

# Lösungen zu den Kapiteln 11–14

## Hinweise

Besteht eine Aufgabe im wesentlichen darin, eine gegebene Gleichung aufzulösen oder einen gegebenen Ausdruck in bestimmter Weise umzuformen, so wird diese Gleichung bzw. dieser Ausdruck mit % bezeichnet.

Formelnummern beziehen sich auf das laufende Kapitel des Lösungsteils. Auf Formeln im Haupttext wird mit Angabe der Abschnittnummer verwiesen. Figuren im Lösungsteil sind kapitelweise zweistellig nummeriert. Dreistellige Figurenummern beziehen sich auf den Haupttext.

Fehlermeldungen nimmt der Autor dankend entgegen. Hier seine Adresse:

`christian.blatter@math.ethz.ch`

Greifensee, 15. Mai 2008

# Lösungen zu Kapitel 11

## Abschnitt 11.1

1a Die Potenzreihe

$$g(z) := \sum_{k=1}^{\infty} k z^k$$

besitzt offensichtlich den Konvergenzradius 1. Wir müssen daher dafür sorgen, dass  $\exp(t^2 - t) < 1$  resp.  $t^2 - t < 0$  wird. Dies ist auf dem  $t$ -Intervall  $I := ]0, 1[$  der Fall; folglich ist  $f$  auf  $I$  wohldefiniert.

Für die lokal gleichmässige Konvergenz benötigen wir quantitative Aussagen. Jeder Punkt  $t_0 \in I$  besitzt eine Umgebung der Form  $I_\delta := ]\delta, 1 - \delta[$  mit  $0 < \delta < \frac{1}{2}$ . Für alle  $t \in I_\delta$  gilt  $t - t^2 \geq \delta(1 - \delta) \geq \delta/2$  und folglich

$$0 < \exp(t^2 - t) \leq \rho := e^{-\delta/2} < 1 .$$

Man hat daher

$$|k \exp(k(t^2 - t))| \leq c_k := k \rho^k \quad (t \in I_\delta) .$$

Die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$  ist konvergent. Nach dem Kriterium von Weierstrass (11.2) ist daher die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} k z^k$  auf  $I_\delta$  gleichmässig konvergent.

b Wir benötigen einen geschlossenen Ausdruck für die Funktion  $g(z)$ . Hierzu berechnen wir

$$\begin{aligned} (1 - z)g(z) &= \sum_{k=1}^{\infty} k z^k - \sum_{k=1}^{\infty} k z^{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} k z^k - \sum_{k=2}^{\infty} (k-1) z^k = \sum_{k=1}^{\infty} z^k \\ &= \frac{z}{1 - z} \quad (|z| < 1) . \end{aligned}$$

Damit ergibt sich  $g(z) = z/(1 - z)^2$ . Wegen  $f(t) := g(e^{t^2 - t})$  erhält man daher definitiv

$$f(t) = \frac{e^{t^2 - t}}{(1 - e^{t^2 - t})^2} = \frac{1}{4 \sinh^2 \frac{t - t^2}{2}} \quad (t \in I) .$$

2 Der Sachverhalt (b) treffe zu, und es sei  $K$  eine beliebige kompakte Teilmenge von  $A$ . Wir müssen zeigen, dass die  $f_n$  auf  $K$  gleichmässig gegen  $f$  konvergieren. Es sei ein  $\varepsilon > 0$  vorgegeben. Dann gibt es zu jedem  $\xi \in K$  eine Umgebung  $U(\xi)$  und ein  $n_\xi$  mit

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in U(\xi), \forall n > n_\xi .$$

Da  $K$  kompakt ist, lassen sich endlich viele  $\xi_i$  ( $1 \leq i \leq N$ ) so auswählen, dass  $K \subset \bigcup_{i=1}^N U(\xi_i)$  garantiert ist. Setze nun  $n_0 := \max_{1 \leq i \leq N} n_{\xi_i}$ . Dann gilt

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in K, \forall n > n_0 .$$

Umgekehrt: Der Sachverhalt (b') treffe zu, und es sei  $x_0$  ein beliebiger Punkt von  $A$ . Für den Beweis von (b) genügt es, eine kompakte Umgebung  $V$  von  $x_0$  zu produzieren.

Ist  $A$  offen, so gibt es ein  $\varepsilon > 0$  mit  $U_{2\varepsilon}(x_0) \subset A$ . In diesem Fall ist die Menge  $V := \{x \mid |x - x_0| \leq \varepsilon\}$  eine kompakte Umgebung von  $x_0$ .

Ist  $A$  abgeschlossen, so ist  $V := A \cap \{x \mid |x - x_0| \leq 1\}$  als abgeschlossene und beschränkte Menge kompakt; ferner ist  $V$  auch eine Umgebung von  $x_0 \in A$ .

3 Ist  $0 < h \leq \frac{\pi}{2}$ , so gilt

$$\sin h \leq \sin t \leq 1 \quad \forall t \in I_h := \left[ h, \frac{\pi}{2} \right] . \quad (1)$$

Ferner ist  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\sin h} = 1$ . Zu vorgegebenem  $\varepsilon > 0$  gibt es daher ein  $n_0$  mit  $\sqrt[n]{\sin h} > 1 - \varepsilon$  für alle  $n > n_0$ . Zusammen mit (1) ergibt sich daher

$$1 - \varepsilon < \sqrt[n]{\sin t} \leq 1 \quad \forall t \in I_h, \forall n > n_0 .$$

Hiernach konvergieren die  $f_n$  auf  $I_h$  gleichmässig gegen die Grenzfunktion  $f(t) := 1$  ( $t > 0$ ).

Andererseits ist aber  $f_n(0) = 0$  ( $n \geq 2$ ) und folglich auch

$$f(0) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(0) = 0 .$$

Wir schliessen nun folgendermassen: Wäre die Konvergenz der  $f_n$  auf ganz  $I_0 := \left[ 0, \frac{\pi}{2} \right]$  gleichmässig, so müsste  $f$  nach Satz **(11.3)** auf  $I_0$  stetig sein. Das ist aber nicht der Fall.

4a Man hat

$$f'_n(t) = (n - (n + 1)t)t^{n-1} .$$

Wegen  $f_n(0) = f_n(1) = 0$  ( $n \geq 1$ ) nimmt  $f_n$  sein Maximum im kritischen Punkt  $\tau_n := \frac{n}{n+1}$  an. Für  $0 \leq t \leq 1$  gilt daher

$$0 \leq f_n(t) \leq f_n(\tau_n) = (1 - \tau_n)\tau_n^n = \frac{1}{n+1} \left( \frac{n}{n+1} \right)^n < \frac{1}{n+1} .$$

Dies beweist, dass die  $f_n$  auf  $[0, 1]$  gleichmässig gegen 0 konvergieren.

*b* Für alle  $t \in \mathbb{R}$  gilt

$$0 \leq f_n(t) = \frac{1}{n} \left( 1 - \frac{1}{1 + nt^2} \right) < \frac{1}{n} .$$

Hieraus folgt, dass die  $f_n$  auf  $\mathbb{R}$  gleichmässig gegen 0 konvergieren.

*c* Aus  $|\sin x| \leq |x|$  folgt

$$\left| \sin^2 \frac{t}{k} \right| \leq \frac{t^2}{k^2} \leq \frac{c^2}{k^2} \quad (-c \leq t \leq c) .$$

Da die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2$  konvergiert, schliesst man mit Hilfe von Satz (11.2) auf die gleichmässige Konvergenz von %.

*d* Die Abschätzung

$$\left| \frac{kt^2}{k^3 + t^3} \right| \leq \frac{kc^2}{k^3} = \frac{c^2}{k^2} \quad (0 \leq t \leq c)$$

garantiert wie in *c* die gleichmässige Konvergenz von %.

*5a* Es ist  $f_n(0) = 0$  für alle  $n \geq 1$  und damit  $f(0) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(0) = 0$ . Für festes  $t > 0$  ist  $q := e^{-t} < 1$  und folglich

$$f(t) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = t \lim_{n \rightarrow \infty} (n^\alpha q^n) = 0$$

für jeden Wert von  $\alpha$ .

*b* Man hat

$$f'_n(t) = n^\alpha (1 - nt) e^{-nt} .$$

Wegen  $f_n(0) = 0$  und  $\lim_{t \rightarrow \infty} f_n(t) = 0$  nimmt  $f_n$  sein Maximum im kritischen Punkt  $\tau_n := \frac{1}{n}$  an, und es gilt

$$0 \leq f_n(t) \leq f_n(\tau_n) = \frac{1}{e} n^{\alpha-1} \quad (t \geq 0) .$$

Hieraus ziehen wir den folgenden Schluss: Ist  $\alpha < 1$ , so konvergieren die  $f_n$  auf  $\mathbb{R}_{\geq 0}$  gleichmässig gegen  $f(t) := 0$ . Ist  $\alpha \geq 1$ , so ist  $f_n(\tau_n) \geq 1/e$  für alle (auch noch so grossen)  $n$ . Für gleichmässige Konvergenz der  $f_n$  gegen 0 müsste es aber ein  $n_0$  geben mit

$$|f_n(t)| < \frac{1}{e} \quad \forall t \in \mathbb{R}_{\geq 0}, \forall n > n_0 .$$

Da das nicht der Fall ist, konvergieren die  $f_n$  für  $\alpha \geq 1$  nicht gleichmässig gegen 0.

6a Dem Hinweis folgend untersuchen wir zunächst die Transformation  $T$ . Die Gleichung  $T(x) = x$  liefert den Fixpunkt 3. Wir schreiben daher die Rekursionsformel  $x_{n+1} = \frac{2}{3}x_n + 1$  in der Form

$$x_{n+1} - 3 = \frac{2}{3}(x_n - 3)$$

und stellen fest, dass einmalige Anwendung von  $T$  den Abstand zum Fixpunkt mit  $\frac{2}{3}$  multipliziert. Hieraus ergibt sich weiter

$$x_n - 3 = \left(\frac{2}{3}\right)^n (x_0 - 3) \quad (n \geq 0) \quad (2)$$

und folglich

$$|f_n(t) - 3| = \left(\frac{2}{3}\right)^n |\sin t - 3| \leq 4 \left(\frac{2}{3}\right)^n \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Dies beweist, dass die  $f_n$  auf  $\mathbb{R}$  gleichmässig gegen die Konstante 3 konvergieren.

b Die Formel (2) liefert jetzt

$$|f_n(t) - 3| = \left(\frac{2}{3}\right)^n |t^2 - 3| \quad (n \geq 0). \quad (3)$$

Damit gilt immer noch  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = 3$  für jedes feste  $t \in \mathbb{R}$ . Die Konvergenz ist aber nicht mehr gleichmässig; denn für jedes (noch so grosse)  $n$  lassen sich Punkte  $t \in \mathbb{R}$  finden, für die die rechte Seite von (3) grösser als 1 ist.

7 Die  $g_n$  bilden eine monoton fallende Folge von stetigen Funktionen, die punktweise gegen 0 konvergiert. Wir müssen zeigen, dass diese Konvergenz gleichmässig ist.

Es sei ein  $\varepsilon > 0$  vorgegeben. Dann gibt es für jedes  $\xi \in A$  ein  $n(\xi)$  mit  $g_{n(\xi)}(\xi) < \varepsilon/2$  und weiter eine Umgebung  $U(\xi)$  mit  $g_{n(\xi)}(x) < \varepsilon$  für alle  $x \in U(\xi)$ . Die Menge  $A$  ist kompakt. Daher lassen sich endlich viele  $\xi_i$  ( $1 \leq i \leq N$ ) so auswählen, dass  $A \subset \bigcup_{i=1}^N U(\xi_i)$  garantiert ist. Setze nun  $n_0 := \max_{1 \leq i \leq N} n(\xi_i)$ . Für jeden Punkt  $x \in U(\xi_i)$  gilt dann

$$0 \leq g_n(x) \leq g_{n_0}(x) \leq g_{n(\xi_i)}(x) < \varepsilon \quad (n > n_0),$$

und da jeder Punkt  $x \in A$  in einem  $U(\xi_i)$  liegt, ist damit

$$0 \leq g_n(x) < \varepsilon \quad \forall x \in A, \forall n > n_0$$

sichergestellt.

## Abschnitt 11.2

1 Wir zeigen zunächst: Für alle  $n \geq 0$  gilt

$$0 \leq f_n(t) \leq \frac{1}{2^n} \quad (t \geq 0).$$

□ Dies trifft offensichtlich zu für  $n = 0$  und sei richtig für  $n$ . Dann ergibt sich weiter

$$0 \leq f_{n+1}(t) = f_0(f_n(t)) \leq \frac{f_n(t)}{2 + f_n(t)} \leq \frac{1}{2} f_n(t) \leq \frac{1}{2^{n+1}} \quad (t \geq 0). \quad \square$$

Die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(t)$  ist daher nach **(11.2)** gleichmässig konvergent auf  $\mathbb{R}_{\geq 0}$  und stellt dort eine stetige Funktion dar.

2a Aus

$$0 \leq 1 - \cos u = 2 \sin^2 \frac{u}{2} \leq \frac{u^2}{2} \leq \frac{u}{2} \leq 1 \quad (0 \leq u \leq 1)$$

folgt mit vollständiger Induktion die Abschätzung

$$0 \leq f_n(t) \leq \frac{1}{2^n} \quad \forall t \in \mathbb{R}, \forall n \geq 0. \quad (4)$$

Die Reihe  $s(t) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t)$  ist daher nach **(11.2)** gleichmässig konvergent auf  $\mathbb{R}$ .

b Wir müssen zeigen, dass die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} f'_n(t)$  auf  $\mathbb{R}$  lokal gleichmässig konvergiert.

Es gilt

$$|f'_0(t)| = \frac{2|t|}{(1+t^2)^2} \leq \begin{cases} 2|t| \leq 2 & (|t| \leq 1) \\ \frac{2}{|t|^3} \leq 2 & (|t| \geq 1) \end{cases}. \quad (5)$$

Weiter erhält man mit Hilfe der Kettenregel und (4) die Abschätzung

$$|f'_{n+1}(t)| = \sin(f_n(t)) |f'_n(t)| \leq \frac{1}{2^n} |f'_n(t)| \quad \forall t \in \mathbb{R}, \forall n \geq 0.$$

Mit (5) und vollständiger Induktion ergibt sich hieraus leicht

$$|f'_n(t)| \leq \frac{1}{2^{(n-2)(n+1)/2}} \quad \forall t \in \mathbb{R}, \forall n \geq 0,$$

womit das Verlangte geleistet ist.

3 Wird die  $f$  definierende Reihe gliedweise differenziert, so erhält man die Reihe

$$g(t) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k} \sin \frac{t}{k} \cos \frac{t}{k}.$$

Für  $|t| \leq M$  gilt

$$\left| \frac{2}{k} \sin \frac{t}{k} \cos \frac{t}{k} \right| \leq \frac{2M}{k^2},$$

und die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} 2M/k^2$  ist konvergent. Folglich ist die  $g$  definierende Reihe lokal gleichmässig konvergent auf  $\mathbb{R}$ . Damit ist  $f'(t) \equiv g(t)$  sichergestellt.

### Abschnitt 11.3

1a Vorweg ist  $f_n(0) = 0$  für alle  $n \geq 1$  und damit auch  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(0) = 0$ , unabhängig von  $\alpha$ . Betrachte jetzt ein festes  $t \in ]0, 1]$  und schreibe  $f_n$  in der Form

$$f_n(t) = n^{\alpha-2} \frac{t}{t^2 + 1/n^2}.$$

Hier strebt der zweite Faktor mit  $n \rightarrow \infty$  gegen  $\frac{1}{t} > 0$ . Wir können daher Folgendes sagen: Für  $t \in ]0, 1]$  gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = \begin{cases} \infty & (\alpha > 2) \\ 1/t & (\alpha = 2) \\ 0 & (\alpha < 2) \end{cases}.$$

Für  $\alpha < 2$  ist also die Grenzfunktion  $f(t) \equiv 0$  auf dem ganzen Intervall  $[0, 1]$  stetig.

b Die Standardfunktion  $g(x) := \frac{x}{1+x^2}$  ( $x \geq 0$ ) verschwindet für  $x = 0$  und  $x \rightarrow \infty$ , und sie nimmt an der Stelle  $x = 1$  den Maximalwert  $\frac{1}{2}$  an. Wir schreiben  $f_n$  in der Form

$$f_n(t) := n^{\alpha-1} g(nt) \quad (0 \leq t \leq 1) \quad (6)$$

und können dann Folgendes sagen: Ist  $1 \leq \alpha \leq 2$ , so nimmt  $f_n$  an der Stelle  $\tau_n := \frac{1}{n}$  den Wert

$$f_n(\tau_n) = \frac{1}{2} n^{\alpha-1} \geq \frac{1}{2}$$

an. Unter diesen Umständen können die  $f_n$  auf  $[0, 1]$  nicht gleichmässig gegen 0 konvergieren.

Ist aber  $\alpha < 1$ , so folgt aus (6) die Abschätzung

$$0 \leq f_n(t) \leq \frac{1}{2} n^{\alpha-1} \quad \forall t \in [0, 1], \forall n \geq 1,$$

die die gleichmässige Konvergenz der  $f_n$  gegen 0 garantiert.

c Man berechnet

$$\int_0^1 f_n(t) dt = \frac{n^{\alpha-2}}{2} \log(1 + n^2 t^2) \Big|_0^1 = n^{\alpha-2} \log \sqrt{1 + n^2}.$$

Für alle  $\alpha < 2$  gilt daher

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(t) dt = 0 = \int_0^1 f(t) dt,$$

und für  $\alpha \geq 2$  sind beide Seiten dieser Gleichung undefiniert.

2 Da hier von uneigentlichen Integralen die Rede ist, helfen weder der Satz **(11.9)** noch der stärkere Satz **(11.12)**.

Es sei ein  $\varepsilon > 0$  vorgegeben. Da das Integral  $\int_0^\infty e^{-t} dt$  konvergiert, gibt es ein  $M$  mit

$$\int_M^\infty e^{-t} dt < \frac{\varepsilon}{2},$$

und da die  $f_n$  lokal gleichmässig konvergieren, gibt es weiter ein  $n_0$  mit

$$0 \leq f_n(t) \leq \frac{\varepsilon}{2M} \quad \forall t \in [0, M], \forall n > n_0.$$

Damit erhalten wir

$$0 \leq \int_0^\infty f_n(t) dt \leq \int_0^M f_n(t) dt + \int_M^\infty e^{-t} dt \leq \frac{\varepsilon}{2M} M + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad (n > n_0),$$

womit  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty f_n(t) dt = 0$  erwiesen ist.

3 Für  $x > 0$  gilt

$$\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = k \Leftrightarrow k \leq \frac{1}{x} < k+1 \Leftrightarrow \frac{1}{k+1} < x \leq \frac{1}{k}.$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \%_0 &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{1/(k+1)}^{1/k} 2^{-\lfloor 1/x \rfloor} dx = \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) 2^{-k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{-k}}{k} - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2 \cdot 2^{-k}}{k} \\ &= 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{-k}}{k}. \end{aligned}$$

Hier kommt uns die Logarithmusreihe

$$\log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \dots$$

(siehe Beispiel 7.6.①) zu Hilfe. Setzt man speziell  $t := -\frac{1}{2}$ , so ergibt sich

$$\log \frac{1}{2} = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{-k}}{k}. \text{ Wir erhalten somit definitiv}$$

$$\% = 1 - \log 2 \doteq 0.306853.$$

#### Abschnitt 11.4

1a Wir setzen  $\alpha > 0$  voraus. Dann gilt

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\arctan(\alpha \tan t)}{\tan t} &= \alpha \lim_{u \rightarrow 0+} \frac{\arctan u}{u} = \alpha \arctan'(0) = \alpha, \\ \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}-} \frac{\arctan(\alpha \tan t)}{\tan t} &= \alpha \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\arctan u}{u} = 0. \end{aligned}$$

b Mit Hilfe der Leibnizschen Regel erhält man

$$F'(\alpha) = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 + \alpha^2 \tan^2 t} dt.$$

Die Substitution  $\tan t := u$  ( $0 \leq u < \infty$ ) liefert weiter

$$\begin{aligned} F'(\alpha) &= \int_0^{\infty} \frac{1}{(1 + \alpha^2 u^2)(1 + u^2)} du = \frac{1}{1 - \alpha^2} \int_0^{\infty} \left( \frac{1}{1 + u^2} - \frac{\alpha^2}{1 + \alpha^2 u^2} \right) du \\ &= \frac{1}{1 - \alpha^2} (\arctan u - \alpha \arctan(\alpha u)) \Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{2(1 + \alpha)}. \end{aligned}$$

Wegen  $F(0) = 0$  erhält man hieraus definitiv

$$F(\alpha) = \frac{\pi}{2} \log(1 + \alpha) \quad (\alpha \geq 0).$$

2 Nach Satz (11.16) gibt es eine Umgebung  $U$  von 0 und eine  $C^\infty$ -Funktion  $h$  mit  $h(0) = 8$  und

$$f(t) = t^3 h(t) \quad (t \in U).$$

Die Funktion  $\text{wrz}_3: u \mapsto \sqrt[3]{u}$  ist in der Umgebung von  $u = 8$  beliebig oft differenzierbar. Folglich ist die Funktion

$$g(t) := t \text{wrz}_3(h(t))$$

in einer geeigneten Umgebung  $U'$  von 0 beliebig oft differenzierbar, und es gilt  $f(t) \equiv (g(t))^3$  ( $t \in U'$ ). Ferner hat man

$$g'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(t)}{t} = \text{wrz}_3(h(0)) = 2.$$

3 Für  $t \neq 0$  berechnet man

$$f'(t) = \frac{1 - (1-t)e^t}{t^2}, \quad f''(t) = \dots = \frac{-2 + (2 - 2t + t^2)e^t}{t^3}.$$

Weiter erhält man mit Hilfe der Regel von Bernoulli-de l'Hôpital

$$f'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1 - t}{t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{2t} = \frac{1}{2}.$$

Dies stimmt mit

$$\lim_{t \rightarrow 0} f'(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t e^t}{2t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t}{2} = \frac{1}{2}$$

überein; folglich ist jedenfalls  $f \in C^1(\mathbb{R})$ . Analog fortfahrend erhalten wir

$$\begin{aligned} f''(0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f'(t) - f'(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - (1-t)e^t - t^2/2}{t^3} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t(e^t - 1)}{3t^2} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{3t} = \frac{1}{3}, \end{aligned}$$

und dies stimmt mit

$$\lim_{t \rightarrow 0} f''(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2 e^t}{3t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t}{3} = \frac{1}{3}$$

überein, womit  $f \in C^2(\mathbb{R})$  erwiesen ist.

### Abschnitt 11.5

1a Man hat  $1 - \tanh k = \frac{2e^{-k}}{e^k + e^{-k}} = \frac{2e^{-2k}}{1 + e^{-2k}}$  und folglich

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{1 - \tanh k} = e^{-2} \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\frac{2}{1 + e^{-2k}}} = e^{-2}.$$

Hieraus ergibt sich  $\rho = e^2$ .

b Aus  $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{k} \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{k}\right)^k = e^3$  folgt  $\rho = e^{-3}$ .

2a Der Konvergenzradius ist offensichtlich 1. Setze  $\sum_{k=1}^{\infty} k^2 t^k =: f(t)$ . Dann ist (siehe Aufgabe 11.1.1b)

$$\int_0^t \frac{f(t)}{t} dt = \int_0^t \sum_{k=1}^{\infty} k^2 t^{k-1} dt = \sum_{k=1}^{\infty} k t^k = \frac{t}{(1-t)^2} \quad (7)$$

und folglich

$$\frac{f(t)}{t} = \left( \frac{t}{(1-t)^2} \right)' = \frac{1+t}{(1-t)^3}.$$

Damit ergibt sich definitiv

$$f(t) = \frac{t(1+t)}{(1-t)^3}.$$

(Will man von dem in Aufgabe 11.1.1b auf andere Weise erhaltenen Zwischenresultat nicht Gebrauch machen, muss man den Schritt (7) wiederholen.)

b Der Konvergenzradius von % ist offensichtlich 1. Für  $t := u^2 > 0$  betrachten wir die Hilfsfunktion

$$g(u) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u^{2k-1}}{2k-1}$$

mit der Ableitung  $g'(u) = \sum_{k=1}^{\infty} u^{2k-2} = \sum_{k=0}^{\infty} u^{2k} = \frac{1}{1-u^2}$ . Hieraus folgt

$$g(u) = \frac{1}{2} \log \frac{1+u}{1-u} = \operatorname{artanh} u$$

und damit weiter

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{u^{2k}}{2k-1} = u g(u) = u \operatorname{artanh} u.$$

Setzt man in der letzten Formel  $u := \sqrt{t}$ , so ergibt sich

$$\% = \sqrt{t} \operatorname{artanh}(\sqrt{t}) \quad (t > 0). \quad (8_1)$$

Für  $t := -u^2 < 0$  betrachten wir analog die Hilfsfunktion

$$g(u) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} u^{2k-1}}{2k-1}$$

mit der Ableitung  $g'(u) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} u^{2k-2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-u^2)^k = \frac{1}{1+u^2}$ . Hieraus folgt  $g(u) = \arctan u$  und damit weiter

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-u^2)^k}{2k-1} = -u g(u) = -u \arctan u .$$

Setzt man in der letzten Formel  $u := \sqrt{-t}$ , so ergibt sich

$$\% = -\sqrt{-t} \arctan(\sqrt{-t}) \quad (t < 0) . \quad (8_2)$$

Aus (8<sub>1</sub>) und (8<sub>2</sub>) folgt nicht, dass  $\arctan$  und  $\operatorname{artanh}$  im Reellen ineinander umgerechnet werden können! Was wir hingegen bewiesen haben, ist dieses: Die natürliche Fortsetzung der Funktion (8<sub>1</sub>) auf die negative  $t$ -Halbachse ist die Funktion (8<sub>2</sub>).

