2(P)$ est une condition nécessaire pour que $G_T(\Theta)$ soit fermé dans $\mathcal{L}^2(P)$. Toutefois, cette condition est nécessaire lorsque M a la propriété de représentation prévisible sous P (notée PRP(P) dans la suite) :

Théorème 4. Si M a la PRP(P) et si $G_T(\Theta)$ est fermé dans $\mathcal{L}^2(P)$, alors $\mathcal{E}(-\widehat{\lambda} \cdot M)$ vérifie $R_2(P)$.

Sous les dernières hypothèses sous lesquelles nous nous sommes placés, c'est-à-dire lorsque $\frac{dQ}{dP} = \mathcal{E}\left(-\widehat{\lambda} \cdot M\right)$ est une loi de martingale équivalente, que sa densité est de carré intégrable et lorsque M a la PRP(P), $\overline{G_T(\Theta)}$ est entièrement caractérisée par le

Théorème 5. Sous les hypothèses précédentes,

$$\overline{G_T(\Theta)} = \left\{H \in \mathcal{L}^2(\mathcal{F}_T, P) \mid E_Q[H] = 0\right\}.$$

Remarque. Lorsque X n'est pas continue et n'admet pas de loi de martingale équivalente mais si M a la PRP(P) et si la décomposition de Föllmer-Schweizer existe (en particulier lorsque $\widehat{K}$ est uniformément borné), on peut caractériser l'adhérence de $G_T(\Theta)$ comme précédemment. C'est alors une conséquence immédiate des propriétés de continuité de la décomposition de Föllmer-Schweizer (Monat/Stricker (1994)).

Dans le cas continu, les résultats précédents nous permettent d'obtenir la décomposition de Föllmer-Schweizer sous l'hypothèse $R_2(P)$.

Théorème 6. Si $\mathcal{E}(-\widehat{\lambda} \cdot M)$ vérifie $R_2(P)$, alors, toute v.a. H de $\mathcal{L}^2(\Omega, \ \mathcal{F}_T, \ P)$ admet une décomposition de Föllmer-Schweizer :

$$H = H_0 + \int_0^T \xi_s^* dX_s + L_T$$

où H_0 est une variable $\mathcal{F}_0$-mesurable, $\xi \in \Theta$ et L est une martingale de $\mathcal{M}_0^2$, fortement orthogonale à M.

Enfin, on peut se poser le problème de caractériser l'adhérence de $G_T(\Theta)$ lorsqu'il n'existe pas de loi de martingale équivalente dont la densité est de carré intégrable. En général, le problème reste ouvert. Néanmoins, lorsque M a la PRP(P) et que X admet une loi de martingale équivalente dont la densité n'est pas de carré intégrable, on peut à nouveau caractériser l'adhérence de $G_T(\Theta)$.

Théorème 7. Si M a la PRP(P) et si X admet une loi de martingale équivalente Q dont la densité n'est pas de carré intégrable, alors $\overline{G_T(\Theta)} = \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}_T, P)$.

Remarque. Soient $(W_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien et $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ sa filtration naturelle. Si on pose $X_t = W_t + t$, on peut montrer aisément que $G_\infty(\Theta) = \mathcal{L}^2(\mathcal{F}_\infty, P)$ bien qu'il n'existe pas de loi de martingale équivalente Q pour la semimartingale X.

Références.

F. Delbaen, P. Monat, W. Schachermayer, M. Schweizer et C. Stricker (1994). Article en préparation.

C. Dellacherie et P.-A. Meyer (1980) "Probabilités et potentiel", ch. V à VIII, Hermann.

C. Doléans-Dade et P.-A. Meyer (1979) "Inégalités de normes avec poids", p. 313-331, Séminaire de Probabilités XIII, Lecture Notes in Mathematics 721, Springer.

J. Jacod (1979) "Calcul Stochastique et Problèmes de Martingales", Lecture Notes in Mathematics 714, Springer.

N. Kazamaki (1994) "Exponential Martingales and BMO", à paraître dans Lecture Notes in Mathematics 1579, Springer.

P. Monat et C. Stricker (1994) "Föllmer-Schweizer Decomposition and Mean-Variance Hedging for General Claims", à paraître dans Annals of Probability.

M. Schweizer (1994) "Approximating Random Variables by Stochastic Integrals", à paraître dans Annals of Probability.

C. Stricker (1990) "Arbitrage et lois de martingale". Ann. Inst. Henri Poincaré, vol. 26 n 3, p. 451-460.

M. Yor (1985) "Inégalités de martingales continues arrêtées à un temps quelconque", p. 115-118, Lectures Notes in Mathematics 1118, Springer.

Freddy Delbaen, Vrije Universiteit Brussel, Pleinlaan 2, B-1050 BRUSSELS, BELGIUM.
Pascale Monat et Christophe Stricker, Laboratoire de Mathématiques, URA CNRS 741, 16 Route de Gray, 25030 BESANÇON cedex, FRANCE.
Walter Schachermayer, Universität Wien, Brünnerstrasse 72, A-1210 WIEN, AUSTRIA.
Martin Schweizer, Universität Göttingen, Institut für Mathematische Stochastik, Lotzestrasse 13, D-37083 GÖTTINGEN, GERMANY.