3 Wir schreiben  $f(t)$  in der Form

$$f(t) = \sqrt[5]{32 + (t-2)} = 2 \sqrt[5]{1 + \frac{t-2}{32}} .$$

Damit ergibt sich

$$f(t) = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \binom{1/5}{k} \left(\frac{t-2}{32}\right)^k = 2 + \frac{t-2}{80} - \frac{(t-2)^2}{6400} + \frac{3(t-2)^3}{1\,024\,000} - \dots$$

4 Wir müssen

$$\begin{aligned} \log \frac{1+t}{1-t} &= \left(t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \dots\right) - \left(-t - \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} - \dots\right) \\ &= 2t + \frac{2t^3}{3} + \frac{2t^5}{5} + \dots \end{aligned}$$

an der Stelle  $t = \frac{1}{3}$  evaluieren. Ist  $\frac{2t^{2m-1}}{2m-1}$  der letzte mitgenommene Term, so beträgt der Fehler

$$\leq \frac{2t^{2m+1}}{2m+1} (1 + t^2 + t^4 + \dots) = \frac{2t^{2m+1}}{(2m+1)(1-t^2)} \stackrel{!}{\leq} \frac{1}{2000} .$$

Wir müssen also  $m$  so gross wählen, dass

$$\frac{1}{2m+1} \left(\frac{1}{3}\right)^{2m+1} \leq \frac{8/9}{2 \cdot 2000} = \frac{1}{4500}$$

wird. Dies ist für  $m = 3$  der Fall. Somit weist

$$\log 2 \doteq \frac{2}{3} + \frac{2}{81} + \frac{2}{1215} = 0.693004$$

die verlangte Genauigkeit auf. (Der Tabellenwert ist 0.693147...)

5 Man hat

$$(1 + u)^{1/2} = 1 + \binom{1/2}{1} u + \binom{1/2}{2} u^2 + ? u^3 = 1 + \frac{u}{2} - \frac{u^2}{8} + ? u^3$$

und folglich

$$\sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 t} = 1 - \frac{\sin^2 t}{2} \kappa^2 - \frac{\sin^4 t}{8} \kappa^4 + ? \kappa^6 ;$$

ferner ist  $\int_0^{\pi/2} \sin^2 t dt = \frac{\pi}{2}$ ,  $\int_0^{\pi/2} \sin^4 t dt = \frac{3\pi}{16}$ . Damit ergibt sich

$$U = 4a \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \kappa^2 - \frac{3\pi}{128} \kappa^4 + ? \kappa^6 \right) = 2\pi a \left( 1 - \frac{1}{2} \kappa^2 - \frac{3}{64} \kappa^4 + ? \kappa^6 \right) .$$

Eine Fehlerabschätzung ist hiermit nicht geliefert.

6 Man hat

$$\log(1 + u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + ? u^4$$

und folglich

$$\log(1 + \varepsilon e^t) = e^t \varepsilon - \frac{e^{2t}}{2} \varepsilon^2 + \frac{e^{3t}}{3} \varepsilon^3 + ? \varepsilon^4 ;$$

ferner ist

$$\int_0^{\log 2} e^{kt} dt = \frac{1}{k} e^{kt} \Big|_0^{\log 2} = \frac{2^k - 1}{k} .$$

Damit ergibt sich

$$F(\varepsilon) = \varepsilon - \frac{3}{4} \varepsilon^2 + \frac{7}{9} \varepsilon^3 + ? \varepsilon^4 .$$

Eine Fehlerabschätzung ist hiermit nicht geliefert.

7 Dem Hinweis folgend gehen wir aus von

$$2^\alpha = \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{-\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\alpha}{k} \frac{(-1)^k}{2^k}$$

und konstruieren rekursiv die Folge  $(x_n)_{n \geq 0}$  der Partialsummen dieser Reihe. Die Reihenglieder

$$a_k = \binom{-\alpha}{k} \frac{(-1)^k}{2^k}$$

genügen der Rekursionsgleichung

$$a_{k+1} = \frac{\alpha + k}{2(k+1)} a_k .$$

Damit ergibt sich das folgende Rekursionsschema:

$$\begin{aligned} a_0 &= 1, & x_0 &= 1, \\ a_{k+1} &= \frac{\alpha + k}{2(k+1)} a_k, & x_{k+1} &= x_k + a_{k+1} \quad (k \geq 0). \end{aligned}$$

Für  $\alpha := \frac{1}{2}$  erhält man so nacheinander

$$x. = \left(1, \frac{5}{4}, \frac{43}{32}, \frac{177}{128}, \frac{2867}{2048}, \dots\right) = (1, 1.25, 1.34375, 1.38281, 1.3999, \dots) .$$

8 Man berechnet nacheinander

$$\begin{aligned} s'(t) &= \frac{t}{1} + \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + \dots, & s'(0) &= 0, \\ s''(t) &= 1 + t^2 + t^4 + \dots = \frac{1}{1-t^2}. \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich rückwärts

$$\begin{aligned} s'(t) &= \frac{1}{2} \log(1+t) - \frac{1}{2} \log(1-t), \\ s(t) &= \frac{1}{2}(1+t)(\log(1+t) - 1) + \frac{1}{2}(1-t)(\log(1-t) - 1) + C, \end{aligned}$$

Die Bedingung  $s(0) = 0$  liefert  $C = 1$ . Da die Reihe  $s(t)$  auf  $[0, 1]$  gleichmäßig konvergiert, erhält man nun

$$s = s(1) = \lim_{t \rightarrow 1^-} s(t) = \log 2,$$

wobei am Schluss von  $\lim_{u \rightarrow 0^+} u \log u = 0$  Gebrauch gemacht wurde.

Es geht aber auch einfacher: Aus

$$\frac{1}{(2k-1) \cdot 2k} = \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}$$

folgt direkt

$$s = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots = \log 2;$$

wobei hier allerdings auf den Satz von Abel zurückgegriffen werden musste.

9 Da es um sehr grosse  $t$  geht, betrachten wir die Hilfsfunktion

$$g(u) := f\left(\frac{1}{u}\right) = \frac{1/u}{\sqrt{1+1/u^2}} = \operatorname{sgn} u (1+u^2)^{-1/2}$$

für kleine positive  $u$ . Die in Beispiel ② erhaltenen Formeln liefern im vorliegenden Fall

$$g(u) = 1 - \frac{1}{2}u^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}u^4 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}u^6 + \dots \quad (0 < u < 1). \quad (9)$$

Damit ergibt sich

$$f(t) = g\left(\frac{1}{t}\right) = 1 - \frac{1}{2} \frac{1}{t^2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{1}{t^4} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{1}{t^6} + \dots \quad (t > 1).$$

Da die Reihe (9) alternierend ist, liefert bereits  $g(u) \doteq 1 - \frac{1}{2}u^2$  für  $u := 10^{-3}$  die verlangte Genauigkeit. Wir erhalten daher

$$f(1000) \doteq 1 - \frac{1}{2}10^{-6} = 0.9999995.$$

Zum Vergleich der Wert auf 16 Stellen genau: 0.9999995000003750...

9 Betrachte die Funktion

$$f(t) := 1 + 2t + 3t^2 + 4t^3 + \dots = \left(1 + t + t^2 + t^3 + \dots\right)' = \left(\frac{1}{1-t}\right)' = \frac{1}{(1-t)^2}.$$

Es gilt

$$1.23456789 \doteq f\left(\frac{1}{10}\right) = \frac{1}{(9/10)^2} = \frac{100}{81}$$

und folglich

$$\frac{1}{1.23456789} \doteq \frac{81}{100}.$$

### Abschnitt 11.6

1a Aus der Dreiecksungleichung für die euklidische Ebene folgt

$$|d(\mathbf{z}_1, \mathbf{0}) - d(\mathbf{z}_2, \mathbf{0})| \leq |\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2|,$$

und hieraus ergibt sich sofort  $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq |y_1 - y_2|$ . Somit ist  $f$  lipstetig bezüglich  $y$  mit Lipschitz-Konstante 1.

*b* Gemeint ist die mit  $y_0(x) \equiv 0$  beginnende Rekursion

$$y_{n+1}(x) := \int_0^x f(t, y_n(t)) dt = \int_0^x \sqrt{t^2 + y_n^2(t)} dt \quad (n \geq 0),$$

wobei wir uns zunächst auf  $x \geq 0$  beschränken. Man erhält nacheinander

$$y_1(x) = \int_0^x \sqrt{t^2} dt = \frac{x^2}{2},$$
$$y_2(x) = \int_0^x \sqrt{t^2 + t^4/4} dt = \int_0^x t \sqrt{1 + t^2/4} dt = \frac{4}{3} \left(1 + \frac{x^2}{4}\right)^{3/2}.$$

Wegen  $f(-x, -y) = f(x, y)$  ist das Richtungsfeld der betrachteten Differentialgleichung zentralsymmetrisch zum Ursprung. Die Lösungskurve durch den Ursprung ist daher der Graph einer ungeraden Funktion, und das ist auch für die Approximanten  $y_n(\cdot)$  der Fall. Damit ergibt sich definitiv

$$y_2(x) = \frac{4}{3} \operatorname{sgn} x \left(1 + \frac{x^2}{4}\right)^{3/2}.$$

## Lösungen zu Kapitel 12

### Abschnitt 12.1

1 Dem Hinweis folgend berechnen wir

$$L\mathbf{z} = L(\cos \phi, \sin \phi) = (6 \cos \phi - 4 \sin \phi, 2 \cos \phi - 3 \sin \phi)$$

und weiter

$$|L\mathbf{z}|^2 = 40 \cos^2 \phi - 60 \cos \phi \sin \phi + 25 \sin^2 \phi = \frac{65}{2} + \frac{15}{2} \cos(2\phi) - 30 \sin(2\phi) .$$

Damit ergibt sich nach einer bekannten Rechenregel

$$\max_{0 \leq \phi \leq 2\pi} |L\mathbf{z}|^2 = \frac{65}{2} + \sqrt{\left(\frac{15}{2}\right)^2 + 30^2} = \frac{65 + 15\sqrt{17}}{2} .$$

Die lineare Abbildung  $L$  besitzt daher die Norm  $\|L\| = \sqrt{\frac{65 + 15\sqrt{17}}{2}}$ .

### Abschnitt 12.2

1a Die Funktion  $f$  besitzt in der punktierten Ebene  $\mathbb{R}^2$  stetige partielle Ableitungen und ist damit in diesem Bereich (stetig) differenzierbar. Weiter ist

$$|f(\mathbf{0} + \mathbf{Z}) - f(\mathbf{0})| = |f(\mathbf{Z})| \leq |\mathbf{Z}|^2 \quad (\mathbf{Z} \in T_0)$$

und folglich  $|f(\mathbf{0} + \mathbf{Z}) - f(\mathbf{0})| = o(|\mathbf{Z}|)$  ( $\mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{0}$ ). Somit ist  $f$  auch an der Stelle  $\mathbf{0}$  differenzierbar, und zwar ist  $df(\mathbf{0}) = 0$ .

b Die Funktion  $f$  besitzt nach (12.7) auch an der Stelle  $\mathbf{0}$  partielle Ableitungen, nämlich  $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$ . Was nun die Stetigkeit von  $f_x$  und  $f_y$  im Ursprung betrifft, so müssen wir nun  $f_x$  und  $f_y$  für  $(x, y) \neq \mathbf{0}$  tatsächlich ausrechnen. Wir setzen  $\sqrt{x^2 + y^2} =: r$ ; dann ist

$$f(x, y) = r^2 \sin \frac{1}{r} .$$

Mit Hilfe der Kettenregel folgt

$$f_x(x, y) = \frac{d}{dr} \left( r^2 \sin \frac{1}{r} \right) \cdot r_x = \left( 2r \sin \frac{1}{r} - \cos \frac{1}{r} \right) \cdot \frac{x}{r} .$$

Wegen des Terms  $\cos(1/r)$  nimmt hier die rechte Seite in jeder noch so kleinen Umgebung von  $\mathbf{0}$  beliebige Werte zwischen  $-1$  und  $1$  an. Folglich ist  $f_x$  im Ursprung unstetig, und dasselbe gilt für  $f_y$ .

2 Man berechnet

$$\mathbf{f}(1, 1) = (0, 1), \quad [d\mathbf{f}(x, y)] = \begin{bmatrix} 2x & -3y^2 \\ 4x^3 & 4y^3 \end{bmatrix}, \quad [d\mathbf{f}(1, 1)] = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}.$$

Wir müssen die Gleichung  $d\mathbf{f}(1, 1) \cdot (X, Y) = -\mathbf{f}(1, 1)$  auflösen. In Matrizenform sieht das folgendermassen aus:

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Es ergibt sich  $X = -\frac{3}{20}$ ,  $Y = -\frac{1}{10}$ , das heisst  $\mathbf{Z} = (-0.15, -0.1)$ . Damit wird  $\mathbf{z}_1 = (0.85, 0.9)$ .

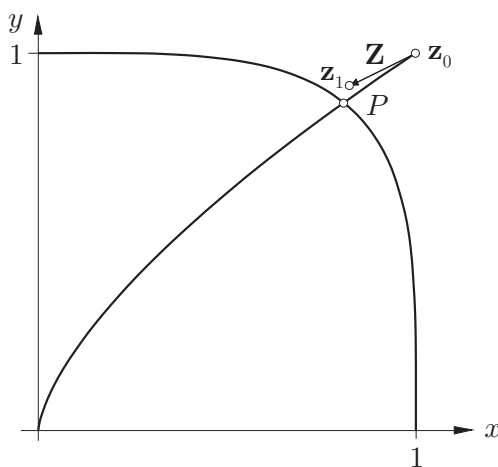


Fig. 12.1

3 Nach der Produktregel ist

$$\frac{\partial}{\partial x_k} (f(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{x})) = f_{,k}(\mathbf{x})g(\mathbf{x}) + f(\mathbf{x})g_{,k}(\mathbf{x}) \quad (1 \leq k \leq n)$$

und somit

$$\nabla(f \cdot g)(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) \nabla f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{x}) \nabla g(\mathbf{x}),$$

kurz:  $\nabla(f \cdot g) = g \nabla f + f \nabla g$ .

4a Ist  $f$  an der Stelle  $\mathbf{p}$  differenzierbar, so gilt

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{e}}f(\mathbf{p}) &= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{f(\mathbf{p} + t\mathbf{e}) - f(\mathbf{p})}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{p} + t\mathbf{e}) - f(\mathbf{p})}{t} = d\mathbf{f}(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{e} \\ &= \nabla f(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{e}. \end{aligned}$$

Insbesondere gilt dann

$$D_{\mathbf{e}_k} f(\mathbf{p}) = \nabla f(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{e}_k = f_{.k}(\mathbf{p}), \quad D_{-\mathbf{e}} f(\mathbf{p}) = -D_{\mathbf{e}} f(\mathbf{p}).$$

b Gemäss Text und a ist

$$\nabla f(\mathbf{p}) \cdot (0, 1) = 3, \quad \nabla f(\mathbf{p}) \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Es sei  $\nabla f(\mathbf{p}) = (u, v)$ . Dann besagen die letzten Gleichungen

$$v = 3, \quad -u - v = 1,$$

und hieraus folgt  $\nabla f(\mathbf{p}) = (-4, 3)$ .

c Ist  $f$  die Betragsfunktion, so gilt

$$D_{\mathbf{e}} f(\mathbf{0}) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{|\mathbf{0} + t\mathbf{e}| - |\mathbf{0}|}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{|t\mathbf{e}|}{t} = 1$$

für alle Einheitsvektoren  $\mathbf{e}$ . Die Identität  $D_{-\mathbf{e}} f(\mathbf{0}) = -D_{\mathbf{e}} f(\mathbf{0})$  ist somit verletzt, folglich ist  $f$  im Ursprung nicht differenzierbar.

5 Es gilt  $f(\mathbf{p} + \mathbf{X}) - f(\mathbf{p}) = |\mathbf{p} + \mathbf{X}|^2 - |\mathbf{p}|^2 = 2\mathbf{p} \cdot \mathbf{X} + |\mathbf{X}|^2 - |\mathbf{p}|^2$  und somit

$$f(\mathbf{p} + \mathbf{X}) - f(\mathbf{p}) = 2\mathbf{p} \cdot \mathbf{X} + o(|\mathbf{X}|) \quad (\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{0}).$$

Hieraus folgt  $\nabla f(\mathbf{p}) = 2\mathbf{p}$  auf Grund der Charakterisierung des Gradienten.

### Abschnitt 12.3

1 Setze  $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, 0) =: \mathbf{p}$ . Man berechnet

$$\begin{aligned} f_x(x, y, z) &= -e^{z \cos x} \cdot (-\sin x), & f_x(\mathbf{p}) &= 1; \\ f_y(x, y, z) &= e^{z \sin y} \cdot \cos y, & f_y(\mathbf{p}) &= \frac{1}{2}; \\ f_z(x, y, z) &= \int_{\cos x}^{\sin y} t e^{zt} dt, & f_z(\mathbf{p}) &= \frac{t^2}{2} \Big|_0^{\sqrt{3}/2} = \frac{3}{8}. \end{aligned}$$

Damit wird  $\nabla f(\mathbf{p}) = (1, \frac{1}{2}, \frac{3}{8})$ .

2 Wir übernehmen den Beweis der "eindimensionalen" Kettenregel (7.6)(d). Betrachte also ein festes  $t_0 \in \text{dom}(f)$  und setze  $f(t_0) =: z_0$ . Das Polynom  $p$  ist in der ganzen  $z$ -Ebene komplex differenzierbar und besitzt an der Stelle  $z_0$  die komplexe Ableitung  $p'(z_0)$ . Ferner gibt es nach (7.2)(a) eine an der

Stelle  $t_0$  stetige Trendfunktion  $m_{f,t_0}$  mit  $m_{f,t_0}(t_0) = f'(t_0)$  sowie eine an der Stelle  $z_0$  stetige Trendfunktion  $m_{p,z_0}$  mit  $m_{p,z_0}(z_0) = p'(z_0)$ . Es gilt also

$$p(z) - p(z_0) = m_{p,z_0}(z)(z - z_0), \quad f(t) - f(t_0) = m_{f,t_0}(t)(t - t_0).$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} p(f(t)) - p(f(t_0)) &= p(f(t)) - p(z_0) = m_{p,z_0}(f(t))(f(t) - z_0) \\ &= m_{p,z_0}(f(t)) m_{f,t_0}(t) (t - t_0). \end{aligned}$$

Hieraus folgt die Behauptung auf Grund der Rechenregeln über stetige Funktionen und des Prinzips **(7.2)**(b).

#### Abschnitt 12.4

1 Es sei  $\text{dom}(f) =: \Omega$ . Für festes  $x \in \mathbb{R}$  ist die Menge  $\Omega_x := \{y \mid (x, y) \in \Omega\}$  eine offene Teilmenge von  $\mathbb{R}$ . Ist  $\Omega_x$  ein nichtleeres offenes Intervall, so die Funktion  $f$  konstant auf der vertikalen Strecke  $\{x\} \times \Omega_x \subset \Omega$ , und dieser konstante Wert  $=: u(x)$  ist wohldefiniert. Hieraus folgt: Ist  $\Omega_x$  für jedes  $x \in \mathbb{R}$  entweder leer oder ein offenes Intervall, so gilt  $f(x, y) = u(x)$  für alle  $(x, y) \in \Omega$ , und  $u(\cdot)$  ist offensichtlich stetig differenzierbar.

Besteht jedoch  $\Omega_x$  für gewisse  $x$  aus mehreren getrennten Teilstücken, so braucht es keine derartige Funktion  $x \mapsto u(x)$  zu geben. Betrachte hierzu das folgende Beispiel: Es sei  $\Omega := \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \mid x \geq 0\}$  die längs der positiven  $x$ -Achse aufgeschnittene Ebene. Dieses  $\Omega$  ist offen und zusammenhängend, aber die Mengen  $\Omega_x$  bestehen für  $x \geq 0$  aus zwei disjunkten Intervallen. Die Funktion

$$f(x, y) := \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ x^2 \operatorname{sgn} y & (x \geq 0, y \neq 0) \end{cases}$$

ist stetig differenzierbar auf  $\Omega$  und genügt der Bedingung  $f_y \equiv 0$ . Es gibt aber keine Funktion  $x \mapsto u(x)$  mit  $f(x, y) = u(x)$  für alle  $(x, y) \in \Omega$ .

2 Die Funktion  $g := f_x$  ist eine  $C^1$ -Funktion mit  $g_y \equiv 0$ . Gemäss dem Resultat von Aufgabe 1 gibt es daher eine  $C^1$ -Funktion

$$u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto u(x)$$

mit

$$f_x(x, y) = g(x, y) = u(x) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Es sei  $U \in C^2$  eine Stammfunktion von  $u$ . Die weitere Funktion  $h(x, y) := f(x, y) - U(x)$  genügt der Bedingung  $h_x \equiv 0$ ; folglich gibt es eine  $C^2$ -Funktion  $y \mapsto V(y)$  mit  $h(x, y) = V(y)$  für alle  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Damit ergibt sich

$$f(x, y) = U(x) + V(y) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2. \quad (1)$$

Umgekehrt: Hat  $f$  die Gestalt (1) mit  $C^2$ -Funktionen  $U(\cdot)$  und  $V(\cdot)$ , so ist offensichtlich  $f_{xy} \equiv 0$ .

## Abschnitt 12.5

1 Man berechnet

$$u_t = cf'(x+ct) - cg'(x-ct), \quad u_{tt} = c^2 f''(x+ct) + c^2 g''(x-ct) = c^2 u_{xx}.$$

2 Wir setzen  $A(a, b) \neq (0, 0)$  voraus. Ist  $B = 0$  oder  $(c, d) = \lambda(a, b)$ , so hat  $f$  die Form

$$f(x, y) = C(ax + by)^n,$$

wobei wir im Weiteren  $C \neq 0$  annehmen. Der Graph  $z = f(x, y)$  ist eine Zylinderfläche, deren Mantellinien parallel zur Geraden  $ax + by = 0$  verlaufen. Man berechnet

$$f_x(x, y) = anC(ax + by)^{n-1}, \quad f_y(x, y) = bnC(ax + by)^{n-1}.$$

Hieraus folgt: Ist  $n = 1$ , so gibt es keinen kritischen Punkt. Ist aber  $n > 1$ , so sind die sämtlichen Punkte der Geraden  $ax + by = 0$  kritische Punkte von  $f$ . Je nach dem Vorzeichen von  $C$  und der Parität von  $n$  sind die kritischen Punkte lokale Minima, Maxima oder sogenannte "Terrassenpunkte" von  $f$ .

Im Weiteren sei auch  $B \neq 0$ , und  $(c, d)$  sei kein Vielfaches von  $(a, b)$ . Insbesondere ist dann  $ad - bc \neq 0$ . Man berechnet

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= a An(ax + by)^{n-1} + c Bn(cx + dy)^{n-1}, \\ f_y(x, y) &= b An(ax + by)^{n-1} + d Bn(cx + dy)^{n-1}. \end{aligned}$$

Hieraus und aus den über die Parameter getroffenen Annahmen folgt: In einem kritischen Punkt gelten die beiden Gleichungen

$$(ax + by)^{n-1} = 0, \quad (cx + dy)^{n-1} = 0.$$

Ist  $n = 1$ , so gibt es daher keinen kritischen Punkt, und ist  $n > 1$ , so ist der Ursprung der einzige kritische Punkt. Im Weiteren sei daher  $n > 1$ . Mit Hilfe der Formeln

$$ax + by =: \xi, \quad cx + dy =: \eta$$

führen wir in der Ebene neue (schiefwinklige) Koordinaten  $(\xi, \eta)$  ein. In diesen Koordinaten nimmt  $f$  die einfache Gestalt

$$\tilde{f}(\xi, \eta) = A\xi^n + B\eta^n$$

an. Der Typ des kritischen Punktes  $(0, 0)$  ergibt sich daher allein aus den Vorzeichen von  $A$  und  $B$  und aus der Parität von  $n$ . Ist zum Beispiel  $A > 0$ ,  $B > 0$  und  $n$  gerade, so haben wir an der Stelle  $(0, 0)$  ein lokales Minimum. Ist  $n > 2$ , so ist der kritische Punkt entartet.

3a Wegen  $\cos'(0) = 0$  ist der Ursprung ein kritischer Punkt. Auf Grund der trigonometrischen Identität

$$\cos \beta - \cos \alpha = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

lässt sich  $f$  folgendermassen darstellen:

$$f(x, y) = 2 \sin \frac{8x - y}{2} \sin \frac{2x + 3y}{2} = (8x - y)(2x + 3y)g(x, y);$$

dabei ist  $g \in C^\infty$  und  $g(0, 0) = \frac{1}{2}$ . Die Funktion  $f$  verschwindet also auf den beiden Geraden  $8x - y = 0$  und  $2x + 3y = 0$  und nimmt in den dazwischenliegenden Sektoren beiderlei Vorzeichen an. Der Ursprung ist daher ein Sattelpunkt von  $f$ .

b Wegen  $dg(0, 0) = d^2g(0, 0) = 0$  ist der Ursprung ein entarteter kritischer Punkt. Wir können also nicht nach Schema F vorgehen. Die Terme niedrigster Ordnung sind  $x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = r^4$ , und dies ist positiv definit. Die restlichen Terme lassen sich wie folgt abschätzen:

$$|-3x^3y^2 - 3x^2y^3| \leq 6r^5.$$

Damit ergibt sich

$$g(x, y) = r^4(1 + o(1)) \quad (r := \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow 0).$$

Hiernach ist  $g(0, 0) = 0$  und  $g(x, y) > 0$  ( $0 < r \ll 1$ ). Folglich besitzt  $g$  im Ursprung ein lokales Minimum.

c Wir setzen  $x^2 + y^2 + z^2 =: r^2$ . Mit Hilfe der Entwicklungen

$$\sin u = u + ?u^3, \quad \cos u = 1 - \frac{u^2}{2} + \frac{u^4}{24} + ?u^6.$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} h(x, y, z) &= r^2 + ?r^6 + 2 \left( 3 - \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2} + \frac{x^4 + y^4 + z^4}{24} + ?r^6 \right) \\ &= 6 + \frac{x^4 + y^4 + z^4}{12} + ?r^6. \end{aligned}$$

Der Ausdruck  $x^4 + y^4 + z^4$  ist offensichtlich positiv definit. Das reicht aber nicht; wir benötigen eine Abschätzung der Form  $x^4 + y^4 + z^4 \geq Cr^4$ . Hierzu argumentieren wir folgendermassen: Die Funktion  $t \mapsto t^2$  ist konvex; folglich gilt nach der Jensenschen Ungleichung

$$\frac{u^2 + v^2 + w^2}{3} \geq \left( \frac{u + v + w}{3} \right)^2.$$

Damit ist  $x^4 + y^4 + z^4 \geq \frac{1}{3}(x^2 + y^2 + z^2)^2 = \frac{1}{3}r^4$  sichergestellt. Wir haben daher

$$h(x, y, z) - 6 \geq \frac{1}{36}r^4(1 + o(r)) \quad (r \rightarrow 0).$$

Folglich besitzt  $h$  im Ursprung ein lokales Minimum.

4 Das  $r$ -te Differential  $d^r f(\mathbf{p})$  besitzt  $n^r$  Summanden der Form

$$f_{.k_1 k_2 \dots k_r}(\mathbf{p}) \cdot X_{k_1} X_{k_2} \dots X_{k_r},$$

wobei die  $r$  Indexvariablen  $k_1, \dots, k_r$  unabhängig voneinander von 1 bis  $n$  laufen. Von diesen  $n^r$  Summanden stimmen aber sehr viele überein: Wird gleich oft nach der gleichen Variablen differenziert, so besitzt sowohl der Koeffizient  $f_{.k_1 k_2 \dots k_r}(\mathbf{p})$  wie das Produkt  $X_{k_1} X_{k_2} \dots X_{k_r}$  denselben Wert. In der  $\alpha$ -Schreibweise von  $d^r f(\mathbf{p})$  werden nun ohnehin übereinstimmende Terme zu einem einzigen Term zusammengefasst, wobei man sich aber überlegen muss, wieviel gleiche Terme da jeweils zusammengefasst werden.

Der Multiindex  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  gibt an, wie oft bei dem betreffenden Term nach  $x_1, x_2, \dots, x_n$  differenziert wurde. Dann muss  $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = r$  sein, und das zugehörige  $\mathbf{X}$ -Monom hat die Form  $X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2} \dots X_n^{\alpha_n}$ .

Wieviel Wörter  $(k_1, k_2, \dots, k_r)$  der Länge  $r$  über dem Alphabet  $\{1, 2, \dots, n\}$  gibt es, in denen genau  $\alpha_1$ -mal der Buchstabe 1, genau  $\alpha_2$ -mal der Buchstabe 2,  $\dots$ , und genau  $\alpha_n$ -mal der Buchstabe  $n$  auftritt? Diese Anzahl ist

$$\frac{r!}{\alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n!}. \quad (2)$$

┌ Für  $n = 1$  liefert (2) die richtige Anzahl, nämlich 1. Für den Schluss von  $n - 1$  auf  $n$  überlegen wir folgendermassen: Man kann auf

$$\binom{r}{\alpha_n} = \frac{r!}{\alpha_n! (r - \alpha_n)!}$$

Arten die Plätze wählen, wo der Buchstabe  $n$  stehen soll, und muss dann noch die restlichen  $r - \alpha_n$  Plätze gemäss den vorgeschriebenen Vielfachheiten mit Buchstaben 1, 2,  $\dots$ ,  $n - 1$  besetzen. Nach Induktionsvoraussetzung ist das auf

$$\frac{(r - \alpha_n)!}{\alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_{n-1}!}$$

Arten möglich. Zusammengenommen ergibt sich der Ausdruck (2). ┐

In der  $\alpha$ -Schreibweise sieht die Taylor-Entwicklung von  $f$  an der Stelle  $\mathbf{p}$  folgendermassen aus:

$$f(\mathbf{p} + \mathbf{X}) = \sum_{\alpha \geq 0} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(\mathbf{p}) X^\alpha.$$

### Abschnitt 12.6

1 Setze zur Abkürzung  $1 - x_1 - x_2 - x_3 =: u$ . Dann ist

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_i} = \frac{u + x_i}{u^2}, \quad \frac{\partial y_i}{\partial x_k} = \frac{x_i}{u^2} \quad (k \neq i)$$

und folglich

$$[d\mathbf{f}(\mathbf{x})] = \frac{1}{u^2} \begin{bmatrix} 1 - x_2 - x_3 & x_1 & x_1 \\ x_2 & 1 - x_1 - x_3 & x_2 \\ x_3 & x_3 & 1 - x_1 - x_2 \end{bmatrix}.$$

Addiert man in der erhaltenen Matrix die beiden ersten Zeilen zur dritten und subtrahiert dann das  $x_1$ -Fache der dritten Zeile von der ersten, so erhält man nacheinander

$$\begin{bmatrix} 1 - x_2 - x_3 & x_1 & x_1 \\ x_2 & 1 - x_1 - x_3 & x_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} u & 0 & 0 \\ x_2 & 1 - x_1 - x_3 & x_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Die Determinante der letzten Matrix ist  $u^2$ , folglich ergibt sich insgesamt

$$J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = \frac{u^2}{u^6} = \frac{1}{(1 - x_1 - x_2 - x_3)^4}.$$

2a Ist  $f'(z_0) = A + iB$ , so besitzt die zugehörige Abbildung  $\mathbf{f}: \mathbb{R}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^2$  an der Stelle  $z_0$  die Funktionalmatrix

$$\begin{bmatrix} A & -B \\ B & A \end{bmatrix}$$

mit der Determinante  $A^2 + B^2 = |f'(z_0)|^2$ . Hieraus folgt: Ist  $f'(z_0) \neq 0$ , so ist  $d\mathbf{f}$  an der Stelle  $z_0$  regulär (und  $f$  resp.  $\mathbf{f}$  bildet eine Umgebung  $U$  von  $z_0$  bijektiv auf eine Umgebung  $V$  von  $f(z_0)$  ab). Ist aber  $f'(z_0) = 0$ , so ist  $d\mathbf{f}$  an der Stelle  $z_0$  singular, und zwar besitzt  $d\mathbf{f}$  dort den Rang 0.

Dies vorausgeschickt berechnen wir nun die Ableitung der angegebenen Funktion  $f$ . Es ergibt sich  $f'(z) = -2z - 1 + i$ , und dies verschwindet einzig an der Stelle  $z_0 = \frac{-1+i}{2}$ . In allen anderen Punkten ist  $d\mathbf{f}$  regulär.

b Man berechnet

$$\cosh'(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = \frac{e^{-z}}{2}(e^{2z} - 1),$$

und dies verschwindet genau an den Stellen  $z_k = k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ). In diesen Punkten ist  $d\mathbf{g}$  nach dem in a Gesagten nicht regulär.

Wegen  $g(-z) \equiv g(z)$  bildet  $g$  keine noch so kleine Umgebung des Ursprungs injektiv ab,

3a Wir konstruieren eine Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(0) = 2, \quad f(2) = 1, \quad f(1) = 0,$$

wobei wir es mit dem Ansatz  $f(t) = at^2 + bt + c$  versuchen. Wir haben Glück: Die Funktion

$$f(t) := \frac{3}{2}t^2 - \frac{7}{2}t + 2$$

leistet das Verlangte.

b Auf Grund der Kettenregel, der Multiplikativität der Determinante und der Periodizität der  $\mathbf{p}_k$  gilt

$$J_{\mathbf{g}}(\mathbf{p}_k) = \prod_{j=0}^{N-1} J_{\mathbf{f}}(\mathbf{p}_{k+j}) = \prod_{j=0}^{N-1} J_{\mathbf{f}}(\mathbf{p}_j)$$

für alle  $k$ .

4 Die Funktion

$$f(x, y) := x^2 + y^2 + \frac{6}{5}xy - 2x - \frac{6}{5}y$$

besitzt die partiellen Ableitungen

$$f_x(x, y) = 2x + \frac{6}{5}y - 2, \quad f_y(x, y) = 2y + \frac{6}{5}x - \frac{6}{5}.$$

Wegen  $f_y(1, 1) = 2 \neq 0$  definiert die Gleichung  $f(x, y) = 0$  eine in der Umgebung von  $x = 1$  definierte  $C^1$ -Funktion  $g: x \mapsto y = g(x)$  mit  $g(1) = 1$ , und es gilt

$$g'(1) = -\frac{f_x(1, 1)}{f_y(1, 1)} = -\frac{6/5}{2} = -\frac{3}{5}.$$

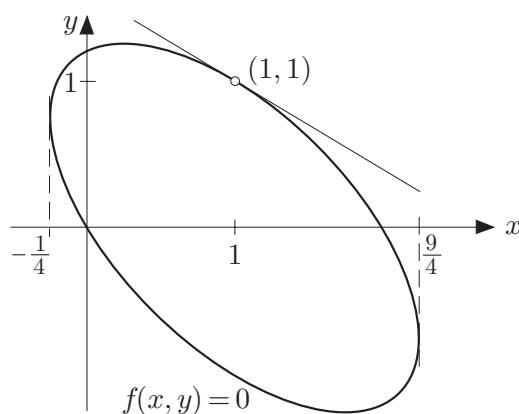


Fig. 12.2

Andererseits lässt sich die Gleichung  $f(x, y) = 0$  im vorliegenden Fall auch formelmässig nach  $y$  auflösen. Man erhält

$$y = \frac{3}{5}(1-x) \pm \frac{1}{5}\sqrt{9+32x-16x^2}$$

und damit den folgenden expliziten Ausdruck für  $g$ :

$$g(x) = \frac{3}{5}(1-x) + \frac{1}{5}\sqrt{9+32x-16x^2}.$$

Hieraus folgt weiter

$$g'(x) = -\frac{3}{5} + \frac{1}{5} \frac{16-16x}{\sqrt{9+32x-16x^2}}$$

und damit  $g'(1) = -\frac{3}{5}$  wie oben. Um den maximalen Definitionsbereich von  $g$  zu bestimmen, müssen wir das maximale Intervall finden, auf dem der Radikand  $9+32x-16x^2$  positiv ist. Dies ist der Fall für  $-\frac{1}{4} < x < \frac{9}{4}$ ; siehe dazu auch die Fig. 12.2.

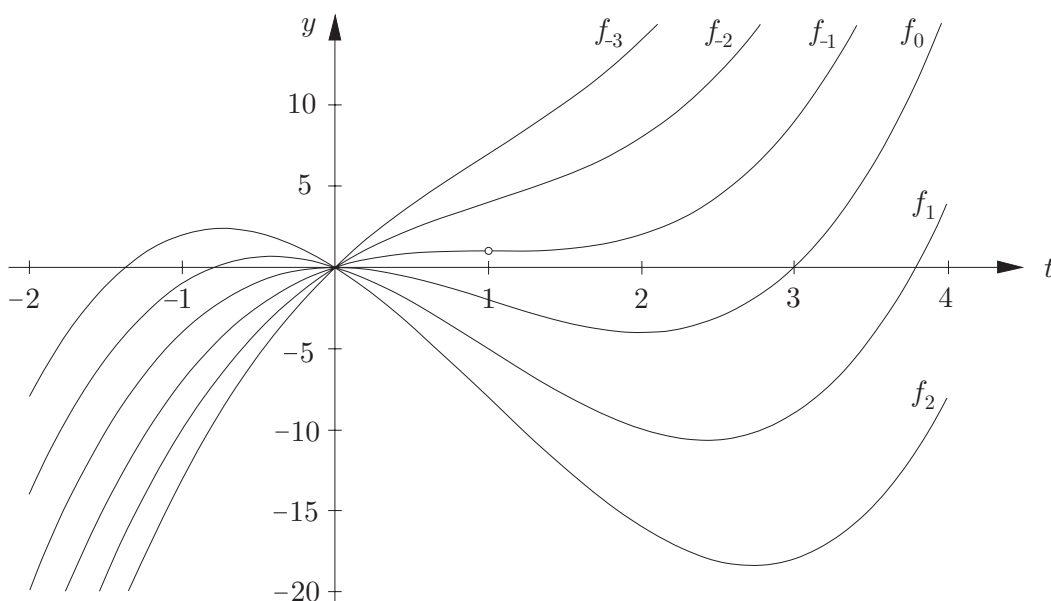


Fig. 12.3

5a In der Fig. 12.3 sind die Graphen einiger  $f_\alpha$ 's dargestellt. Man erkennt: Für  $\alpha < -1$  gibt es keine kritischen Punkte, für  $\alpha > -1$  deren zwei. Dies wird durch die Rechnung bestätigt: Die Gleichung

$$f'_\alpha(t) = 3(t^2 - 2t - \alpha) = 0$$

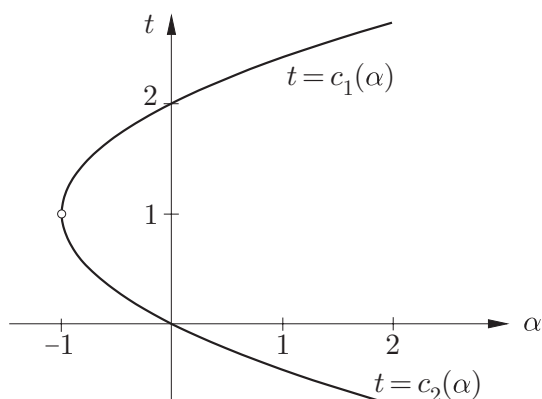


Fig. 12.4

besitzt für  $\alpha < -1$  keine reelle Lösung, für  $\alpha = -1$  genau eine Lösung und für  $\alpha > -1$  die zwei Lösungen

$$c_{1,2}(\alpha) = 1 \pm \sqrt{1 + \alpha};$$

siehe dazu die Fig. 12.4.

**b** Für festes  $\alpha_0$  geht es um die kritischen Punkte der Funktion  $f_{\alpha_0}(t) := F(t, \alpha_0)$ , das heißt, um die Nullstellen der Funktion  $f'_{\alpha_0}(t) = F_{,1}(t, \alpha_0)$ . Ist  $t_0$  ein derartiger kritischer Punkt, so gilt also  $F_{,1}(t_0, \alpha_0) = 0$ . Der Satz über implizite Funktionen garantiert in diesem Zusammenhang das Folgende: Gilt

$$F_{,11}(t_0, \alpha_0) \neq 0, \quad (3)$$

so gibt es eine in der Umgebung von  $\alpha_0$  definierte  $C^1$ -Funktion  $\alpha \mapsto c_0(\alpha)$  mit  $c_0(\alpha_0) = t_0$  und  $F_{,1}(c_0(\alpha), \alpha) \equiv 0$ . Hieraus folgt: Der Punkt  $c_0(\alpha)$  ist ein in der Nähe von  $t_0$  gelegener kritischer Punkt von  $f_\alpha$ .

Dieses Ergebnis lässt sich folgendermassen interpretieren: Ist  $t_0$  ein nicht-entarteter kritischer Punkt einer  $C^2$ -Funktion  $f$ , so bleibt dieser kritische Punkt unter kleinen Deformationen von  $f$  als isolierter kritischer Punkt erhalten.

**6** Betrachte für ein festes Punktpaar  $(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \in \tilde{\Omega}$  die Hilfsfunktion

$$\phi(t) := \mathbf{f}(\mathbf{p} + t(\mathbf{q} - \mathbf{p})) \quad (0 \leq t \leq 1).$$

Nach der Kettenregel ist  $\phi'(t) = d\mathbf{f}(\mathbf{p} + t(\mathbf{q} - \mathbf{p})) \cdot (\mathbf{q} - \mathbf{p})$  und somit

$$\mathbf{f}(\mathbf{q}) - \mathbf{f}(\mathbf{p}) = \phi(1) - \phi(0) = \int_0^1 \phi'(t) dt = \int_0^1 d\mathbf{f}(\mathbf{p} + t(\mathbf{q} - \mathbf{p})) \cdot (\mathbf{q} - \mathbf{p}) dt.$$

Hier lässt sich  $\cdot(\mathbf{q} - \mathbf{p})$  (von rechts) aus dem Integral herausziehen. Folglich hat  $L(\mathbf{p}, \mathbf{q}) := \int_0^1 d\mathbf{f}(\mathbf{p} + t(\mathbf{q} - \mathbf{p})) dt$  die behaupteten Eigenschaften.

### Abschnitt 12.7

1 Man berechnet  $\mathbf{p} = \mathbf{f}(0, 0) = (0, 1, 1)$  sowie

$$\mathbf{f}_u = (1, -\sin u, ve^{uv}), \quad \mathbf{f}_v = (\cos v, 1, ue^{uv}).$$

Die Tangentialebene  $T_{\mathbf{p}}S$  wird von den beiden Vektoren

$$\mathbf{f}_u(0, 0) = (1, 0, 0), \quad \mathbf{f}_v(0, 0) = (1, 1, 0)$$

aufgespannt. Wir verwenden  $U, V$  als Parametervariablen für  $T_{\mathbf{p}}S$  und erhalten damit die folgende Parameterdarstellung von  $T_{\mathbf{p}}S$ :

$$(U, V) \mapsto \mathbf{x}(U, V) := \mathbf{p} + U \mathbf{f}_u(0, 0) + V \mathbf{f}_v(0, 0),$$

resp. in Koordinaten:

$$(U, V) \mapsto \begin{cases} x := U + V, \\ y := 1 + V, \\ z := 1. \end{cases}$$

Die Ebene  $T_{\mathbf{p}}S$  besitzt den Normalenvektor

$$\mathbf{n} := \mathbf{f}_u(0, 0) \times \mathbf{f}_v(0, 0) = (0, 0, 1),$$

ist also parallel zu  $(x, y)$ -Ebene. Die Gleichung dieser Ebene lautet daher  $z = 1$ .

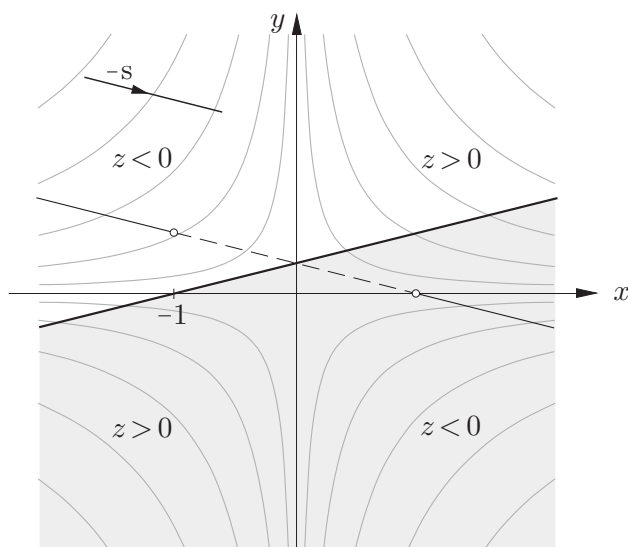


Fig. 12.5

2 Die Fig. 12.5 zeigt den Grundriss der Situation. Es sei  $\mathbf{p}_0 = (x_0, y_0, x_0y_0)$  ein beliebiger Punkt von  $S$ . Das Lichtquant, das den Punkt  $\mathbf{p}_0$  zur Zeit  $t = 0$  passiert, hat die Flugbahn

$$t \mapsto \begin{cases} x(t) = x_0 + 4t \\ y(t) = y_0 - t \\ z(t) = x_0y_0 + t \end{cases} \quad (-\infty < t < \infty);$$

dabei wird die Lichtgeschwindigkeit  $\sqrt{18}$  zugrundegelegt. Die Höhe  $h(t)$  des Lichtquants über Boden beträgt

$$\begin{aligned} h(t) &= z(t) - x(t)y(t) = (x_0y_0 + t) - (x_0y_0 + (4y_0 - x_0)t - 4t^2) \\ &= t(4t - (4y_0 - x_0 - 1)) . \end{aligned}$$

Hieraus folgt  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} h(t) = \infty$  und damit insbesondere, dass sich die Lichtquelle über dem Boden befindet. Das Lichtquant trifft die Fläche  $S$  zweimal: Einmal zur Zeit  $t_0 = 0$  an der Stelle  $\mathbf{p}_0$  und ein zweites Mal zur Zeit  $t_1 = \frac{1}{4}(4y_0 - x_0 - 1)$ . Ist  $t_1 > 0$ , so trifft das Lichtquant den Punkt  $\mathbf{p}_0$  ungestört von oben und beleuchtet ihn dabei. Ist aber  $t_1 < 0$ , so beleuchtet dieses Lichtquant nicht den Punkt  $\mathbf{p}_0$ , sondern den früher erreichten Punkt  $\mathbf{p}_1 = (x(t_1), y(t_1), z(t_1)) \in S$ . Der Punkt  $\mathbf{p}_0$  liegt dann auf der Schattenseite.

Hieraus ziehen wir den folgenden Schluss: Die Schattengrenze wird gebildet von den Punkten  $\mathbf{p} = (x, y, xy) \in S$ , für die  $4y - x - 1 = 0$  ist. Punkte nördlich der Linie  $4y - x - 1 = 0$  liegen an der Sonne, Punkte südlich dieser Linie im Schatten. Im Grundriss erscheint die Schattengrenze als Gerade; im Raum bildet sie eine Parabel  $\gamma$  mit der Parameterdarstellung

$$\gamma: \quad x \mapsto \left( x, \frac{1}{4}(1+x), \frac{x}{4}(1+x) \right) \quad (-\infty < x < \infty) .$$

In diesem einfachen Beispiel liess sich die Schattengrenze ohne Differentialrechnung bestimmen. Allgemein wird die Schattengrenze von den sogenannten Umrisspunkten gebildet. Ein Punkt  $\mathbf{p} \in S$  ist ein **Umrisspunkt** bezüglich der angegebenen Beleuchtung, wenn der durch  $\mathbf{p}$  gehende Lichtstrahl  $l_{\mathbf{p}}$  die Fläche  $S$  dort nicht durchstösst, sondern *berührt*. Somit ist dann  $l_{\mathbf{p}} \subset T_{\mathbf{p}}S$ , oder noch anders ausgedrückt:  $l_{\mathbf{p}}$  steht senkrecht auf der Flächennormalen im Punkt  $\mathbf{p}$ . Dies machen wir uns wie folgt zu Nutze: Die Fläche  $S$  unseres Beispiels besitzt die Parameterdarstellung

$$\mathbf{f}: \quad (x, y) \mapsto (x, y, xy) .$$

Hieraus folgt  $\mathbf{f}_x = (1, 0, y)$ ,  $\mathbf{f}_y = (0, 1, x)$ . Die Flächennormale im Punkt  $\mathbf{f}(x, y)$  ist damit gegeben durch  $\mathbf{n}(x, y) := \mathbf{f}_x \times \mathbf{f}_y = (-y, -x, 1)$ . Alle Lichtstrahlen sind parallel zum Vektor  $\mathbf{s} = (-4, 1, -1)$ . Wir müssen daher die Grundrisspunkte  $(x, y)$  bestimmen, für die  $\mathbf{s} \perp \mathbf{n}(x, y)$  ist. Dies führt auf die Gleichung

$$\mathbf{s} \cdot \mathbf{n}(x, y) = 0, \quad \text{d.h.} \quad 4y - x - 1 = 0,$$

wie vorher.

3 Die “Seele” unseres Möbiusbandes  $M$  wird gebildet von der Kreislinie

$$S^1 : \quad \phi \mapsto \mathbf{z}(\phi) = (\cos \phi, \sin \phi, 1) \quad (-\pi \leq \phi \leq \pi) .$$

Durch jeden Punkt  $\mathbf{z}(\phi)$  geht eine “Erzeugende”  $g_\phi$ . Die Gerade  $g_\phi$  liegt in der Meridianebene  $\arg(x, y) = \phi$  und schliesst mit der positiven  $r$ -Achse den Winkel  $\phi/2$  ein (Fig. 12.6). Auf diese Weise schraubt sich  $g_\phi$  der Seele  $S^1$  entlang und kehrt nach einem vollen Umlauf in die senkrechte Ausgangslage zurück.

In der  $(r, z)$ -Meridianebene besitzt  $g_\phi$  die Parameterdarstellung

$$g_\phi : \quad s \mapsto \begin{cases} r(s) = 1 + s \cos \frac{\phi}{2} \\ z(s) = s \sin \frac{\phi}{2} \end{cases} \quad (-\infty < s < \infty) .$$

Damit erhalten wir die folgende Parameterdarstellung von  $M$ :

$$\mathbf{f} : \quad (\phi, s) \mapsto \begin{cases} x = r(s) \cos \phi = \left(1 + s \cos \frac{\phi}{2}\right) \cos \phi \\ y = r(s) \sin \phi = \left(1 + s \cos \frac{\phi}{2}\right) \sin \phi \\ z = s \sin \frac{\phi}{2} , \end{cases}$$

wobei wir uns noch um den genauen Definitionsbereich kümmern müssen.

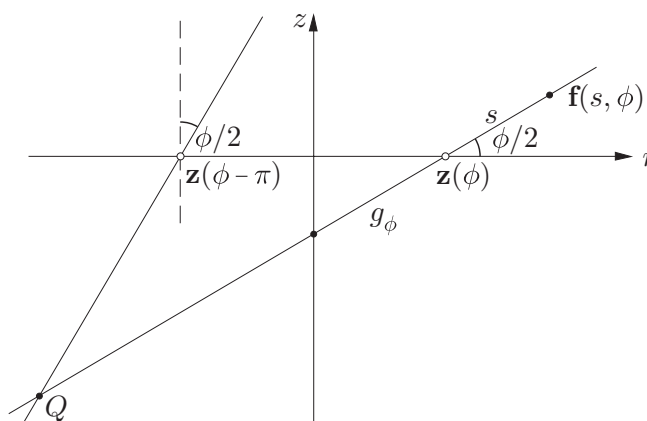


Fig. 12.6

Die Argumentvariable  $\phi$  läuft nach wie vor von  $-\pi$  bis  $\pi$ . Das Möbiusband sollte aber keine Selbstdurchdringungen aufweisen. Hierzu überlegen wir folgendermassen: Ist  $\phi - \psi \notin \{0, \pm\pi\}$ , so liegen die Erzeugenden  $g_\phi$  und

$g_\psi$  in verschiedenen Meridianebenen und können sich höchstens auf der  $z$ -Achse schneiden. Die Erzeugende  $g_\phi$  schneidet die  $z$ -Achse auf der Höhe  $z = -\tan(\phi/2)$ , und da die Funktion  $\phi \mapsto \tan(\phi/2)$  auf  $]-\pi, \pi[$  streng monoton wächst, schneidet  $g_\psi$  die  $z$ -Achse in einem andern Punkt. Ist  $\psi = \phi \pm \pi$ , so liegen  $g_\phi$  und  $g_\psi$  in derselben Meridianebene und schneiden sich in einem Punkt  $Q$ , der ausserhalb des Zylinders  $|r| = 1$  liegt (siehe die Fig. 12.6, die die Situation für  $0 < \phi < \frac{\pi}{2}$  zeigt). Alles in allem ergibt sich: Ist  $0 < b < 2$ , so garantiert die Bedingung  $-b \leq s \leq b$ , dass das durch  $\mathbf{f}$  produzierte Möbiusband  $M$  keine Selbstdruchdringungen aufweist.

4 Wir müssen die Parameterpunkte  $(u, v)$  bestimmen, für die der Vektor

$$\mathbf{f}_u(u, v) \times \mathbf{f}_v(u, v) = (2u, -1, 1) \times (2, 4v, 1) = (-1 - 4v, 2 - 2u, 8uv + 2)$$

verschwindet. Das ist für den einzigen Punkt  $(u, v) := (1, -\frac{1}{4})$  der Fall.

5 Die Fläche  $S$  ist eine Niveaufläche der Funktion  $f(\mathbf{x}) := \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \sqrt{x_3}$  mit dem Gradienten

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \left( \frac{1}{2\sqrt{x_1}}, \frac{1}{2\sqrt{x_2}}, \frac{1}{2\sqrt{x_3}} \right).$$

Die Tangentialebene im Flächenpunkt  $\mathbf{p}$  steht senkrecht auf  $\nabla f(\mathbf{p})$  und genügt daher einer Gleichung der Form  $\nabla f(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{x} = \text{const.}$  Da sie überdies durch  $\mathbf{p}$  geht, lautet diese Gleichung definitiv

$$\begin{aligned} \nabla f(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{x} &= \nabla f(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{p} = \left( \frac{1}{2\sqrt{p_1}}, \frac{1}{2\sqrt{p_2}}, \frac{1}{2\sqrt{p_3}} \right) \cdot (p_1, p_2, p_3) \\ &= \frac{1}{2} f(\mathbf{p}) = \frac{\sqrt{a}}{2}. \end{aligned}$$

Der Schnittpunkt von  $T_{\mathbf{p}}S$  mit der  $x_k$ -Achse ergibt sich aus der Bedingung

$$\nabla f(\mathbf{p}) \cdot (t\mathbf{e}_k) = \frac{t}{2\sqrt{p_k}} = \frac{\sqrt{a}}{2}.$$

Damit erhalten wir  $t_k = \sqrt{p_k} \sqrt{a}$  ( $1 \leq k \leq 3$ ) und folglich

$$s = t_1 + t_2 + t_3 = f(\mathbf{p}) \sqrt{a} = a,$$

unabhängig von  $\mathbf{p} \in S$ .

6 Die Oberfläche  $S$  des Ellipsoids  $E$  ist eine Niveauläche der Funktion

$$f(x, y, z) := (3x - z)^2 + (6y - z)^2 + z^2$$

mit dem Gradienten

$$\nabla f(\mathbf{x}) = (6(3x - z), 12(6y - z), -6x - 12y + 6z) .$$

Die Schattengrenze  $\gamma$  auf  $S$  besteht aus den Umrisspunkten bezüglich der Lichtrichtung  $\mathbf{e}_3$  (siehe die Aufgabe 3). In diesen Punkten liegt  $\mathbf{e}_3$  in  $T_{\mathbf{p}}S$  und steht damit senkrecht auf dem Normalenvektor in  $\mathbf{p}$ . Gesucht sind also die Punkte  $\mathbf{p} \in S$ , in denen die  $z$ -Komponente des Normalenvektors verschwindet. Der Normalenvektor in  $\mathbf{p}$  ist gegeben durch  $\nabla f(\mathbf{p})$ ; folglich geht es um die Punkte  $\mathbf{p} = (x, y, z) \in E$ , für die  $-6x - 12y + 6z = 0$  ist. Man kann es so ausdrücken: Die Schattengrenze  $\gamma$  ist die Schnittkurve der Ebene  $-6x - 12y + 6z = 0$  mit der Ellipsoidfläche  $S$ . In den Punkten von  $\gamma$  ist  $z = x + 2y$  und folglich

$$\begin{aligned} 36 &= (3x - z)^2 + (6y - z)^2 + z^2 = (2x - 2y)^2 + (4y - x)^2 + (x + 2y)^2 \\ &= 6x^2 - 12xy + 24y^2 . \end{aligned}$$

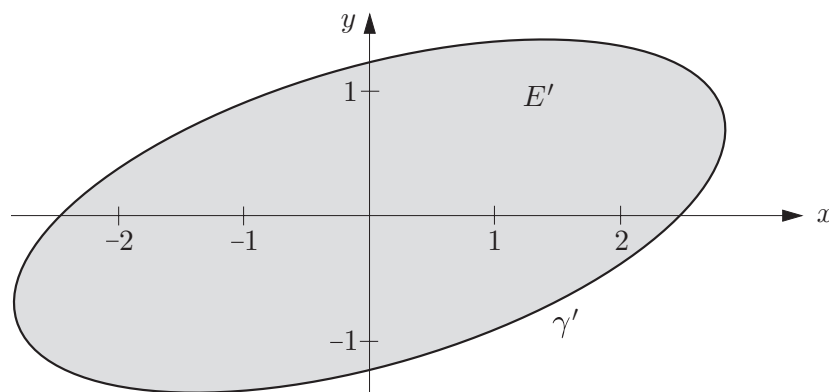


Fig. 12.7

Bei der vertikalen Projektion von  $\gamma$  in die Ebene  $z = -8$  ändert sich an diesem Zusammenhang zwischen  $x$  und  $y$  nichts. Der Schlagschatten von  $E$  in der Ebene  $z = -8$  ist daher die Ellipse  $E'$  mit der Gleichung  $x^2 - 2xy + 4y^2 \leq 6$ , siehe die Fig. 12.7.

7 Es wird auf die Fig. 12.8 verwiesen. Die Schnittkurve  $\gamma$  von  $S_1$  und  $S_2$  ist die Lösungsmenge des Gleichungssystems

$$F_1(x, y, z) := z - y^2 = 0, \quad F_2(x, y, z) := z - x^3 = 0 .$$

Eine "wurzelfreie" Parameterdarstellung von  $\gamma$  sieht folgendermassen aus:

$$\gamma: t \mapsto (t^2, t^3, t^6) \quad (-\infty < t < \infty).$$

Im Ursprung besitzt  $\gamma$  eine charakteristische Spitze. Man musste mit einer Singularität rechnen, denn die Funktionalmatrix

$$\left[ \frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(x, y, z)} \right]_{(0,0,0)} = \begin{bmatrix} 0 & -2y & 1 \\ -3x^2 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{(0,0,0)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

besitzt nur den Rang 1 statt 2.

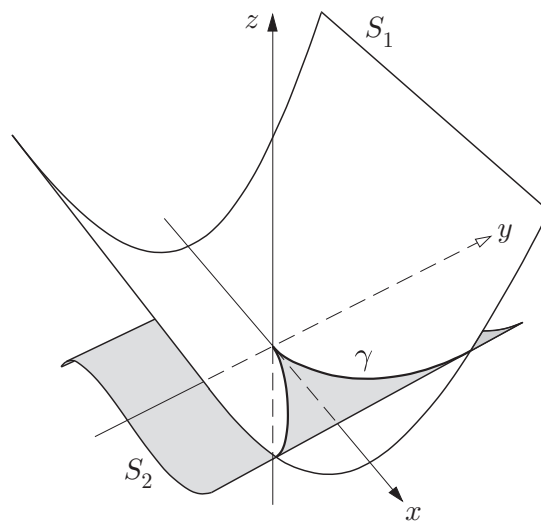


Fig. 12.8

### Abschnitt 12.8

1 Da  $f$  ungerade ist, genügt es, den Halbraum  $H: \mathbf{a} \cdot \mathbf{x} \geq 0$  zu betrachten. Hier gilt

$$0 \leq f(\mathbf{x}) \leq \frac{|\mathbf{a}| |\mathbf{x}|}{|\mathbf{x}|^2 + 1}.$$

Wegen  $\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} f(\mathbf{x}) = 0$  und da  $f$  auf  $\partial H$  verschwindet, nimmt  $f$  im Innern von  $H$  ein globales Maximum an. Mit

$$\mathbf{x} := t\mathbf{a} + \mathbf{y}, \quad t > 0, \quad \mathbf{y} \perp \mathbf{a}$$

ergibt sich

$$f(\mathbf{x}) = \frac{t|\mathbf{a}|^2}{t^2|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{y}|^2 + 1} \leq \frac{t|\mathbf{a}|^2}{t^2|\mathbf{a}|^2 + 1} = \frac{|\mathbf{a}|}{2} \frac{2}{t|\mathbf{a}| + \frac{1}{t|\mathbf{a}|}} \leq \frac{|\mathbf{a}|}{2},$$

und zwar gilt das Gleichheitszeichen genau dann, wenn  $\mathbf{y} = \mathbf{0}$  und  $t|\mathbf{a}| = 1$  ist. Der Maximalwert von  $f$  ist daher  $|\mathbf{a}|/2$ , und er wird im Punkt  $\mathbf{a}/|\mathbf{a}|$  angenommen. Entsprechend nimmt  $f$  an der Stelle  $-\mathbf{a}/|\mathbf{a}|$  den globalen Minimalwert  $-|\mathbf{a}|/2$  an.

2 Die Zahl  $a > 0$  ist das arithmetische Mittel der  $x_k$ . Für  $n = 1$  lautet die Behauptung  $x_1 x_2 \leq a^2$ , und dies trifft bekanntlich zu. Wir dürfen daher annehmen, dass die Behauptung für alle  $n' < n$  richtig ist.

Es geht jetzt um das Maximum der Funktion  $f(\mathbf{x}) := \sum_{i < k} x_i x_k$  auf der  $(n - 1)$ -dimensionalen kompakten Menge

$$K := \left\{ \mathbf{x} \mid x_k \geq 0 \ (1 \leq k \leq n), \ x_1 + x_2 + \dots + x_n = na \right\}.$$

In einem Randpunkt  $\mathbf{x}$  von  $K$  ist wenigstens ein  $x_k = 0$ . Es sei  $n' < n$  die Anzahl der  $x_k > 0$  und  $a' := na/n'$  deren arithmetisches Mittel. Nach Induktionsvoraussetzung gilt dann

$$\sum_{i < k} x_i x_k \leq \frac{n'(n' - 1)}{2} a'^2 = \frac{(n' - 1)n^2}{2n'} a^2 < \frac{(n - 1)n}{2} a^2. \quad (4)$$

Wir suchen nun nach bedingt stationären Punkten von  $f$  im “relativen Innern” von  $K$ . Hierzu betrachten wir die Prinzipalfunktion

$$\Phi(\mathbf{x}, \lambda) := \sum_{i < k} x_i x_k - \lambda(x_1 + x_2 + \dots + x_n - na)$$

und erhalten die  $n$  Gleichungen  $\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = \sum_{k \neq i} x_k - \lambda = 0$  ( $1 \leq i \leq n$ ). In

den bedingt stationären Punkten gilt demnach  $na - x_i - \lambda = 0$  für alle  $i$ ; somit haben dort alle  $x_i$  denselben Wert, nämlich  $a$ . Es gibt also genau einen bedingt stationären Punkt  $\mathbf{a} := (a, a, \dots, a)$ , und dieser liegt in  $K$ . Man berechnet

$$f(\mathbf{a}) = \frac{(n - 1)n}{2} a^2.$$

Wegen (4) ist damit erwiesen, dass  $f(\mathbf{a})$  den Maximalwert von  $f$  auf  $K$  darstellt.

Hier noch ein zweiter Beweis nach dem Motto “Cherchez la fonction convexe”: Die Funktion  $t \mapsto t^2$  ist konvex; folglich gilt  $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k^2 \geq a^2$ . Wir haben daher

$$(na)^2 = \left( \sum_{k=1}^n x_k \right)^2 = \sum_{k=1}^n x_k^2 + 2f(\mathbf{x}) \geq na^2 + 2f(\mathbf{x})$$

und damit

$$f(\mathbf{x}) \leq \frac{(n-1)n}{2} a^2,$$

wobei das Gleichheitszeichen nur für  $\mathbf{x} = \mathbf{a}$  zutrifft.

3 Die Kurve  $C$  ist ein Kegelschnitt mit einer dreizähligen Rotationssymmetrie, also ein Kreis in der Ebene  $x + y + z = 5$  mit dem Punkt  $(\frac{5}{3}, \frac{5}{3}, \frac{5}{3})$  als Zentrum. Aus Symmetriegründen gibt es mindestens 6 bedingt kritische Punkte, nämlich drei Minima und drei Maxima. Um diese Punkte zu finden, betrachten wir die Prinzipalfunktion

$$\Phi(x, y, z, \lambda, \mu) := xyz - \lambda(x + y + z - 5) - \mu(yz + zx + xy - 8)$$

und erhalten die drei Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x} &= yz - \lambda - \mu(z + y) = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} &= zx - \lambda - \mu(x + z) = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial z} &= xy - \lambda - \mu(x + y) = 0 \end{aligned} \right\} . \quad (5)$$

Werden diese drei Gleichungen addiert, so ergibt sich auf Grund der Nebenbedingungen  $8 - 3\lambda - 10\mu = 0$  und damit  $\lambda = \frac{1}{3}(8 - 10\mu)$ . Die drei Gleichungen (5) lassen sich damit folgendermassen schreiben:

$$(y - \mu)(z - \mu) = (z - \mu)(x - \mu) = (x - \mu)(y - \mu) = Q \quad (6)$$

mit

$$Q := \mu^2 - \frac{10}{3}\mu + \frac{8}{3} = (\mu - 2)\left(\mu - \frac{4}{3}\right).$$

Ist  $Q \neq 0$ , so folgt aus (6) leicht  $x - \mu = y - \mu = z - \mu$  und damit  $x = y = z$ . Auf dem Kreis  $C$  liegen aber keine derartigen Punkte.

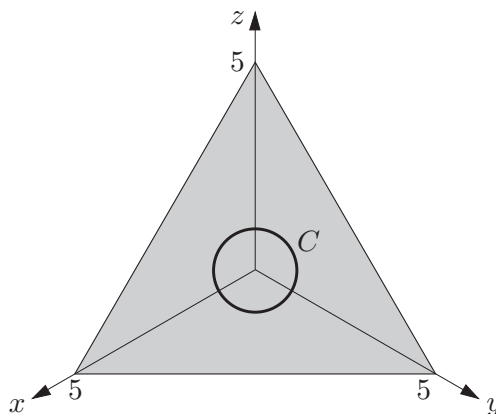


Fig. 12.9

Ist aber  $\mu = 2$ , so wird (6) durch  $y = z = 2$  und beliebiges  $x$  befriedigt. Man verifiziert leicht, dass der Punkt  $A_1 := (1, 2, 2)$  auf  $C$  liegt, und aus Symmetriegründen sind dann auch die Punkte  $A_2 = (2, 1, 2)$  und  $A_3 = (2, 2, 1)$  bedingt stationäre Punkte von  $f$  auf  $C$ . Und analog: Ist  $\mu = \frac{4}{3}$ , so wird (6) durch  $y = z = \frac{4}{3}$  und beliebiges  $x$  befriedigt. Man stellt fest, dass der Punkt  $B_1 = (\frac{7}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3})$  auf  $C$  liegt, und aus Symmetriegründen sind dann auch die Punkte  $B_2 = (\frac{4}{3}, \frac{7}{3}, \frac{4}{3})$  und  $B_3 = (\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{3})$  bedingt stationäre Punkte von  $f$  auf  $C$ .

Wegen  $f(A_1) = 4$ ,  $f(B_1) = \frac{112}{27} > 4$  sind die  $A_k$  bedingte Minima und die  $B_k$  bedingte Maxima von  $f$  auf  $C$ . — Der Kreisradius beträgt übrigens

$$\sqrt{\left(1 - \frac{5}{3}\right)^2 + \left(2 - \frac{5}{3}\right)^2 + \left(2 - \frac{5}{3}\right)^2} = \frac{1}{3} \sqrt{6}.$$

4 Das  $x$  muss von vorneherein so gewählt werden, dass die Funktion

$$y \mapsto \phi_x(y) := f(x, y)$$

nach oben beschränkt bleibt. Das ist nur für  $x^2 < 4$  der Fall. Für ein derartiges  $x$  wird der Gegner dasjenige  $y$  wählen, für das  $\phi_x(y)$  maximal wird. Man berechnet

$$\phi'_x(y) = 2(x^2 - 4)y + 2(x + 4) \stackrel{!}{=} 0$$

und erhält als optimales  $y$  den Wert

$$y_{\text{opt}}(x) = \frac{x + 4}{4 - x^2}.$$

Die Auszahlung an den Gegner beträgt in diesem Fall

$$\psi(x) := f(x, y_{\text{opt}}(x)) = \frac{(x^2 - 4)(x + 4)^2}{(4 - x^2)^2} + 2 \frac{(x + 4)^2}{4 - x^2} = \frac{(x + 4)^2}{4 - x^2}.$$

Wir müssen nun  $x \in ]-2, 2[$  so wählen, dass  $\psi(x)$  minimal wird. Man berechnet

$$\psi'(x) = \frac{(2x + 8)(4 - x^2) + 2x(x + 4)^2}{(4 - x^2)^2} = \frac{8(x^2 + 5x + 4)}{(4 - x^2)^2} \stackrel{!}{=} 0.$$

Wegen  $\lim_{x \rightarrow -2+} \psi(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} \psi(x) = \infty$  liefert der einzige in  $]-2, 2[$  gelegene kritische Punkt  $x = -1$  das Minimum. Der Gegner wird hierauf  $y_{\text{opt}}(-1) = 1$  wählen und erhält den Betrag  $\psi(-1) = 3$  ausbezahlt.

5 Wir betrachten für  $-\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$  den Pullback

$$g_\phi(u) := f(u \cos \phi, u \sin \phi) = 2u^2 + 3u \cos \phi \quad (-1 \leq u \leq 1).$$

Man berechnet

$$g'_\phi(u) = 4u + 3 \cos \phi, \quad g''_\phi(u) = 4.$$

Die Funktion  $g_\phi$  ist daher konvex und besitzt an der Stelle

$$u_\phi := -\frac{3}{4} \cos \phi \in [-1, 1]$$

ihr globales Minimum. Weiter ist  $g_\phi(\pm 1) = 2 \pm 3 \cos \phi$  und folglich  $g_\phi(1)$  das globale Maximum von  $g_\phi$  auf  $[-1, 1]$ . Damit ergibt sich

$$p(\phi) := |\Delta f|_\phi = g_\phi(1) - g_\phi(u_\phi) = 2 + 3 \cos \phi + \frac{9}{8} \cos^2 \phi \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}\right).$$

Gesucht ist nun das Maximum von  $p(\phi)$  auf dem angegebenen Intervall. Hierzu setzen wir  $\cos \phi =: t$  und betrachten anstelle von  $p(\cdot)$  die Funktion

$$q(t) := 2 + 3t + \frac{9}{8}t^2 \quad (0 \leq t \leq 1).$$

Die Funktion  $q(\cdot)$  besitzt einen kritischen Punkt  $t_0 = -\frac{4}{3} \notin [0, 1]$ ; folglich ist  $\max_{0 \leq t \leq 1} q(t) = q(1) = \frac{49}{8}$ , und dies ist auch die maximale Schwankung von  $f$  auf irgend einem Durchmesser von  $B$ .

**6a** Die Funktion  $f$  verschwindet auf dem Rand von  $B$  identisch; somit werden die globalen Extrema in kritischen Punkten im Innern von  $B$  angenommen. Wir schreiben

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{1}{2}(\cos(x - y) - \cos(x + y)) \sin(x + y) \\ &= \frac{1}{4}(\sin(2x) + \sin(2y) - \sin(2x + 2y)) \end{aligned}$$

und haben dann das Gleichungssystem

$$\left. \begin{aligned} 2f_x(x, y) &= \cos(2x) - \cos(2x + 2y) = 0 \\ 2f_y(x, y) &= \cos(2y) - \cos(2x + 2y) = 0 \end{aligned} \right\}$$

aufzulösen. Aus  $\cos(2x) = \cos(2y)$  folgt  $2x = 2y$  oder  $2x + 2y = 2\pi$  und damit (a)  $x = y$  oder (b)  $x + y = \pi$ .

Im Fall (a) haben wir weiter

$$\cos(2x) - \cos(4x) = 0.$$

Die Substitution  $\cos(2x) =: t$  liefert die Gleichung  $2t^2 - t - 1 = 0$  mit den Lösungen  $t_1 = 1$ ,  $t_2 = -\frac{1}{2}$ . Aus  $\cos(2x) = 1$  folgt  $x = 0$  oder  $x = \pi$ ; derartige

Punkte liegen aber auf  $\partial B$ . Aus  $\cos(2x) = -\frac{1}{2}$  folgt  $x = \frac{\pi}{3}$  oder  $x = \frac{2\pi}{3}$ . Damit ergeben sich die folgenden zwei kritischen Punkte im Innern von  $B$ :  $P_1 := (\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$  und  $P_2 := (\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3})$ .

Im Fall (b) haben wir weiter  $\cos(2x) - 1 = 0$  und damit  $x = 0$  oder  $x = \pi$ , so dass sich keine weiteren kritischen Punkte im Innern von  $B$  ergeben.

Der Wertvergleich  $f(P_1) = \frac{3}{8}\sqrt{3}$ ,  $f(P_2) = -\frac{3}{8}\sqrt{3}$  erweist  $P_1$  als globale Maximalstelle und  $P_2$  als globale Minimalstelle von  $f$  auf  $B$ .

**b** Der Bereich  $B$  ist der im ersten Quadranten gelegene Teil der Einheitskugel. In diesem Abschnitt besitzt der Normalenvektor von  $S^2$  lauter positive Komponenten. Der Gradient  $\nabla f(x, y, z) \equiv (1, -1, 2)$  steht somit weder senkrecht auf dem  $S^2$ -Anteil von  $\partial B$ , noch steht er senkrecht auf einer Koordinatenebene oder auf einer Koordinatenachse, und einen kritischen Punkt im Innern von  $B$  gibt es auch nicht. Folglich werden die globalen Extrema auf den drei berandenden Viertelkreisen angenommen. Wir haben also die drei Pullbacks

$$\begin{aligned} g_1(\phi) &:= f(\cos \phi, \sin \phi, 0) = \cos \phi - \sin \phi, \\ g_2(\phi) &:= f(0, \cos \phi, \sin \phi) = -\cos \phi - 2 \sin \phi, \\ g_3(\phi) &:= f(\cos \phi, 0, \sin \phi) = \cos \phi - 2 \sin \phi \end{aligned}$$

je auf dem  $\phi$ -Intervall  $]0, \frac{\pi}{2}[$  zu betrachten. Die beiden Funktionen  $g_1(\cdot)$  und  $g_3(\cdot)$  sind auf diesem Intervall streng monoton fallend; damit verbleibt die Berechnung

$$g_2'(\phi) = \sin \phi - 2 \cos \phi \stackrel{!}{=} 0$$

mit der Lösung  $\phi = \arctan 2$ . Der zugehörige Punkt  $(0, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})$  ist ein bedingt stationärer Punkt von  $f$  auf dem Viertelkreis in der  $(y, z)$ -Ebene und ist in die Kandidatenliste aufzunehmen. Diese sieht nun folgendermassen aus:

$P$	$(1, 0, 0)$	$(0, 1, 0)$	$(0, 0, 1)$	$(0, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})$
$f(P)$	1	-1	-2	$-\sqrt{5}$

Hiernach nimmt die Funktion  $f$  ihr globales Maximum im Punkt  $(1, 0, 0)$  und ihr globales Minimum im Punkt  $(0, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})$  an.

**c** Die Gleichung  $F(x, y, z) := z^3 - x^2 - y^2 = 0$  definiert eine Rotationsfläche  $S \subset \mathbb{R}^3$ , und  $B$  ist eine kompakte Teilmenge von  $S$ . Bedenkenlose Anwendung der Lagrangeschen Methode führt zu dem folgenden Rechenablauf: Man setzt die Prinzipalfunktion

$$\Phi(x, y, z, \lambda) := 3x - 4y + 15z - \lambda(z^3 - x^2 - y^2)$$

an und erhält das Gleichungssystem

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x} &= 3 + 2\lambda x = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} &= -4 + 2\lambda y = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial z} &= 15 - 3\lambda z^2 = 0 \end{aligned} \right\} .$$

Aus der dritten Gleichung folgt insbesondere  $\lambda > 0$ . Demnach können wir  $x$ ,  $y$  und  $z$  wie folgt durch  $\lambda$  ausdrücken:

$$x = -\frac{3}{2\lambda}, \quad y = \frac{4}{2\lambda}, \quad z = \sqrt{\frac{5}{\lambda}}. \quad (7)$$

Tragen wir diese Werte in die Flächengleichung ein, so ergibt sich folgende Bedingung für  $\lambda$ :

$$5^{3/2}\lambda^{-3/2} = \frac{9 + 16}{4\lambda^2} \quad \text{bzw.} \quad \sqrt{\lambda} = \frac{\sqrt{5}}{4} .$$

Damit wird  $\lambda = \frac{5}{16}$ , und mit (7) erhalten wir in der Tat einen bedingt stationären Punkt  $P$  auf  $S$ , nämlich

$$P = \left( -\frac{24}{5}, \frac{32}{5}, 4 \right) .$$

Da  $P$  ausserhalb  $B$  liegt, fällt dieser Punkt im Weiteren ausser Betracht.

Nun besitzt  $B$  den Einheitskreis

$$\gamma : \quad \phi \mapsto (\cos \phi, \sin \phi, 1) \quad (0 \leq \phi \leq 2\pi)$$

in der Ebene  $z = 1$  als Randkurve. Wir müssen daher den Pullback

$$g(\phi) := f(\cos \phi, \sin \phi, 1) = 3 \cos \phi - 4 \sin \phi + 15 \quad (0 \leq \phi \leq 2\pi)$$

betrachten. Nach einer bekannten Rechenregel ist

$$\min_{0 \leq \phi \leq 2\pi} g(\phi) = 15 - \sqrt{3^2 + 4^2} = 10, \quad \max_{0 \leq \phi \leq 2\pi} g(\phi) = 15 + \sqrt{3^2 + 4^2} = 20 .$$

Alles in allem werden wir dazu geführt, diese beiden Werte als Minimal- und Maximalwert von  $f$  auf  $B$  anzusehen. Das ist falsch.

Bei unserem Vorgehen haben wir nicht beachtet, dass die Funktion  $F$  im Ursprung nicht regulär ist. Wegen  $\nabla F(0, 0, 0) = \mathbf{0}$  wird aber ein allfälliges lokales Extremum an der Stelle  $(0, 0, 0)$  durch die Lagrangesche Methode nicht zum Vorschein gebracht. Wir müssen daher auch den Ursprung in die

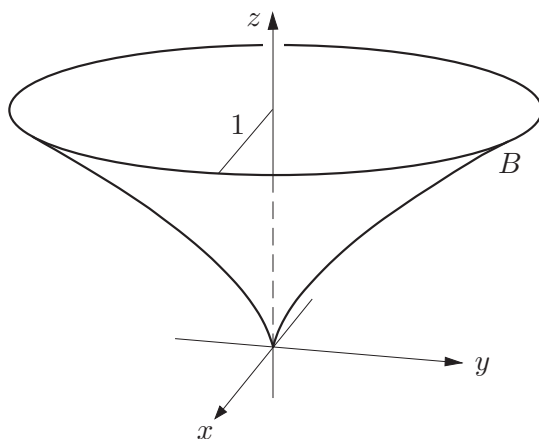


Fig. 12.10

Kandidatenliste aufnehmen und stellen fest, dass  $f(0, 0, 0) = 0$  den Minimalwert von  $f$  auf  $B$  darstellt.

(Die Fläche  $S$  besitzt übrigens im Ursprung eine Singularität; siehe die Fig. 12.10.)

7 Der erste Punkt auf der Kandidatenliste ist der einzige voll stationäre Punkt von  $f$ , nämlich  $P_1 = (0, 0)$ . Den Halbkreisbogen  $\gamma$  behandeln wir mit Hilfe der Prinzipsfunktion

$$\Phi(x, y, \lambda) := x^2 - xy + y^2 - \lambda(x^2 + y^2 - 36) .$$

Die beiden Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x} &= 2(1 - \lambda)x - y = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} &= -x + 2(1 - \lambda)y = 0 \end{aligned} \right\}$$

besitzen nur dann eine Lösung  $(x, y) \neq (0, 0)$ , wenn die Determinante

$$4(1 - \lambda)^2 - 1 = 0$$

ist, und das heisst: für  $\lambda = \frac{1}{2}$  und  $\lambda = \frac{3}{2}$ . Im ersten Fall ergibt sich weiter  $x = y$  und im zweiten  $x = -y$ . Damit erhalten wir die beiden bedingt stationären Punkte  $P_2 = (3\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$  und  $P_3 = (-3\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$  auf  $\gamma$ .

Die Vertikale  $x = -6$  behandeln wir mit Hilfe des Pullbacks

$$g(y) := f(-6, y) = y^2 + 6y + 36 \quad (-6 < y < 0)$$

mit der Ableitung  $g'(y) = 2y + 6$ . Damit erhalten wir den weiteren bedingt stationären Punkt  $P_4 = (-6, -3)$ . Schliesslich noch die Schräge  $y = (x-6)/2$ . Hier haben wir den Pullback

$$h(x) := f(x, (x-6)/2) = x^2 - x \frac{x-6}{2} + \frac{(x-6)^2}{4} = \frac{3}{4}x^2 + 9,$$

der den letzten bedingt stationären Punkt  $P_5 = (0, -3)$  liefert. Zusammen mit den drei Punkten  $P_6 = (-6, -6)$ ,  $P_7 = (-6, 0)$  und  $P_8 = (6, 0)$  erhalten wir damit die folgende Kandidatenliste, samt Wertangaben:

$P$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	$P_6$	$P_7$	$P_8$
$f(P)$	0	18	54	27	9	36	36	36

Das globale Minimum von  $f$  auf  $K$  ist somit 0 und wird im Ursprung angenommen; das globale Maximum ist 54 und wird im Punkt  $(-3\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$  angenommen.

**8a** Da die Funktion  $t \mapsto t^2$  auf  $\mathbb{R}_{\geq 0}$  streng monoton wächst, ist  $d_{\mathbf{a}}(\cdot)$  in den gleichen Punkten lokal extremal wie die Funktion  $g(\cdot)$ . Ist  $g(\cdot)$  an der Stelle  $\mathbf{p} \in S$  lokal extremal bezüglich  $S$ , so steht  $\nabla g(\mathbf{p})$  senkrecht auf  $T_{\mathbf{p}}S$ . Wegen  $\nabla g(\mathbf{x}) = 2(\mathbf{x} - \mathbf{a})$  steht daher  $\mathbf{p} - \mathbf{a}$  senkrecht auf  $T_{\mathbf{p}}S$ .

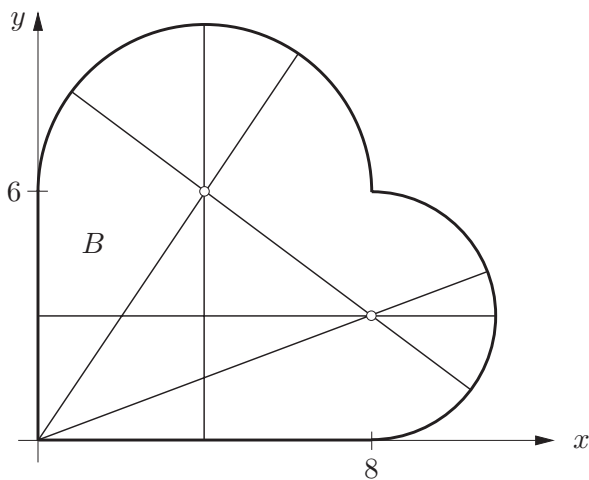


Fig. 12.11

**b** Man muss nur die Längen der in Fig. 12.11 eingezeichneten Strecken untereinander vergleichen. Die längste geht durch die beiden Kreismittelpunkte und hat die Länge 12. Somit ist  $\text{diam}(B) = 12$ .

## Lösungen zu Kapitel 13

### Abschnitt 13.1

1 Es sei  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{x}_n = \mathbf{a}$ . Zu vorgegebenem  $\varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon < 1$ , gibt es ein  $N$  mit  $|\mathbf{x}_n - \mathbf{a}| < \frac{\varepsilon}{2}$  für alle  $n \geq N$ . Ein offener Würfel  $W_N$  der Seitenlänge  $\varepsilon$  mit Zentrum  $\mathbf{a}$  überdeckt daher alle  $\mathbf{x}_n$  mit  $n \geq N$ . Weiter gibt es  $N$  offene Würfel  $W_k$  ( $0 \leq k < N$ ) vom Volumen  $\varepsilon/N$ , die je den Punkt  $\mathbf{x}_k$  überdecken. Dann gilt  $\mathbf{x}(\mathbb{N}) \subset \bigcup_{k=0}^N W_k$ , und das Gesamtvolumen aller  $W_k$  lässt sich wie folgt abschätzen:

$$\sum_{k=1}^N \mu(W_k) = N \cdot \frac{\varepsilon}{N} + \varepsilon^n \leq 2\varepsilon.$$

2 Die nach  $r$  Schritten verbleibende Restmenge  $C_r$  besteht aus  $2^r$  Intervallen der Länge  $3^{-r}$ . Jedes dieser Intervalle lässt sich mit einem offenen Intervall  $W_k$  der Länge  $2 \cdot 3^{-r}$  überdecken. Zu vorgegebenem  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $r$  mit  $2 \cdot (2/3)^r < \varepsilon$ . Folglich gilt dann  $C \subset C_r \subset \bigcup_{k=1}^{2^r} W_k$ , und es ist  $\sum_{k=1}^{2^r} \mu(W_k) = 2^r \cdot 2 \cdot 3^{-r} < \varepsilon$ .

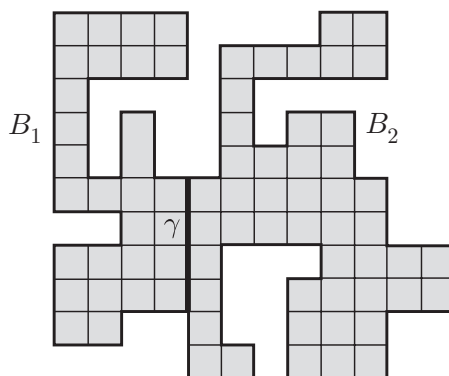


Fig. 13.1

3 Besteht  $B$  aus einem einzigen Gitterquadrat, so trifft die angegebene Formel zu. Es sei jetzt  $n := \mu(B) \geq 2$ , und die Formel sei richtig für alle derartigen Bereiche mit kleinerem Flächeninhalt. Es gibt eine im Innern von  $B$  verlaufende Quadratkante. Diese Kante werde nun auf beiden Seiten verlängert zu einem Kantenzug  $\gamma$  der Länge  $l$ , der zwei Randpunkte von  $B$  durchs Innere von  $B$  miteinander verbindet und so  $B$  in zwei Teilbereiche  $B_k$  ( $k = 1, 2$ ) teilt, siehe die Fig. 13.1. Der Bereich  $B_k$  habe  $i_k$  innere Punkte,

die Randlänge  $r_k$  und den Flächeninhalt  $n_k$ . Dann gilt  $i_1 + i_2 + (l - 1) = i$  sowie  $r_1 + r_2 = r + 2l$ , und nach Induktionsvoraussetzung ergibt sich

$$n = n_1 + n_2 = \sum_{k=1}^2 \left( i_k + \frac{r_k}{2} - 1 \right) = i - (l - 1) + \frac{r}{2} + l - 2 = i + \frac{r}{2} - 1,$$

wie behauptet.

### Abschnitt 13.2

1a Integrationsbereich ist die in der Fig. 13.2 links dargestellte Menge

$$B_1 := \{ (x, y) \mid -1 \leq x \leq 2, -x \leq y \leq 2 - x^2 \} .$$

Bei Vertauschung der Integrationsreihenfolge werden aus % zwei getrennte Integrale:

$$\% = \int_{-2}^1 \int_{-y}^{\sqrt{2-y}} f(x, y) dx dy + \int_1^2 \int_{-\sqrt{2-y}}^{\sqrt{2-y}} f(x, y) dx dy .$$

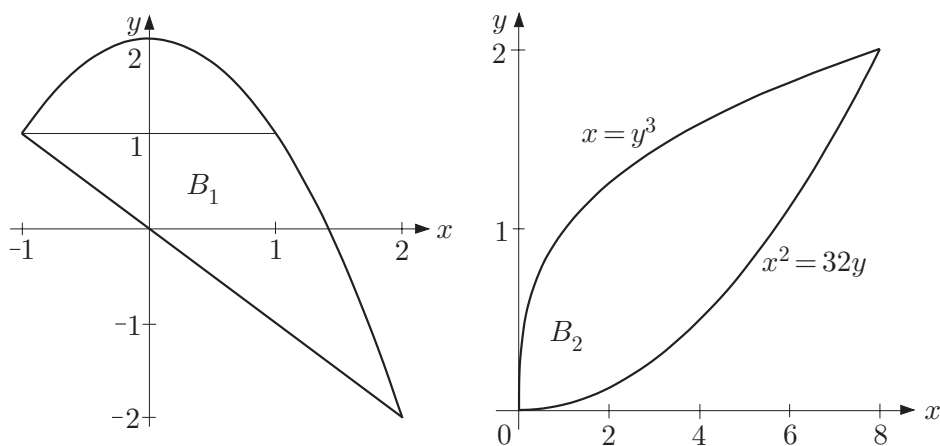


Fig. 13.2

b Integrationsbereich ist die in der Fig. 13.2 rechts dargestellte Menge

$$B_2 := \{ (x, y) \mid 0 \leq y \leq 2, y^3 \leq x \leq \sqrt{32y} \} .$$

Vertauschung der Integrationsreihenfolge liefert

$$\% = \int_0^8 \int_{x^2/32}^{\sqrt[3]{x}} f(x, y) dy dx .$$

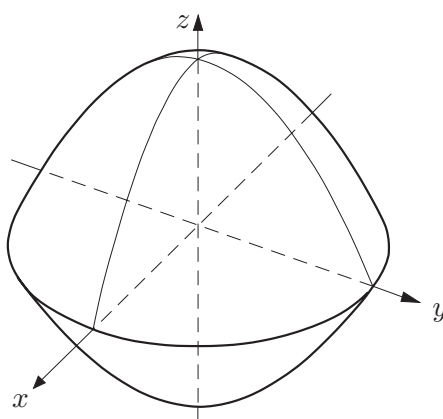


Fig. 13.3

c Die in % genannten Integrationsgrenzen beschreiben den in der Fig. 13.3 dargestellten Bereich

$$B := \{(x, y, z) \mid |z| \leq 4, |y| \leq \sqrt{4 - |z|}, |x| \leq \sqrt{4 - y^2 - |z|}\} .$$

Die drei angegebenen Ungleichungen sind äquivalent mit

$$|z| \leq 4, \quad y^2 \leq 4 - |z|, \quad x^2 \leq 4 - y^2 - |z| .$$

Aus der dritten Ungleichung folgen die beiden andern, so dass  $B$  letzten Endes durch die einzige Ungleichung  $|z| \leq 4 - x^2 - y^2$  beschrieben wird (und sich damit als Rotationskörper erweist). Diese zieht  $x^2 + y^2 \leq 4$  und damit  $-2 \leq x \leq 2$  nach sich. Wir können also  $B$  auch in der Form

$$B = \{(x, y, z) \mid -2 \leq x \leq 2, |y| \leq \sqrt{4 - x^2}, |z| \leq 4 - x^2 - y^2\}$$

darstellen und erhalten damit

$$\% = \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{-(4-x^2-y^2)}^{(4-x^2-y^2)} f(x, y, z) dz dy dx .$$

2 Man erhält ein derartiges Objekt, indem man auf dem Kreis vom Radius  $a$  einen Zylinder der Höhe  $2a$  errichtet und diesen Zylinder durch zwei ebene Schnitte zu einem nach oben weisenden Keil ansitzt. Auf diese Weise erhält man den in der Fig. 13.4 dargestellten Bereich

$$B := \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq a^2, 0 \leq z \leq 2(a - |x|)\} .$$

Für die Volumenberechnung gehen wir in der  $(x, y)$ -Ebene zu Polarkoordinaten über und erhalten

$$\begin{aligned} \mu(B) &= \int \int_{x^2+y^2 \leq a^2} 2(a-x) d\mu(x, y) = 4 \int_0^a \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (a-r \cos \phi) r d\phi dr \\ &= 4 \int_0^a (\pi a - 2r) r dr = 4 \left( \pi a \frac{a^2}{2} - \frac{2a^3}{3} \right) = \left( 2\pi - \frac{8}{3} \right) a^3 . \end{aligned}$$

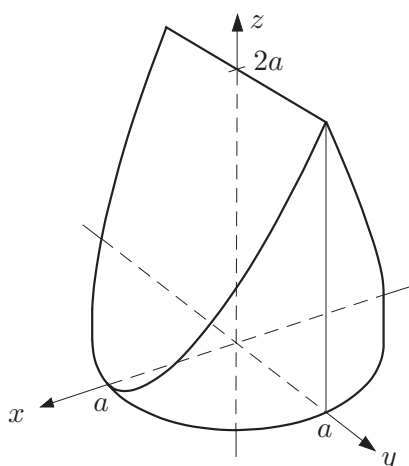


Fig. 13.4

3a Man hat

$$B := \{(x, y, z) \mid a \leq x \leq b, y^2 + z^2 \leq (f(x))^2\} .$$

Es geht daher um das Integral

$$\mu(B) = \int_B 1 \, d\mu = \int_{B'} \int_{B_x} 1 \, d\mu(y, z) \, d\mu(x)$$

mit  $B' = [a, b]$ ,  $B_x =$  Kreisscheibe vom Radius  $f(x)$ . Damit ergibt sich

$$\mu(B) = \pi \int_a^b (f(x))^2 \, dx .$$

b Wir dürfen ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $a = -b$  annehmen. Auf Grund von a geht es dann um das folgende Problem: Für welche Funktionen  $h \mapsto A(h)$  ist

$$\int_{-b}^b A(h) \, dh \equiv \frac{b}{3} (A(-b) + 4A(0) + A(b)) \quad (b \geq 0) ? \quad (1)$$

Beide Seiten der anvisierten Identität sind linear in  $A(\cdot)$ ; ferner ist (1) offensichtlich richtig für ungerade  $A(\cdot)$ . Damit sind wir bei der folgenden Frage: Für welche geraden Funktionen  $h \mapsto A(h)$  ist

$$\int_0^b A(h) \, dh \equiv \frac{b}{3} (2A(0) + A(b)) \quad (b \geq 0) ?$$

Wird diese Identität nach  $b$  differenziert, so ergibt sich die Bedingung

$$A(b) \equiv \frac{1}{3}(2A(0) + A(b)) + \frac{b}{3}A'(b)$$

und folglich

$$bA'(b) - 2A(b) \equiv -2A(0) \quad (b \geq 0) .$$

Dies ist eine inhomogene Eulersche Differentialgleichung mit der allgemeinen Lösung  $A(b) = c_2 b^2 + c_0$ ; dabei haben  $A(0) =: c_0$  gesetzt. Man verifiziert leicht, dass jedes derartige  $A(\cdot)$  die Identität (1) befriedigt.

Die zulässigen Fassprofile  $h \mapsto f(h)$  sind also von der Form

$$f(h) = \sqrt{c_0 + c_2 h^2 + u(h)} \quad (-b \leq h \leq b) ;$$

dabei bezeichnet  $u(\cdot)$  eine beliebige ungerade Funktion. Insbesondere liefert die Keplersche Fassregel den richtigen Volumenwert, wenn das Fassprofil ein Stück eines symmetrisch zur Achse gelegenen Kegelschnitts ist.

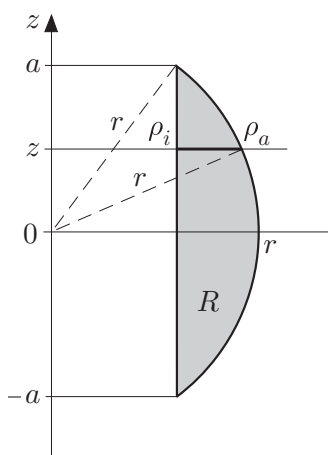


Fig. 13.5

4 Die Ausgangskugel habe den Radius  $r$ , ihr Zentrum im Ursprung, und Bohrachse sei die  $z$ -Achse. Ebenen  $z = \text{const.}$  schneiden den Restkörper  $R$  in Kreisringen  $R_z$  mit Aussenradius  $\rho_a = \sqrt{r^2 - z^2}$  und Innenradius  $\rho_i = \sqrt{r^2 - a^2}$ ; siehe die Fig. 13.5. Damit besitzt  $R_z$  den Flächeninhalt

$$\mu(R_z) = \pi(\rho_a^2 - \rho_i^2) = \pi(a^2 - z^2) \quad (-a \leq z \leq a) ,$$

und das Volumen von  $R$  ist gegeben durch

$$\text{vol}(R) = \int_{-a}^a \mu(R_z) dz = 2\pi \int_0^a (a^2 - z^2) dz = \frac{4\pi}{3} a^3 .$$

Man kann es auch so sehen: Der Flächeninhalt von  $R_z$  stimmt überein mit dem Flächeninhalt der entsprechenden Schnittmenge  $B_z$  für eine Hilfskugel  $B$  vom Radius  $a$ . Nach dem Prinzip von Cavalieri haben daher  $R$  und  $B$  dasselbe Volumen, nämlich  $4\pi a^3/3$ . Das Überraschende an dem Ergebnis ist, dass es nicht vom Radius  $r$  der Ausgangskugel abhängt.

5 Es genügt, die  $x$ -Koordinate  $\xi$  des Schwerpunkts zu bestimmen. Auf Grund der Momentengleichung ergibt sich

$$\xi = \frac{8 - \int_B x \, d\mu}{8 - \int_B d\mu}, \quad (2)$$

wobei wir die Integrale über  $W$  "im Kopf" evaluiert haben.

Der Fig. 13.5 entnimmt man die folgende Reduktion des Bereichs  $B$ :

$$B = \left\{ (x, y, z) \mid (x, y) \in B', \frac{1}{xy} \leq z \leq 2 \right\}$$

mit

$$B' = \left\{ (x, y) \mid \frac{1}{4} \leq x \leq 2, \frac{1}{2x} \leq y \leq 2 \right\}.$$

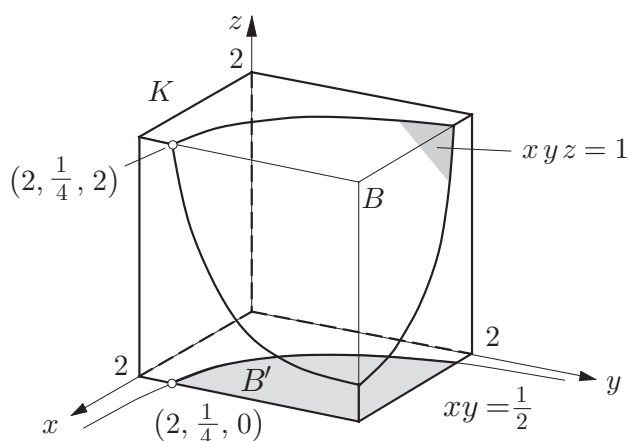


Fig. 13.6

Im Hinblick auf (2) betrachten wir jetzt für  $\sigma := 0$  und  $\sigma := 1$  das Integral

$$\begin{aligned} J_\sigma &= \int_B x^\sigma \, d\mu(x, y, z) = \int_{B'} \left( \int_{1/(xy)}^2 x^\sigma \, dz \right) d\mu(x, y) \\ &= \int_{B'} x^\sigma \left( 2 - \frac{1}{xy} \right) d\mu(x, y) \\ &= \int_{1/4}^2 x^\sigma \left( \int_{1/(2x)}^2 \left( 2 - \frac{1}{xy} \right) dy \right) dx. \end{aligned} \quad (3)$$

Für das innere Integral ( $=: \bar{J}(x)$ ) liefert Mathematica<sup>®</sup> den Wert

$$\bar{J}(x) = 4 - \frac{1}{x} - \frac{\log(4x)}{x}.$$

Tragen wir dies in (3) ein, so ergibt sich

$$J_\sigma = \int_{1/4}^2 x^\sigma \left( 4 - \frac{1}{x} - \frac{\log(4x)}{x} \right) dx$$

und weiter mit Mathematica<sup>®</sup>

$$J_0 = 7 - 3\beta - \frac{9}{2}\beta^2, \quad J_1 = \frac{63}{8} - 6\beta;$$

dabei wurde zur Abkürzung  $\log 2 =: \beta$  gesetzt. Damit sind die beiden in (2) auftretenden Integrale berechnet, und wir erhalten

$$\xi = \frac{8 - J_1}{8 - J_0} = \frac{\frac{1}{8} + 6\beta}{1 + 3\beta + \frac{9}{2}\beta^2} = 0.8173.$$

**6** Wir führen eine Reduktion mit  $p = q = 2$  durch. Für festes  $\mathbf{y} := (x_3, x_4)$  mit  $|\mathbf{y}| =: r$  ist  $B_{\mathbf{y}} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq r^2\}$  und folglich

$$\int_{B_{\mathbf{y}}} 1 d\mu(x_1, x_2) = \mu(B_{\mathbf{y}}) = \pi r^2.$$

Ferner ist  $B' = \{\mathbf{y} = (x_3, x_4) \mid 0 \leq r = |\mathbf{y}| \leq 1\}$  und folglich

$$\mu(B) = \int_{B'} \left( \int_{B_{\mathbf{y}}} 1 d\mu(x_1, x_2) \right) d\mu(\mathbf{y}) = \int_0^1 \pi r^2 \cdot 2\pi r dr = \frac{\pi^2}{2}.$$

**7a** Es sei  $A_I$  der im ersten Quadranten gelegene Teil von  $A$ . Dann ist

$$\% = 4 \int_{A_I} x^2 d\mu(x, y) = 4 \int_0^1 \left( x^2 \int_0^{1-x} dy \right) dx = 4 \int_0^1 (x^2 - x^3) dx = \frac{1}{3}.$$

**b** Man hat

$$\begin{aligned} \% &= \int_0^1 \left( z \int_0^z \left( y \int_0^y x dx \right) dy \right) dz = \int_0^1 \left( z \int_0^z \frac{y^3}{2} dy \right) dz \\ &= \int_0^1 \frac{z^5}{8} dz = \frac{1}{48}. \end{aligned}$$

c Wird für festes  $x$  nach  $y$  integriert, so erhält man als Zwischenresultat ein nichtelementares Integral. Wir probieren es daher andersherum. Für festes  $y \geq 0$  läuft  $x$  von  $-y$  bis  $y$ . Damit ergibt sich

$$\%_0 = \int_0^1 \left( e^{y^2} \int_{-y}^y dx \right) dy = \int_0^1 e^{y^2} 2y dy = e^{y^2} \Big|_0^1 = e - 1 .$$

d Die innere Integration (nach  $x$ !) liefert

$$\int_0^1 \frac{y/2}{\sqrt{1 - (xy/2)^2}} dx = \arcsin \frac{xy}{2} \Big|_{x=0}^1 = \arcsin \frac{y}{2} .$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \%_0 &= \int_0^1 \underset{\uparrow}{1} \arcsin \frac{y}{2} \underset{\downarrow}{dy} = y \arcsin \frac{y}{2} \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{y/2}{\sqrt{1 - (y/2)^2}} dy \\ &= \frac{\pi}{6} + 2\sqrt{1 - (y/2)^2} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{6} + \sqrt{3} - 2 . \end{aligned}$$

8a Wir betrachten für  $t \geq 0$  die dilatierten Simplexe

$$S_n(t) := \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq 0 \ (1 \leq i \leq n), \ x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq t \}$$

mit dem Volumen  $\alpha_n(t) := \mu(S_n(t))$ . (Natürlich ist  $\alpha_n(t) = t^n \alpha_n$ . Da uns Satz **(13.36)** noch nicht zur Verfügung steht, müssen wir das allerdings mitbeweisen.)

Es ist  $\alpha_1(t) = t$  und insbesondere  $\alpha_1 = 1$ . Für den Schluss von  $n$  auf  $n + 1$  müssen wir die Schnittfiguren

$$S_y := \{ \mathbf{x}' \in \mathbb{R}^n \mid (\mathbf{x}', y) \in S_{n+1}(t) \} \quad (0 \leq y \leq t)$$

betrachten. Wegen  $S_y = S_n(t - y)$  erhalten wir

$$\begin{aligned} \alpha_{n+1}(t) &= \int_0^t \int_{S_y} 1 d\mu(\mathbf{x}') dy = \int_0^t \mu(S_y) dy \\ &= \int_0^t \alpha_n(t - y) dy = \int_0^t \alpha_n(y) dy . \end{aligned}$$

Hieraus folgt  $\alpha'_{n+1}(t) = \alpha_n(t)$ , und mit vollständiger Induktion ergibt sich weiter  $\alpha_n(t) = t^n/n!$ , insbesondere also

$$\alpha_n = \frac{1}{n!} \quad (n \geq 1) .$$

b Wir betrachten die Funktionen

$$\beta_n(t) := \int_{S_n(t)} e^{x_1+x_2+\dots+x_n} d\mu(\mathbf{x}) .$$

Für  $h > 0$  ist  $S_n(t) \subset S_n(t+h)$ . Nach dem Mittelwertsatz (**13.17**) gibt es daher ein  $\tau \in [t, t+h]$  mit

$$\beta_n(t+h) - \beta_n(t) = e^\tau (\mu(S_n(t+h)) - \mu(S_n(t))) = e^\tau (\alpha_n(t+h) - \alpha_n(t)) ,$$

und hieraus folgt mit  $h \rightarrow 0+$  die Relation

$$\beta'_n(t) = e^t \alpha'_n(t) . \quad (4)$$

Man berechnet  $\beta_1 = \int_0^1 e^x dx = e - 1$ . Aus (4) ergibt sich weiter

$$\beta_n = \beta_n(1) = \int_0^1 e^t \underset{\uparrow}{t^{n-1}} \underset{\downarrow}{\frac{1}{(n-1)!}} dt = e^t \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \Big|_0^1 - \int_0^1 e^t \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} dt .$$

Damit erhalten wir die Rekursionsformel

$$\beta_n = \frac{e}{(n-1)!} - \beta_{n-1} \quad (n \geq 2) ,$$

und mit vollständiger Induktion folgt hieraus leicht das Endresultat

$$\beta_n = (-1)^n \left( 1 - e \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k!} \right) \quad (n \geq 1) .$$

9 Wir müssen den folgenden Satz beweisen:

Es bezeichne  $B_R \subset \mathbb{R}^3$  die Kugel vom Radius  $R$ . Ist  $f: B_R \rightarrow \mathbb{X}$  eine stetige Funktion, die in Wirklichkeit nur von  $r := \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  abhängt, so gilt

$$\int_{B_R} f d\mu = 4\pi \int_0^R f(r) r^2 dr .$$

Hierzu betrachten wir eine beliebige Teilung des Intervalls  $[0, R]$  in Teilintervalle  $Q_k := [r_{k-1}, r_k]$  ( $1 \leq k \leq N$ ). Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung, angewandt auf die Funktion  $r \mapsto r^3$ , gibt es zu jedem  $k$  ein  $\rho_k \in Q_k$  mit  $r_k^3 - r_{k-1}^3 = 3\rho_k^2(r_k - r_{k-1})$ . Wir wählen diese  $\rho_k$  als Messpunkte und können dann folgendermassen argumentieren:

$$\begin{aligned} \int_{B_R} f d\mu &\doteq \sum_{k=1}^N f(\rho_k) \mu(B_{r_k} \setminus B_{r_{k-1}}) = \sum_{k=1}^N f(\rho_k) \frac{4\pi}{3} (r_k^3 - r_{k-1}^3) \\ &= 4\pi \sum_{k=1}^N f(\rho_k) \rho_k^2 (r_k - r_{k-1}) \doteq 4\pi \int_0^R f(r) r^2 dr . \end{aligned}$$

Da hier die mit  $\doteq$  übertünchten Fehler beliebig klein gemacht werden können, müssen die beiden Integrale denselben Wert haben.

### Abschnitt 13.3

#### 1 Die Abbildung

$$A: \mathbf{x} \mapsto x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 + x_3 \mathbf{a}_3$$

bildet das Standardsimplex  $S_3 \subset \mathbb{R}^3$  (siehe die Aufgabe 13.2.8) linear und bijektiv auf  $T$  ab. In den Kolonnen der Matrix  $[A]$  stehen gerade die drei Vektoren  $\mathbf{a}_k$ . Damit wird

$$\mu(T) = |\det(A)| \mu(S_3) = \frac{1}{6} |\varepsilon(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)|.$$

2 Es sei  $S_n \subset \mathbb{R}^n$  das reguläre  $n$ -Simplex mit Kantenlänge 1; ferner sei  $h_n$  die Höhe von  $S_n$  und  $M$  dessen Schwerpunkt.  $M$  liegt auf der Höhe  $\frac{1}{n+1} h_n$  über Grund; der Abstand von  $M$  zu den  $n+1$  Ecken beträgt daher  $\rho_n := \frac{n}{n+1} h_n$ .

Ausgehend von  $S_n$  erhält man  $S_{n+1}$ , indem man im Punkt  $M$  das Lot "in den  $\mathbb{R}^{n+1}$  hinaus" errichtet und die Höhe  $h_{n+1}$  so wählt, dass die  $n+1$  neuen Kanten die Länge 1 erhalten. Es muss also  $\rho_n^2 + h_{n+1}^2 = 1$  sein und folglich

$$n^2 h_n^2 + (n+1)^2 h_{n+1}^2 = (n+1)^2 = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Die letzte Zerlegung war ein Trick. Es folgt jetzt nämlich, dass die Hilfsgrößen

$$g_n := n^2 h_n^2 - \frac{n(n+1)}{2}$$

der Rekursion  $g_n + g_{n+1} = 0$  genügen. Wegen  $g_1 = h_1 - 1 = 0$  ergibt sich, dass alle  $g_n = 0$  sind; folglich ist

$$h_n = \sqrt{\frac{n+1}{2n}} \quad (n \geq 1).$$

Wir kommen nun zur Volumenberechnung und argumentieren wie folgt:

$$V_{n+1} := \text{vol}(S_{n+1}) = \frac{1}{n+1} \text{Grundfläche} \cdot \text{Höhe} = \frac{1}{n+1} \text{vol}(S_n) \cdot h_{n+1}.$$

Die Zahlen  $V_n$  genügen daher der Rekursionsformel

$$V_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sqrt{\frac{n+2}{2(n+1)}} V_n \quad (n \geq 1).$$

Hieraus folgt

$$\frac{V_{n+1} (n+1)! 2^{(n+1)/2}}{\sqrt{n+2}} = \frac{V_n n! 2^{n/2}}{\sqrt{n+1}} = \dots = \frac{V_1 1! 2^{1/2}}{\sqrt{2}} = 1$$

und somit

$$V_n = \frac{\sqrt{n+1}}{n! 2^{n/2}}.$$

Insbesondere ist  $V_2 = \sqrt{3}/4$ ,  $V_3 = \sqrt{2}/12$  und  $V_4 = \sqrt{5}/96$ .

### Abschnitt 13.4

#### 1 Die Abbildung

$$\mathbf{f}: (u, v) \mapsto \begin{cases} x := u(1-v) \\ y := v \end{cases}$$

bildet  $Q$  in der verlangten Weise auf  $S_2$  ab. Man berechnet

$$[d\mathbf{f}(u, v)] = \begin{bmatrix} 1-v & -u \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad J_{\mathbf{f}}(u, v) = 1-v.$$

Hieraus ergibt sich

$$\mu(S_2) = \int_{S_2} 1 d\mu(x, y) = \int_Q 1 |J_{\mathbf{f}}(u, v)| d\mu(u, v) = \int_Q (1-v) d\mu(u, v) = \frac{1}{2}.$$

2 Integriert wird über das Dreieck  $B := \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq x \leq 2\}$ . Alle Punkte von  $B$  liegen im Bereich  $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{4}$ , und für gegebenes  $\phi$  läuft  $r$  von 0 bis  $2/\cos \phi$ . Damit ergibt sich

$$\%_0 = \int_0^{\pi/4} \int_0^{2/\cos \phi} f(r) r dr d\phi.$$

3 Eine Vorüberlegung: Wir betrachten einen Kreis vom Radius  $R$  mit Mittelpunkt  $(0, c)$ ,  $c > 0$ . Mit den Bezeichnungen der Fig. 13.7, links, gilt dann für  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  die Beziehung

$$r(\theta) - r(-\theta) = r - r' = 2c \sin \theta, \quad (5)$$

unabhängig von  $R$ .

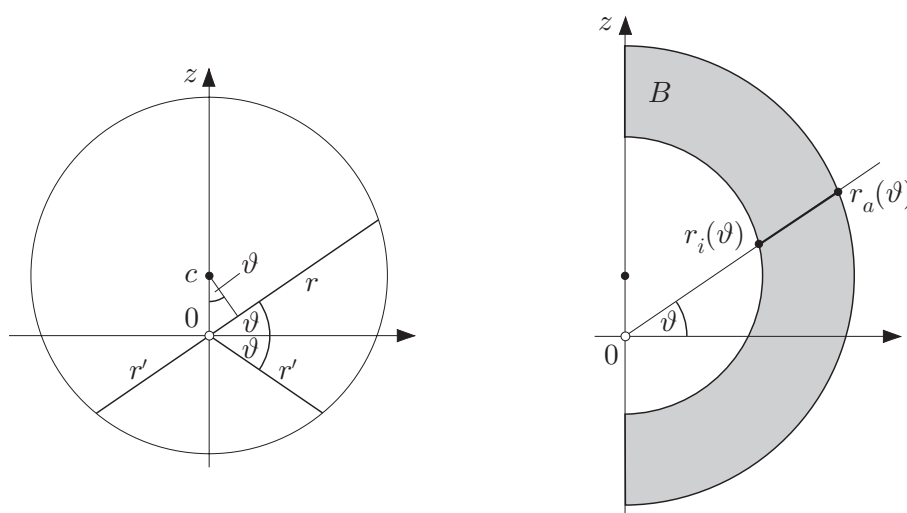


Fig. 13.7

Aus Symmetriegründen müssen wir nur die  $z$ -Komponente der auf den Massenpunkt wirkenden Gesamtkraft betrachten, also das Integral

$$K_z = \int_B \frac{\sin \theta}{r^2} d\mu(x, y, z),$$

wobei  $B$  die besagte Kugelrinde bezeichnet ( Fig. 13.7, rechts). Umrechnung auf Kugelkoordinaten macht hieraus

$$\begin{aligned} K_z &= \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{r_i(\theta)}^{r_a(\theta)} \frac{\sin \theta}{r^2} r^2 \cos \theta dr d\theta d\phi \\ &= 2\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin \theta \cos \theta (r_a(\theta) - r_i(\theta)) d\theta . \end{aligned}$$

Wir zerlegen das letzte Integral in  $\int_{-\pi/2}^0 + \int_0^{\pi/2}$  und substituieren im ersten Teilintegral  $\theta := -\theta'$ . Dieses wird dann zu

$$\int_0^{\pi/2} \sin(-\theta') \cos \theta' (r_a(-\theta') - r_i(-\theta')) d\theta' .$$

Damit erhalten wir

$$K_z = 2\pi \int_0^{\pi/2} \sin \theta \cos \theta \left( (r_a(\theta) - r_a(-\theta)) - (r_i(\theta) - r_i(-\theta)) \right) d\theta .$$

Wegen (5) hat hier die grosse Klammer den Wert  $2c \sin \theta - 2c \sin \theta \equiv 0$ , folglich ist  $K_z = 0$ , wie behauptet.

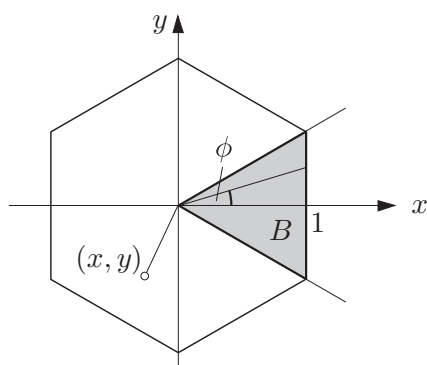


Fig. 13.8

4 Es genügt, ein Sechstel

$$B := \left\{ (x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, |\arg(x, y)| \leq \frac{\pi}{6} \right\}$$

der Stirnfläche zu betrachten (Fig.13.8). Bei einem Fräswinkel von  $45^\circ$  wird von der Faser durch den Punkt  $(x, y) \in B$  ein Stück der Länge  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  wegfräst. Das gesuchte Volumen ist daher gegeben durch

$$V = 6 \int_B \sqrt{x^2 + y^2} d\mu(x, y) = 6 \int_{-\pi/6}^{\pi/6} \int_0^{1/\cos \phi} r \cdot r dr d\phi .$$

Das innere Integral hat hier den Wert

$$\frac{r^3}{3} \Big|_0^{1/\cos \phi} = \frac{1}{3 \cos^3 \phi} = \frac{\cos \phi}{3(1 - \sin^2 \phi)^2} .$$

Damit erhält man

$$V = 2 \int_{-\pi/6}^{\pi/6} \frac{\cos \phi}{(1 - \sin^2 \phi)^2} d\phi = 2 \int_{-1/2}^{1/2} \frac{du}{(1 - u^2)^2} = \frac{4}{3} + \log 3 .$$

5 Die Abbildung

$$\mathbf{g}: (u, v) \mapsto \begin{cases} x := u^3 \\ y := v^3 \end{cases}$$

bildet den Viertelkreis  $V := \{(u, v) \mid u \geq 0, v \geq 0, u^2 + v^2 \leq a^{2/3}\}$  bijektiv auf den im ersten Quadranten gelegenen Teil  $A_I$  der Astroidenfläche  $A$  ab. Man berechnet

$$[d\mathbf{g}(u, v)] = \begin{bmatrix} 3u^2 & 0 \\ 0 & 3v^2 \end{bmatrix}, \quad J_{\mathbf{g}}(u, v) = 9u^2v^2 .$$

Damit erhält die Gesamtfläche den Wert

$$\mu(A) = 4 \int_{A_I} 1 \, d\mu(x, y) = 36 \int_V u^2 v^2 \, d\mu(u, v) .$$

Für die Integration über  $V$  führen wir in der  $(u, v)$ -Ebene Polarkoordinaten ein und erhalten dann

$$\begin{aligned} \mu(A) &= 36 \int_0^{\pi/2} \int_0^{a^{1/3}} r^4 \cos^2 \phi \sin^2 \phi \, r \, dr \, d\phi \\ &= 36 \int_0^{\pi/2} \cos^2 \phi \sin^2 \phi \, d\phi \int_0^{a^{1/3}} r^5 \, dr = \frac{3\pi}{8} a^2 . \end{aligned}$$

6 Die Abbildung

$$\mathbf{g} : (u, v) \mapsto \begin{cases} x := u^2 \\ y := v^2 \\ z = w^2 \end{cases}$$

bildet das Standardsimplex

$$S := \{(u, v, w) \mid u \geq 0, v \geq 0, w \geq 0, u + v + w \leq 1\}$$

bijektiv auf den Bereich  $B$  ab. Die Matrix  $[d\mathbf{g}(u, v, w)]$  ist diagonal; man erhält daher ohne weiteres  $J_{\mathbf{g}}(u, v, w) = 8uvw$ . Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \mu(B) &= \int_B 1 \, d\mu(x, y, z) = 8 \int_S uvw \, d\mu(u, v, w) \\ &= 8 \int_0^1 u \int_0^{1-u} v \int_0^{1-u-v} w \, dw \, dv \, du \\ &= 4 \int_0^1 u \int_0^{1-u} v(1-u-v)^2 \, dv \, du = \frac{1}{3} \int_0^1 u(1-u)^4 \, du = \frac{1}{90} . \end{aligned}$$

7 Die Beschreibung von  $B$  in Kugelkoordinaten lautet

$$B = \left\{ (r, \phi, \theta) \mid -\pi \leq \phi \leq \pi, -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq r(\phi, \theta) \right\} .$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \mu(B) &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{r(\phi, \theta)} r^2 \cos \theta \, dr \, d\phi \, d\theta \\ &= \frac{1}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \varepsilon \sin \phi \cos \theta)^3 \, d\phi \, d\theta . \end{aligned}$$

Hier ist das innere Integral aus Symmetriegründen gleich

$$\int_{-\pi}^{\pi} (1 + 3\varepsilon^2 \sin^2 \phi \cos^2 \theta) d\phi = 2\pi + 3\pi\varepsilon^2 \cos^2 \theta ,$$

so dass wir insgesamt das Folgende erhalten:

$$\begin{aligned} \mu(B) &= \frac{2\pi}{3} \int_0^{\pi/2} (2 + 3\varepsilon^2(1 - \sin^2 \theta)) \cos \theta d\theta = \frac{2\pi}{3} \int_0^1 (2 + 3\varepsilon^2(1 - t^2)) dt \\ &= \frac{4\pi}{3}(1 + \varepsilon^2) . \end{aligned}$$

**8a** Ist der Vektor  $\mathbf{a} := (a, b) \neq \mathbf{0}$ , so beschreibt die Bedingung

$$0 \leq ax + by = \mathbf{a} \cdot \mathbf{z} \leq 1$$

einen unendlichen Streifen  $S$  der Breite  $1/|\mathbf{a}|$  in der  $\mathbf{z}$ -Ebene,  $\mathbf{z} := (x, y)$ , und zwar steht die Achse von  $S$  senkrecht auf  $\mathbf{a}$ . Sind die beiden Vektoren  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{c} := (c, d) \neq \mathbf{0}$  linear abhängig, so sind die beiden zugehörigen Streifen parallel, und ihr Durchschnitt  $B$  ist eine Gerade oder gleich dem schmaleren der beiden Streifen. Jedenfalls besitzt  $B$  dann keinen interessanten Flächeninhalt.

Sind  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{c}$  linear unabhängig, so ist einerseits  $ad - bc \neq 0$ , und andererseits ist der Durchschnitt  $B$  der beiden zugehörigen Streifen ein Parallelogramm. Die lineare Abbildung

$$A: (x, y) \mapsto \begin{cases} u := ax + by \\ v := cx + dy \end{cases}$$

bildet dieses Parallelogramm bijektiv auf das Einheitsquadrat  $Q := [0, 1]^2$  ab. Folglich ist

$$1 = \mu(Q) = |\det(A)| \mu(B) ,$$

und hieraus schliesst man auf  $\mu(B) = \frac{1}{|ad - bc|}$ .

**b** Wir benötigen eine Parameterdarstellung von  $P$  mit Hilfe der Variablen  $u$  und  $v$  aus  $\mathbf{a}$ . Hierzu müssen wir das Gleichungssystem

$$x + y = u , \quad 2x - 3y = v$$

nach  $x$  und  $y$  auflösen. Es ergibt sich

$$x = \frac{1}{5}(3u + v) , \quad y = \frac{1}{5}(2u - v) .$$

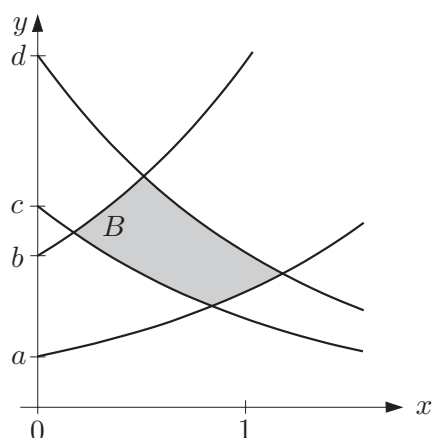


Fig. 13.9

Hiernach bildet die lineare Abbildung  $A$  mit der Matrix  $[A] = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$  das  $(u, v)$ -Rechteck  $R := [0, 1] \times [0, 4]$  bijektiv auf  $P$  ab, und wir haben

$$\int_P \sqrt{x+y} d\mu(x, y) = \int_R \sqrt{u} |\det A| d\mu(u, v) = \frac{1}{5} \int_0^1 \sqrt{u} du \int_0^4 dv = \frac{8}{15}.$$

9 Man kann die Größen

$$u := ye^{-x} \in [a, b], \quad v := ye^x \in [c, d]$$

als “krummlinige Koordinaten” in  $B$  auffassen — “krummlinig” darum, weil die Linien  $u = \text{const.}$  resp.  $v = \text{const.}$  krumme Linien, nämlich Exponentialkurven sind. Gelingt es, diese Gleichungen nach  $x$  und  $y$  aufzulösen, so erscheint  $B$  als Bild des  $(u, v)$ -Rechtecks  $R := [a, b] \times [c, d]$ . Die Rechnung liefert

$$x = \frac{1}{2}(\log v - \log u), \quad y = \sqrt{uv} \quad ((u, v) \in R)$$

und damit weiter

$$\begin{bmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2u & 1/(2v) \\ \frac{1}{2}\sqrt{v/u} & \frac{1}{2}\sqrt{u/v} \end{bmatrix}, \quad J(u, v) = -\frac{1}{2\sqrt{uv}}.$$

Wir erhalten daher

$$\mu(B) = \int_R |J(u, v)| d\mu(u, v) = \frac{1}{2} \int_a^b \frac{du}{\sqrt{u}} \int_c^d \frac{dv}{\sqrt{v}} = 2(\sqrt{b} - \sqrt{a})(\sqrt{d} - \sqrt{c}).$$

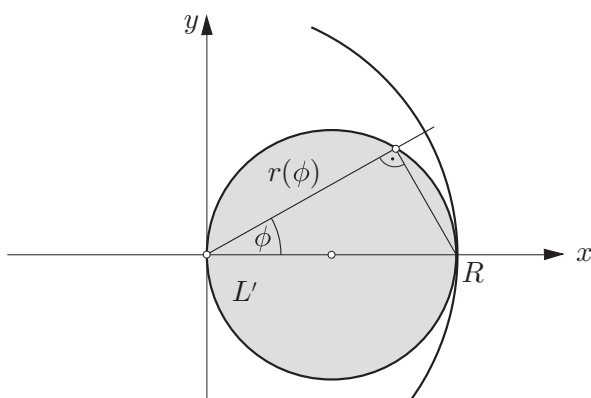


Fig. 13.10

10 Wir arbeiten mit Zylinderkoordinaten und bestimmen das Volumen eines Loches  $L$ . Mit den Bezeichnungen von Fig. 13.10 gilt  $r(\phi) = R \cos \phi$  und

$$\mu(L) = 2 \int_{L'} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} d\mu(x, y) = 4 \int_0^{\pi/2} \int_0^{r(\phi)} \sqrt{R^2 - r^2} dr d\phi.$$

Hier hat das innere Integral den Wert

$$-\frac{1}{3}(R^2 - r^2)^{3/2} \Big|_0^{r(\phi)} = \frac{1}{3}(R^3 - (R^2 - R^2 \cos^2 \phi)^{3/2}) = \frac{R^3}{3}(1 - \sin^3 \phi).$$

Damit ergibt sich

$$\mu(L) = \frac{4R^3}{3} \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^3 \phi) d\phi = \frac{4R^3}{3} \left( \frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \right).$$

Das Volumen des Restkörpers beträgt also

$$\mu(R) = \mu(B_{3,R}) - 2\mu(L) = \frac{8}{9}R^3.$$

11 Der Integrand legt nahe, Polarkoordinaten zu verwenden. Die Ellipse  $\partial B$  (Fig. 13.11) besitzt die Polardarstellung

$$r(\phi) = \frac{15}{\sqrt{25 \cos^2 \phi - 20 \cos \phi \sin \phi + 13 \sin^2 \phi}} \quad (-\pi \leq \phi \leq \pi).$$

Hieraus ergibt sich für das gesuchte Trägheitsmoment der Wert

$$T = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{r(\phi)} r^2 r dr d\phi = \frac{1}{4} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{15^4}{(25 \cos^2 \phi - 20 \cos \phi \sin \phi + 13 \sin^2 \phi)^2} d\phi$$

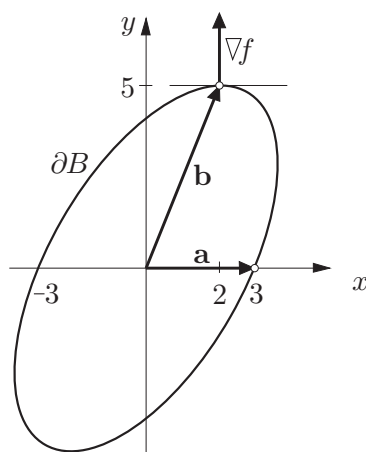


Fig. 13.11

— ein Alptraum!

Stattdessen folgen wir dem Hinweis. Die Ellipse  $\partial B$  schneidet die  $x$ -Achse in den Punkten  $\mathbf{a} := (3, 0)$  und  $-\mathbf{a}$ . In den Endpunkten des zu  $\pm\mathbf{a}$  konjugierten Durchmessers  $\pm\mathbf{b}$  sind die Ellipsentangenten parallel zur  $x$ -Achse; mithin ist dort der Gradient  $\nabla f$  der Funktion  $f(x, y) := 25x^2 - 20xy + 13y^2$  vertikal. Man berechnet  $\nabla f(x, y) = (50x - 20y, \dots)$ . Wir müssen also die Punkte  $(x, y)$  der Form  $(2t, 5t)$  bestimmen, die die Ellipsengleichung erfüllen. Einsetzen liefert  $t = \pm 1$  und damit die Punkte  $\mathbf{b} := (2, 5)$  und  $-\mathbf{b}$ . Mit Hilfe des so erhaltenen Paares von konjugierten Durchmessern können wir die folgende Parameterdarstellung von  $\partial B$  anschreiben:

$$t \mapsto \cos t \mathbf{a} + \sin t \mathbf{b} \quad (-\pi \leq t \leq \pi),$$

bzw. in Koordinaten:

$$t \mapsto \begin{cases} x(t) := 3 \cos t + 2 \sin t \\ y(t) := 5 \sin t \end{cases} \quad (-\pi \leq t \leq \pi).$$

In der Folge bildet

$$\mathbf{g}: (s, t) \mapsto \begin{cases} x := s(3 \cos t + 2 \sin t) \\ y := 5s \sin t \end{cases}$$

das  $(s, t)$ -Rechteck  $R := [0, 1] \times [-\pi, \pi]$  bijektiv auf den Bereich  $B$  ab. Man berechnet

$$\tilde{f}(s, t) := x^2 + y^2 \Big|_{(x,y):=\mathbf{g}(s,t)} = s^2(9 \cos^2 t + 12 \cos t \sin t + 29 \sin^2 t)$$

und

$$\left[ \frac{\partial(x, y)}{\partial(s, t)} \right] = \begin{bmatrix} 3 \cos t + 2 \sin t & s(-3 \sin t + 2 \cos t) \\ 5 \sin t & 5s \cos t \end{bmatrix}, \quad J_{\mathbf{g}}(s, t) = 15s.$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} T &= \int_R \tilde{f}(s, t) J_{\mathbf{g}}(s, t) d\mu(s, t) \\ &= 15 \int_0^1 s^3 ds \int_{-\pi}^{\pi} (9 \cos^2 t + 12 \cos t \sin t + 29 \sin^2 t) dt \\ &= 15 \frac{1}{4} (9 + 29) \pi = \frac{285}{2} \pi. \end{aligned}$$

### Abschnitt 13.5

1a Wir wählen das Argument  $\phi$  des Berührungspunkts als Parameter und verweisen im übrigen auf die Fig. 13.12. Die Bahnkurve des Punktes  $P$  wird dann beschrieben durch

$$\left. \begin{aligned} x(\phi) &:= 2a \cos \phi + a \cos(2\phi) \\ y(\phi) &:= 2a \sin \phi - a \sin(2\phi) \end{aligned} \right\} \quad (0 \leq \phi \leq 2\pi).$$

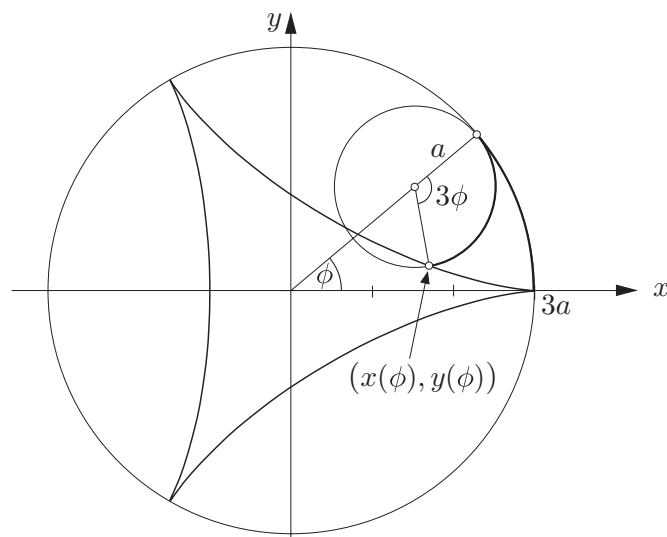


Fig. 13.12

b Man berechnet

$$\dot{x}(\phi) = a(-2 \sin \phi - 2 \sin(2\phi)) , \quad \dot{y}(\phi) = a(2 \cos \phi - 2 \cos(2\phi)) .$$

Für  $-\frac{\pi}{2} \leq \phi < 0$  ist  $\dot{x}(\phi) > 0$  und folglich

$$\arg(\dot{x}, \dot{y}) = \arctan \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = -\arctan \frac{\cos \phi - \cos(2\phi)}{\sin \phi + \sin(2\phi)} = -\frac{\phi}{2} \quad (!) .$$

Hieraus schliesst man auf

$$\lim_{\phi \rightarrow 0^-} \arg(\dot{x}(\phi), \dot{y}(\phi)) = 0 ;$$

die drei Spitzen sind also Rückkehrpunkte.

c Man berechnet weiter

$$\begin{aligned} \dot{x}^2 + \dot{y}^2 &= a^2(4 + 8 \sin \phi \sin(2\phi) - 8 \cos \phi \cos(2\phi) + 4) \\ &= 8a^2(1 - \cos(3\phi)) = 16a^2 \sin^2 \frac{3\phi}{2} \end{aligned}$$

und erhält so  $\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = 4a \left| \sin \frac{3\phi}{2} \right|$ . Damit ergibt sich schliesslich

$$L = 12a \int_0^{2\pi/3} \sin \frac{3\phi}{2} d\phi = 12a \left( -\frac{2}{3} \cos \frac{3\phi}{2} \right) \Big|_0^{2\pi/3} = 8a(1 - \cos \pi) = 16a .$$

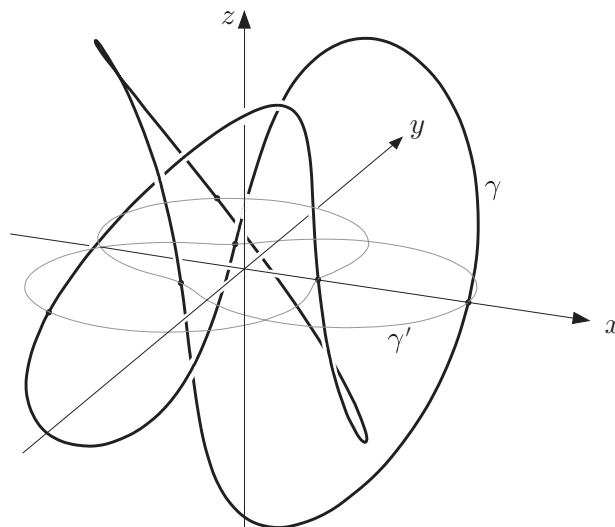


Fig. 13.13

2a Siehe die Fig. 13.13.

b Da  $t$  nichts anderes ist als der Polarwinkel  $\phi$ , gilt nach (7):

$$\begin{aligned} ds^2 &= r^2(t) + \dot{r}^2(t) + \dot{z}^2(t) = \left(2 + \cos \frac{3t}{2}\right)^2 + \frac{9}{4} \sin^2 \frac{3t}{2} + \frac{21 \cdot 9}{25 \cdot 4} \cos^2 \frac{3t}{2} \\ &= \left(\frac{5}{2} + \frac{4}{5} \cos \frac{3t}{2}\right)^2 . \end{aligned}$$

Damit erhält man

$$L(\gamma) = \int_0^{4\pi} \left(\frac{5}{2} + \frac{4}{5} \cos \frac{3t}{2}\right) dt = 10\pi .$$

3 Wir benützen die Formeln von Beispiel (7). Die Meridiankurve  $\gamma$  besitzt die Parameterdarstellung

$$\gamma : r \mapsto \begin{cases} r := r \\ z := \cosh(r-2) \end{cases} \quad (1 \leq r \leq 3) .$$

Für die zugehörige Darstellung  $(\phi, r) \mapsto \mathbf{f}(\phi, r)$  der Puddingform  $S$  ergibt sich daher mit (14):

$$|\mathbf{f}_\phi \times \mathbf{f}_r|^2 = r^2(1 + z'^2(r)) = r^2 \cosh^2(r-2) ,$$

und (15) liefert

$$\begin{aligned} \omega(S) &= 2\pi \int_1^3 \underset{\downarrow}{r} \underset{\uparrow}{\cosh(r-2)} dr = 2\pi \left( r \sinh(r-2) \Big|_1^3 - \int_1^3 \sinh(r-2) dr \right) \\ &= 2\pi (3 \sinh 1 - \sinh(-1) - \cosh 1 + \cosh(-1)) = 8\pi \sinh 1 . \end{aligned}$$

4 Wir wählen Polarkoordinaten in der  $(x, y)$ -Ebene als Flächenparameter und haben dann die folgende Parameterdarstellung von  $S$ :

$$\mathbf{f} : (r, \phi) \mapsto \begin{cases} x := r \cos \phi \\ y := r \sin \phi \\ z := r^2 \cos \phi \sin \phi \end{cases} , \quad (r, \phi) \in R := [0, 1] \times [0, 2\pi] .$$

Man berechnet

$$\mathbf{f}_r = (\cos \phi, \sin \phi, 2r \cos \phi \sin \phi) , \quad \mathbf{f}_\phi = (-r \sin \phi, r \cos \phi, r^2(\cos^2 \phi - \sin^2 \phi))$$

und weiter

$$\mathbf{f}_r \times \mathbf{f}_\phi = (-r^2 \sin \phi, -r^2 \cos \phi, r) , \quad |\mathbf{f}_r \times \mathbf{f}_\phi| = r\sqrt{1+r^2} .$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}\omega(S) &= \int_R |\mathbf{f}_r \times \mathbf{f}_\phi| d\mu(r, \phi) = 2\pi \int_0^1 r \sqrt{1+r^2} dr = 2\pi \frac{1}{3} (1+r^2)^{3/2} \Big|_0^1 \\ &= \frac{2\pi}{3} (\sqrt{8} - 1) .\end{aligned}$$

5 Wir legen die Meridiankurve

$$\gamma : t \mapsto \begin{cases} r := a \cos t \\ z := b \sin t \end{cases} \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

zugrunde und erhalten mit (14):

$$|\mathbf{f}_\phi \times \mathbf{f}_t|^2 = a^2 \cos^2 t (a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t) .$$

Damit ergibt sich weiter

$$\begin{aligned}\omega(S) &= 2\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} a \cos t \sqrt{b^2 + (a^2 - b^2) \sin^2 t} dt \\ &= 2\pi ab \int_{-1}^1 \sqrt{1 + \frac{a^2 - b^2}{b^2} u^2} du .\end{aligned} \tag{6}$$

Ab hier müssen wir die beiden Fälle I:  $a > b$  (abgeplattetes Ellipsoid) und II:  $a < b$  (Spindel) getrennt betrachten.

Im Fall I setzen wir  $\sqrt{a^2 - b^2} =: c$  und substituieren in (6)

$$u := bv/c \quad (-c/b \leq v \leq c/b) . \tag{7}$$

Es folgt

$$\begin{aligned}\omega(S) &= 2\pi ab \frac{b}{c} \int_{-c/b}^{c/b} \sqrt{1+v^2} dv = \pi ab \frac{b}{c} \left( v \sqrt{1+v^2} + \operatorname{arsinh} v \right) \Big|_{-c/b}^{c/b} \\ &= 2\pi ab \frac{b}{c} \left( \frac{ac}{b^2} + \operatorname{arsinh} \frac{c}{b} \right) = 2\pi a \left( a + b \frac{\operatorname{arsinh}(\sqrt{a^2 - b^2}/b)}{\sqrt{a^2 - b^2}/b} \right) .\end{aligned}$$

Im Fall II setzen wir  $\sqrt{b^2 - a^2} =: c$  und führen wieder die Substitution (7) durch. Es folgt

$$\begin{aligned}\omega(S) &= 2\pi ab \frac{b}{c} \int_{-c/b}^{c/b} \sqrt{1-v^2} dv = \pi ab \frac{b}{c} \left( v \sqrt{1-v^2} + \arcsin v \right) \Big|_{-c/b}^{c/b} \\ &= 2\pi ab \frac{b}{c} \left( \frac{ac}{b^2} + \arcsin \frac{c}{b} \right) = 2\pi a \left( a + b \frac{\arcsin(\sqrt{b^2 - a^2}/b)}{\sqrt{b^2 - a^2}/b} \right) .\end{aligned}$$

6a Es bezeichne  $\rho$  den Abstand des Schwerpunkts von  $B$  von der  $z$ -Achse. Die Momentengleichung besagt dann

$$\rho \int_B d\mu(r, z) = \int_B r d\mu(r, z) .$$

Hieraus folgt

$$2\pi\rho \cdot \mu(B) = \int_{B \times [0, 2\pi]} r d\mu(r, z, \phi) = \int_K 1 d\mu(x, y, z) = \text{vol}(K) .$$

b Wir benützen die Formeln von Beispiel (7). Es sei also (12) eine Parameterdarstellung der Meridiankurve  $\gamma$ , und es bezeichne  $\rho$  den Abstand des Schwerpunkts von  $\gamma$  von der  $z$ -Achse. Die Momentengleichung, angewandt auf die "Linielemente"  $ds$ , besagt dann

$$\rho \int_{\gamma} ds = \int_{\gamma} r ds ,$$

oder ausgeschrieben:

$$\rho \int_a^b \sqrt{r'^2(t) + z'^2(t)} dt = \int_a^b r(t) \sqrt{r'^2(t) + z'^2(t)} dt .$$

Hieraus folgt mit (15):

$$2\pi\rho \cdot L(\gamma) = 2\pi \int_a^b r(t) \sqrt{r'^2(t) + z'^2(t)} dt = \omega(S) .$$

c Für den in Beispiel (7) betrachteten Torus hat man  $\rho = a$ ,  $\mu(B) = \pi b^2$ ; folglich ist  $\text{vol}(K) = 2\pi^2 ab^2$ . Die Meridiankurve hat die Länge  $2\pi b$  und denselben Schwerpunktsabstand  $\rho = a$ . Somit ist  $\omega(T) = 4\pi^2 ab$ , wie vorher.

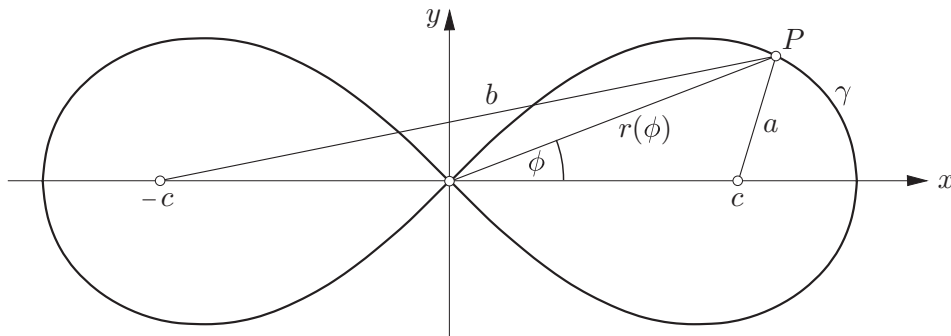


Fig. 13.14

7a Die Lemniskate ist die Menge aller Punkte  $P$  in der  $(x, y)$ -Ebene, für die das Produkt der Abstände zu den beiden Punkten  $(\pm c, 0)$  den Wert  $c^2$  hat. Der Fig. 13.14 entnimmt man

$$a^2 = r^2 + c^2 - 2rc \cos \phi, \quad b^2 = r^2 + c^2 + 2rc \cos \phi.$$

Werden diese Gleichungen miteinander multipliziert, so folgt nacheinander

$$c^4 = (r^2 + c^2)^2 - 4r^2c^2 \cos^2 \phi, \quad r^2 = 4c^2 \cos^2 \phi - 2c^2.$$

Damit erhalten wir die folgende Polardarstellung der rechten Hälfte  $\gamma$  der Lemniskate:

$$\gamma: \quad r(\phi) = c \sqrt{2 \cos(2\phi)} \quad \left( -\frac{\pi}{4} \leq \phi \leq \frac{\pi}{4} \right).$$

b Es ist  $\lim_{\phi \rightarrow \pi/4-} r(\phi) = 0$ . Wir berechnen daher

$$\lim_{\phi \rightarrow \pi/4-} \arg(r(\phi) \cos \phi, r(\phi) \sin \phi) = \lim_{\phi \rightarrow \pi/4-} \phi = \frac{\pi}{4}.$$

Die Lemniskate verlässt somit den Ursprung in Richtung der beiden Winkelhalbierenden, und diese sind dann auch Tangenten.

c Man berechnet

$$r'(\phi) = -c \frac{2 \sin(2\phi)}{\sqrt{2 \cos(2\phi)}}.$$

Damit ergibt sich

$$r^2(\phi) + r'^2(\phi) = c^2 \left( 2 \cos(2\phi) + \frac{4 \sin^2(2\phi)}{2 \cos(2\phi)} \right) = \frac{4c^2}{2 \cos(2\phi)}$$

und weiter

$$L(\gamma) = 2c \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{d\phi}{\sqrt{2 \cos(2\phi)}} = \sqrt{8} c \int_0^{\pi/4} \frac{d\phi}{\sqrt{\cos(2\phi)}}.$$

Die Substitution  $\tan \phi := t$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) macht daraus

$$L(\gamma) = \sqrt{8} c \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-t^2)/(1+t^2)}} \frac{dt}{1+t^2} = \sqrt{8} c \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}.$$

Das letzte Integral ist ein elliptisches Integral und lässt sich nicht elementar berechnen.

8 Man hat  $r'(\phi) = -\lambda \phi^{-\lambda-1}$  und somit

$$r^2(\phi) + r'^2(\phi) = \phi^{-2\lambda} + \lambda^2 \phi^{-2\lambda-2} = \frac{1}{\phi^{2\lambda}} \left( 1 + \frac{\lambda^2}{\phi^2} \right).$$

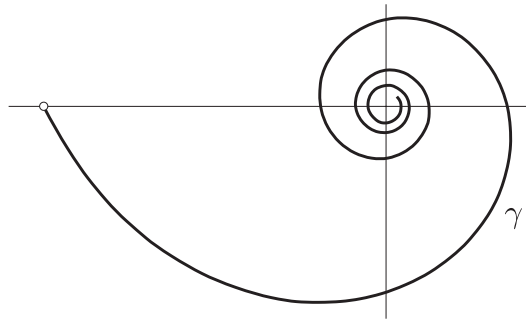


Fig. 13.15

Hieraus folgt mit (7):

$$L(\gamma) = \int_{\pi}^{\infty} \sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{\phi^2}} \frac{1}{\phi^{\lambda}} d\phi .$$

Da der Wurzelausdruck mit  $\phi \rightarrow \infty$  gegen 1 strebt, ist das uneigentliche Integral für  $0 < \lambda \leq 1$  divergent und für  $\lambda > 1$  konvergent. Die Spirale  $\gamma$  (Fig. 13.15) hat daher für  $\lambda > 1$  endliche Länge.

Ist speziell  $\lambda = 2$ , so erhält man nach einigen Substitutionen bzw. mit Hilfe von Mathematica<sup>®</sup> den Wert

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= \int_{\pi}^{\infty} \sqrt{1 + \frac{4}{\phi^2}} \frac{d\phi}{\phi^2} = \int_{\pi}^{\infty} \frac{\sqrt{\phi^2 + 4}}{\phi^3} d\phi = \dots \\ &= \frac{\sqrt{4 + \pi^2}}{2\pi^2} + \frac{1}{4} \operatorname{arsinh} \frac{2}{\pi} . \end{aligned}$$

9 Es wird auf die Fig. 13.16 verwiesen.

a Da  $B$  kompakt ist, besitzen die  $\mathbf{u}_k$  einen Häufungspunkt  $\mathbf{p} \in B$ , und nach allfälliger Siebung dürfen wir  $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{u}_k = \mathbf{p}$  annehmen. Die verbliebenen  $\mathbf{u}'_k$  besitzen ihrerseits einen Häufungspunkt  $\mathbf{q} \in B$ , und nach nochmaliger Siebung dürfen wir auch  $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{u}'_k = \mathbf{q}$  annehmen. Wegen

$$\forall k : \quad \mathbf{g}(\mathbf{u}_k, t_k) = \mathbf{g}(\mathbf{u}'_k, t'_k) \quad (8)$$

folgt

$$\mathbf{f}(\mathbf{p}) = \mathbf{g}(\mathbf{p}, 0) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{g}(\mathbf{u}_k, t_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{g}(\mathbf{u}'_k, t'_k) = \mathbf{g}(\mathbf{q}, 0) = \mathbf{f}(\mathbf{q})$$

und damit nach Voraussetzung über  $\mathbf{f}$  die Gleichheit  $\mathbf{p} = \mathbf{q}$ .

Die drei Kolonnen der Matrix  $[d\mathbf{g}(\mathbf{p}, 0)]$  sind  $\mathbf{f}_1(\mathbf{p})$ ,  $\mathbf{f}_2(\mathbf{p})$  und  $\mathbf{n}(\mathbf{p})$ ; folglich ist

$$J_{\mathbf{g}}(\mathbf{p}, 0) = \varepsilon(\mathbf{f}_1(\mathbf{p}), \mathbf{f}_2(\mathbf{p}), \mathbf{n}(\mathbf{p})) = |\mathbf{f}_1(\mathbf{p}) \times \mathbf{f}_2(\mathbf{p})| > 0 . \quad (9)$$

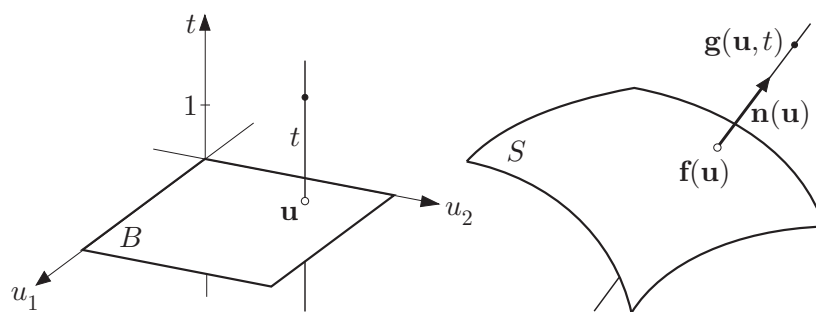


Fig. 13.16

Hiernach bildet  $\mathbf{g}$  eine ganze Umgebung von  $(\mathbf{p}, 0) \in \mathbb{R}^3$  injektiv ab, im Widerspruch zu (8).

b Auf Grund von Satz (13.36) ist das Volumen der Schale  $S_\varepsilon$  gegeben durch

$$\mu(S_\varepsilon) = \int_0^\varepsilon \int_B J_{\mathbf{g}}(\mathbf{u}, t) d\mu(\mathbf{u}) dt .$$

Hieraus folgt mit Satz (9.17) und (9):

$$\frac{d}{d\varepsilon} \mu(S_\varepsilon) \Big|_{0+} = \int_B J_{\mathbf{g}}(\mathbf{u}, 0) d\mu(\mathbf{u}) = \int_B |\mathbf{f}_{.1}(\mathbf{u}) \times \mathbf{f}_{.2}(\mathbf{u})| d\mu(\mathbf{u}) = \omega(S) .$$

10a Wir verwenden  $x, y, z$  und  $t$  als Koordinatenvariablen im  $\mathbb{R}^4$ . Die Hyperebene  $t \equiv \sin \eta$ ,  $-\frac{\pi}{2} \leq \eta \leq \frac{\pi}{2}$ , schneidet  $S^3$  in der 2-Sphäre

$$S_r^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}$$

vom Radius  $r = \sqrt{1 - t^2} = \cos \eta$ . Diese 2-Sphäre lässt sich in bekannter Weise mit den geodätischen Variablen  $\phi$  und  $\theta$  parametrisieren. Alles in allem erhalten wir die folgende Parameterdarstellung von  $S^3$ :

$$\mathbf{f} : (\phi, \theta, \eta) \mapsto \begin{cases} x := \cos \eta \cos \theta \cos \phi \\ y := \cos \eta \cos \theta \sin \phi \\ z := \cos \eta \sin \theta \\ t := \sin \eta \end{cases} ,$$

wobei der  $(\phi, \theta, \eta)$ -Quader  $Q := [-\pi, \pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  als Parameterbereich fungiert. Man berechnet

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_\phi &= \cos \eta \cos \theta (-\sin \phi, \cos \phi, 0, 0) \\ \mathbf{f}_\theta &= \cos \eta (-\sin \theta \cos \phi, -\sin \theta \sin \phi, \cos \theta, 0) \\ \mathbf{f}_\eta &= (-\sin \eta \cos \theta \cos \phi, -\sin \eta \cos \theta \sin \phi, -\sin \eta \sin \theta, \cos \eta) \end{aligned}$$

und erhält die Gram-Matrix

$$G := \begin{bmatrix} \mathbf{f}_\phi \cdot \mathbf{f}_\phi & \mathbf{f}_\phi \cdot \mathbf{f}_\theta & \mathbf{f}_\phi \cdot \mathbf{f}_\eta \\ \mathbf{f}_\theta \cdot \mathbf{f}_\phi & \mathbf{f}_\theta \cdot \mathbf{f}_\theta & \mathbf{f}_\theta \cdot \mathbf{f}_\eta \\ \mathbf{f}_\eta \cdot \mathbf{f}_\phi & \mathbf{f}_\eta \cdot \mathbf{f}_\theta & \mathbf{f}_\eta \cdot \mathbf{f}_\eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \eta \cos^2 \theta & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2 \eta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

Damit wird  $G_{\mathbf{f}}(\phi, \theta, \eta) := \det(G) = \cos^2 \theta \cos^4 \eta$ , und man erhält

$$\begin{aligned} \omega(S^3) &= \int_Q \sqrt{G_{\mathbf{f}}(\phi, \theta, \eta)} d\mu(\phi, \theta, \eta) = 2\pi \cdot \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta d\theta \cdot \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \eta d\eta \\ &= 2\pi \cdot 2 \cdot \frac{\pi}{2} = 2\pi^2 . \end{aligned}$$

*b* Nach 13.2.(10) hat das Volumen der vierdimensionalen Einheitskugel  $B_{4,1}$  den Wert  $\kappa_4 = \frac{2\pi}{4} \kappa_2 = \frac{\pi^2}{2}$ . Damit ergibt sich

$$\mu(B_{4,r}) = \frac{\pi^2}{2} r^4 .$$

Auf Grund der Überlegungen von Aufgabe 9 erhalten wir daher

$$\omega(S^3) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\mu(B_{4,1+\varepsilon} \setminus B_{4,1})}{\varepsilon} = \frac{d}{dr} \mu(B_{4,r}) \Big|_{r=1} = 2\pi^2 ,$$

wie bereits in Teil *a* gefunden.

# Lösungen zu Kapitel 14

## Abschnitt 14.1

1 Die angegebene Kreisschar geht unter Steckung von  $\mathbf{0}$  aus in sich über. Dasselbe ist dann auch für die Richtung der Feldlinien der Fall; das heisst,  $\arg \mathbf{v}$  hängt nur von  $\arg(x, y)$  ab. Der Fig. 14.1 entnimmt man

$$\arg \mathbf{v} = 2\phi + \frac{\pi}{2};$$

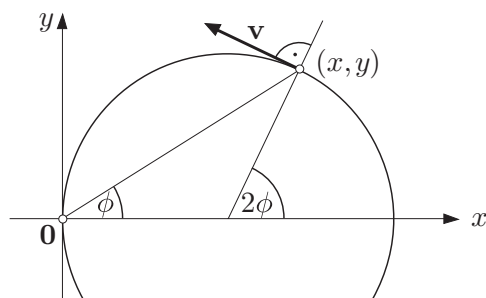


Fig. 14.1

folglich ist notwendiger Weise

$$(P(x, y), Q(x, y)) \hat{=} (-\sin(2\phi), \cos(2\phi)) \hat{=} (-2xy, x^2 - y^2),$$

wobei das Zeichen  $\hat{=}$  die Proportionalität der angegebenen Vektoren ausdrückt. Man kann den rechtsstehenden Ausdruck wie hingeschrieben als  $\mathbf{v}$  akzeptieren, kann ihn aber auch noch mit einem beliebigen Faktor  $\lambda(x, y) \neq 0$  multiplizieren, ohne an den Feldlinien etwas zu ändern. Eins gilt es jedoch zu bedenken: Das Feld besitzt im Ursprung eine Singularität, da unendlich viele Feldlinien, darunter auch winzig kleine Kreise, durch  $\mathbf{0}$  gehen. Indem wir kurzer Hand

$$\mathbf{v}(x, y) := (-2xy, x^2 - y^2)$$

setzen, bringen wir diese Singularität nicht zum Verschwinden, das Feld  $\mathbf{v}$  ist aber stetig differenzierbar.

2 Aus

$$(x(t), y(t), z(t)) := (r \cos t, r \sin t, t - h) \quad (-\infty < t < \infty)$$

folgt

$$(\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)) = (-r \sin t, r \cos t, 1) = (-y(t), x(t), 1),$$

und das bedeutet: Jede der Parameterdarstellungen % genügt dem folgenden System von Differentialgleichungen:

$$\dot{x} = -y, \quad \dot{y} = x, \quad \dot{z} = 1$$

bzw. der vektoriellen Differentialgleichung  $\dot{\mathbf{x}} = (-y, x, 1)$ . Setzt man also  $\mathbf{v}(x, y, z) := (-y, x, 1)$ , so genügen die Kurven  $\gamma_{r,h}$  der Differentialgleichung  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$  und sind damit Feldlinien des Feldes  $\mathbf{v}$ .

3 Aus  $z(t) := e^{it}$  folgt  $z'(t) = i e^{it}$ . Damit erhält man

$$\int_{\partial D} \frac{1}{z} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}} i e^{it} dt = 2\pi i .$$

Es sei jetzt  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $k \neq -1$ . Dann ist

$$\int_{\partial D} z^k dz = \int_0^{2\pi} e^{ikt} i e^{it} dt = \frac{1}{k+1} e^{i(k+1)t} \Big|_0^{2\pi} = 0 .$$

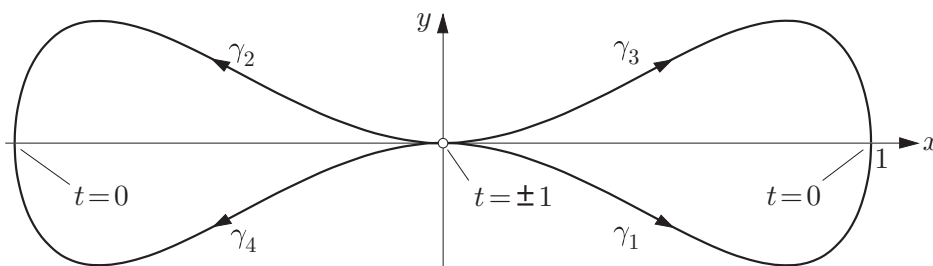


Fig. 14.2

4 Die Konstruktionsidee geht aus der Fig. 14.2 hervor. Setze hierzu

$$u(t) := 1 - t^2, \quad v(t) := t(1 - t^2)^2 \quad (-1 \leq t \leq 1)$$

und betrachte die vier Kurven

$$\begin{aligned} \gamma_1 &: t \mapsto (u(t), v(t)), & \gamma_2 &: t \mapsto (-u(t), -v(t)), \\ \gamma_3 &: t \mapsto (u(t), -v(t)), & \gamma_4 &: t \mapsto (-u(t), v(t)), \end{aligned}$$

je für  $-1 \leq t \leq 1$ . Werden diese vier Kurven in der Reihenfolge  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$  hintereinander durchlaufen, so entsteht eine geschlossene glatte Kurve  $\gamma$ , die, als Kette aufgefasst, gleich 0 ist; denn man hat  $\gamma_3 = -\gamma_1$  und  $\gamma_4 = -\gamma_2$ .

5a Wir legen die Parameterdarstellung

$$\gamma: \quad \mathbf{z}(t) = (\cos t, \sin t) \quad (0 \leq t \leq 2\pi), \quad \mathbf{z}'(t) = (-\sin t, \cos t),$$

zugrunde. Damit erhält man

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{z} &= \int_0^{2\pi} \left( (x^2(t) + y(t))x'(t) + 2x(t)y(t)y'(t) \right) dt \\ &= \int_0^{2\pi} ((\cos^2 t + \sin t)(-\sin t) + 2 \cos t \sin t \cos t) dt = -\pi . \end{aligned}$$

b Wir legen die Parameterdarstellung

$$\gamma : \quad \mathbf{z}(x) = (x, x^3) \quad (-2 \leq x \leq 1), \quad \mathbf{z}'(x) = (1, 3x^2),$$

zugrunde. Damit erhält man

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{z} &= \int_{-2}^1 \left( (x + x^3)1 + (2x - x^3)3x^2 \right) dx = \int_{-2}^1 (x + 7x^3 - 3x^5) dx \\ &= \left( \frac{x^2}{2} + \frac{7x^4}{4} - \frac{x^6}{2} \right) \Big|_{-2}^1 = \frac{15}{4} . \end{aligned}$$

c Durch Elimination von  $z$  aus den beiden angegebenen Gleichungen erhält man die Gleichung

$$2x - 4y + (7 - x^2 - y^2) = 3 \quad \text{bzw.} \quad (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9 .$$

Dies ist der längs  $\gamma$  geltende Zusammenhang zwischen  $x$  und  $y$  und somit die Gleichung des Grundrisses von  $\gamma$ . Dieser Grundriss ist ein Kreis vom Radius 3 mit Zentrum  $(1, -2)$ . Hiermit gewinnen wir die folgende Parameterdarstellung von  $\gamma$ :

$$t \mapsto \mathbf{x}(t) := (1 + 3 \cos t, -2 + 3 \sin t, z(t)) \quad (0 \leq t \leq 2\pi),$$

wobei die dritte Koordinate, wenn nötig, mit Hilfe der Ebenengleichung bestimmt werden kann. Man berechnet

$$\mathbf{x}'(t) = (-3 \sin t, 3 \cos t, z'(t))$$

und erhält damit

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{x} &= \int_0^{2\pi} \left( (2 - 3 \sin t)(-3 \sin t) + (1 + 3 \cos t)(3 \cos t) + z(t)z'(t) \right) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (9 \sin^2 t + 9 \cos^2 t) dt = 18\pi ; \end{aligned}$$

denn wegen  $z(t)z'(t) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} z^2(t)$  und  $z(0) = z(2\pi)$  liefert der dritte Summand keinen Beitrag.

### Abschnitt 14.3

1a Auf Grund von (14.14) ist

$$\begin{aligned} \%_i &= (f \nabla g)_{i+2.i+1} - (f \nabla g)_{i+1.i+2} = (f g_{i+2})_{.i+1} - (f g_{i+1})_{.i+2} \\ &= f_{.i+1} g_{i+2} - f_{.i+2} g_{i+1} = (\nabla f \times \nabla g)_i . \end{aligned}$$

Zusammengenommen ergibt sich:  $\mathbf{rot}(f \nabla g) = \nabla f \times \nabla g$ .

b Wie in a berechnet man

$$\begin{aligned} \%_i &= (f \mathbf{K})_{i+2.i+1} - (f \mathbf{K})_{i+1.i+2} = (f K_{i+2})_{.i+1} - (f K_{i+1})_{.i+2} \\ &= f_{.i+1} K_{i+2} - f_{.i+2} K_{i+1} + f(K_{i+2.i+1} - K_{i+1.i+2}) \\ &= (\nabla f \times \mathbf{K})_i + (f \mathbf{rot} \mathbf{K})_i . \end{aligned}$$

Zusammengenommen ergibt sich:  $\mathbf{rot}(f \mathbf{K}) = \nabla f \times \mathbf{K} + f \mathbf{rot} \mathbf{K}$ .

c Setzt man in a speziell  $g := f$ , so ergibt sich sofort  $\mathbf{rot}(f \nabla f) \equiv \mathbf{0}$ .

2 Der Vektor  $(-y, x)$  steht senkrecht auf  $\mathbf{z} = (x, y)$  und besitzt den Betrag  $\sqrt{x^2 + y^2} =: r$ . Felder  $\mathbf{K} = (P, Q)$ , die den Bedingungen (1) und (2) genügen, lassen sich daher in der Form

$$P(x, y) = -y f(r), \quad Q(x, y) = x f(r),$$

mit einer  $C^1$ -Skalarfunktion  $f$ , ansetzen. Man berechnet

$$\mathbf{rot} \mathbf{K} = Q_x - P_y = f(r) + x f'(r) \frac{x}{r} + f(r) + y f'(r) \frac{y}{r} = 2f(r) + r f'(r) .$$

Die allgemeine Lösung der (Eulerschen) Differentialgleichung

$$2f(r) + r f'(r) = 0$$

ist  $f(r) = C/r^2$ . Die gesuchten Felder haben daher die Gestalt

$$\mathbf{K}(x, y) = \frac{C}{r} \left( -\frac{y}{r}, \frac{x}{r} \right)$$

und stimmen bis auf einen konstanten Faktor mit dem Feld  $\mathbf{A}$  aus Beispiel ② überein.

3 Wir schreiben  $\mathbf{K}$  in der Form

$$\mathbf{K}(x, y, z) = (x^2 - y^2 - yz, 2xy + xz, x^2 + y^2 + (x + y)z) + z^2 \mathbf{H}(x, y, z) .$$

Für die Rotation in Punkten  $(x, y, 0)$  kommt es auf den "Rest"  $z^2 \mathbf{H}(x, y, z)$  gar nicht an. Die Rotation des "Hauptteils" berechnet sich zu

$$\left( (2y + z) - x, -y - (2x + z), (2y + z) - (-2y - z) \right),$$

und dies müssen wir in Punkten  $(x, y, 0)$  betrachten. Damit ergibt sich

$$\mathbf{R}_0(x, y) = (2y - x, -y - 2x, 4y).$$

#### Abschnitt 14.4

1a Mit den Bezeichnungen der Fig. 14.3, links, ist  $\partial B = -\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ . Wir verwenden die Parameterdarstellungen

$$\begin{aligned} \gamma_1 : \quad t &\mapsto (t^3, t^2) & (0 \leq t \leq 1), \\ \gamma_2 : \quad x &\mapsto (x, 0) & (0 \leq x \leq 1) \quad (\Rightarrow y = dy = 0), \\ \gamma_3 : \quad y &\mapsto (1, y) & (0 \leq y \leq 1) \quad (\Rightarrow dx = 0) \end{aligned}$$

und erhalten

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1} (xy \, dx + x^2 \, dy) &= \int_0^1 (t^5 \cdot 3t^2 + t^6 \cdot 2t) \, dt = \frac{5}{8}, \\ \int_{\gamma_2} (xy \, dx + x^2 \, dy) &= 0, \\ \int_{\gamma_3} (xy \, dx + x^2 \, dy) &= \int_0^1 1 \, dy = 1. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$\%_0 = - \int_{\gamma_1} \dots + \int_{\gamma_2} \dots + \int_{\gamma_3} \dots = \frac{3}{8}.$$

Andererseits besitzt das Feld  $\mathbf{K}(x, y) := (xy, x^2)$  die Rotation  $\text{rot } \mathbf{K}(x, y) = x$ . Mit Hilfe der Greenschen Formel ergibt sich daher

$$\%_0 = \int_B x \, d\mu(x, y) = \int_0^1 x \int_0^{x^{2/3}} dy \, dx = \int_0^1 x^{5/3} \, dx = \frac{3}{8},$$

wie vorher.

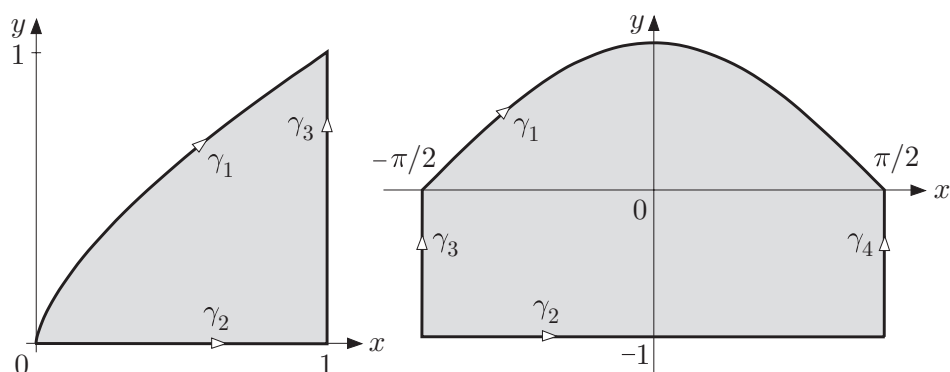


Fig. 14.3

*b* Mit den Bezeichnungen der Fig. 14.3, rechts, ist  $\partial B = -\gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3 + \gamma_4$ .  
Wir verwenden die Parameterdarstellungen

$$\begin{aligned} \gamma_1 : \quad x &\mapsto (x, \cos x) & \left(-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right), \\ \gamma_2 : \quad x &\mapsto (x, -1) & \left(-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right) \quad (\Rightarrow dy = 0), \\ \gamma_3 : \quad y &\mapsto \left(-\frac{\pi}{2}, y\right) & (-1 \leq y \leq 0) \quad (\Rightarrow dx = 0), \\ \gamma_4 : \quad y &\mapsto \left(\frac{\pi}{2}, y\right) & (-1 \leq y \leq 0) \quad (\Rightarrow dx = 0) \end{aligned}$$

und erhalten

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1} (y dx + \sin x dy) &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos x + \sin x(-\sin x)) dx = 2 - \frac{\pi}{2}, \\ \int_{\gamma_2} (y dx + \sin x dy) &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (-1) dx = -\pi, \\ \int_{\gamma_3} (y dx + \sin x dy) &= \int_{-1}^0 \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) dy = -1, \\ \int_{\gamma_4} (y dx + \sin x dy) &= \int_{-1}^0 \sin \frac{\pi}{2} dy = 1. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$\% = - \int_{\gamma_1} \dots + \int_{\gamma_2} \dots - \int_{\gamma_3} \dots + \int_{\gamma_4} \dots = -\frac{\pi}{2}.$$

Andererseits besitzt das Feld  $\mathbf{K}(x, y) := (y, \sin x)$  die Rotation  $\text{rot } \mathbf{K}(x, y) = \cos x - 1$ . Mit Hilfe der Greenschen Formel ergibt sich daher

$$\begin{aligned} \% &= \int_B (\cos x - 1) d\mu(x, y) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos x - 1) \int_{-1}^{\cos x} dy dx \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos x - 1)(\cos x + 1) dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (-\sin^2 x) dx = -\frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

wie vorher.

2 Es bezeichne  $B$  den in der Fig. 14.4.9 sichtbaren Rechtecksbereich und  $\sigma: x \mapsto (x, 0)$  ( $-1 \leq x \leq 1$ ) den Streckenweg von  $(-1, 0)$  nach  $(1, 0)$ . Dann ist  $\gamma = -\partial B + \sigma$ . Mit Hilfe der Greenschen Formel erhält man daher

$$\int_{\gamma} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{x} = - \int_{\partial B} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{x} + \int_{\sigma} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{x} = - \int_B \operatorname{rot} \mathbf{K} d\mu + \int_{\sigma} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{x}.$$

Man berechnet

$$\operatorname{rot} \mathbf{K}(x, y) = (-4x + 8y) - (-4x + 8y) \equiv 0$$

und

$$\int_{\sigma} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{x} = \int_{-1}^1 3x^2 dx = 2;$$

denn längs  $\sigma$  ist  $y = dy = 0$ . Damit ergibt sich insgesamt  $\int_{\gamma} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{x} = 2$ .

3 Der Doppelpunkt  $(0, 1)$  gehört zu den Parameterwerten  $t = \pm \frac{\pi}{2}$ ; die Kurve  $\gamma$  umläuft aber den Schlingenbereich  $B$  in der falschen Richtung (Fig. 14.3). Wir können daher folgendermassen argumentieren:

$$\begin{aligned} \mu(B) &= \int_{-\partial B} y dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(1 - \frac{\pi}{2} \cos t\right) \left(1 - \frac{\pi}{2} \cos t\right) dt \\ &= \pi - 2\pi + \frac{\pi^2}{4} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^3}{8} - \pi \doteq 0.7342. \end{aligned}$$

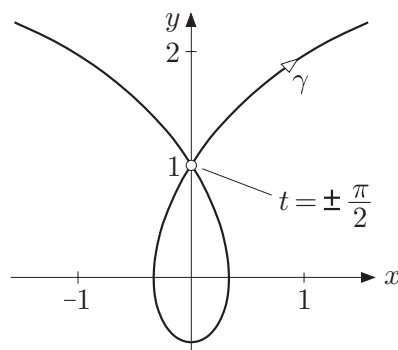


Fig. 14.4

4 Wir wählen das Argument  $\phi$  des Berührungspunkts als Parameter und verweisen im übrigen auf die Fig. 14.5. Die Bahnkurve des laufenden Punktes  $P$  wird dann beschrieben durch

$$\left. \begin{aligned} x(\phi) &:= 2 \cos \phi - \cos(2\phi) \\ y(\phi) &:= 2 \sin \phi - \sin(2\phi) \end{aligned} \right\} \quad (0 \leq \phi \leq 2\pi) .$$

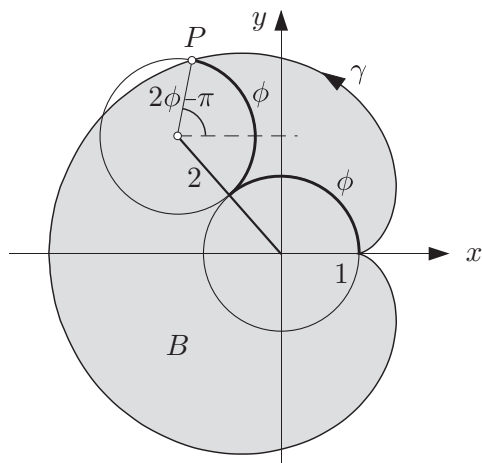


Fig. 14.5

Der von  $\gamma$  eingeschlossene Flächeninhalt berechnet sich folgendermassen:

$$\begin{aligned} \mu(B) &= \int_{\partial B} x \, dy = \int_0^{2\pi} (2 \cos \phi - \cos(2\phi)) (2 \cos \phi - 2 \cos(2\phi)) \, d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} (4 \cos^2 \phi - 6 \cos \phi \cos(2\phi) + 4 \cos^2(2\phi)) \, d\phi \\ &= 4\pi + 0 + 4\pi = 8\pi . \end{aligned}$$

5 Wir verwenden die Flächenformel  $\mu(P) = \int_{\partial P} x \, dy$ . Die von  $\mathbf{z}_{k-1}$  nach  $\mathbf{z}_k$  laufende Kante  $\sigma_k$  besitzt die Parameterdarstellung

$$\sigma_k : \quad t \mapsto (x_{k-1} + t(x_k - x_{k-1}), y_{k-1} + t(y_k - y_{k-1})) \quad (0 \leq t \leq 1) .$$

Hiernach ist

$$\begin{aligned} \int_{\sigma_k} x \, dy &= \int_0^1 (x_{k-1} + t(x_k - x_{k-1})) (y_k - y_{k-1}) \, dt \\ &= \frac{1}{2} (x_k + x_{k-1}) (y_k - y_{k-1}) . \end{aligned}$$

Bei der Summation über  $k$  hebt sich einiges heraus, und man erhält

$$\begin{aligned} \mu(B) &= \sum_{k=1}^n \int_{\sigma_k} x \, dy = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n x_k (y_k - y_{k-1}) + \frac{1}{2} \sum_{k'=0}^{n-1} x_{k'} (y_{k'+1} - y_{k'}) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n x_k (y_{k+1} - y_{k-1}) . \end{aligned}$$

6 Das Bereichsintegral  $\% := \int_B y \, d\mu$  mit Hilfe des Reduktionssatzes (**13.24**) zu berechnen, ist aussichtslos. Stattdessen verwandeln wir  $\%$  mit Hilfe der Greenschen Formel in ein Umlaufsintegral. Hierzu betrachten wir das Feld

$$\mathbf{K}(x, y) := (0, xy) ,$$

das die erwünschte Rotation  $\operatorname{rot} \mathbf{K}(x, y) = y$  besitzt. Damit ergibt sich

$$\% = \int_{\partial B} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{z} = \int_{\gamma} xy \, dy - \int_{\gamma_+} xy \, dy + \int_{\gamma_-} xy \, dy .$$

Hier ist das erste Integral rechter Hand aus Symmetriegründen gleich 0. Weiter hat man

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_{\pm}} xy \, dy &= a^3 \int_{-\infty}^0 e^{3qt} \cos^2(t \pm \frac{\pi}{2}) \sin(t \pm \frac{\pi}{2}) \, dt \\ &= \pm a^3 \int_{-\infty}^0 e^{3qt} \sin^2 t \cos t \, dt . \end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$\% = -2a^3 \int_{-\infty}^0 e^{3qt} \sin^2 t \cos t \, dt = -\frac{4a^3 q}{3(1 + 10q^2 + 9q^4)} ,$$

wobei wir für das letzte Integral Mathematica<sup>®</sup> benützt haben.

7 Es sei  $z = x + iy$ ,  $c = a + ib$ . Dann gilt

$$dz = z'(t) \, dt = (x(t) + iy(t)) \, dt = dx + i \, dy$$

und folglich

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - c} &= \int_{\gamma} \frac{(x - a) - i(y - b)}{(x - a)^2 + (y - b)^2} (dx + i \, dy) \\ &= \int_{\gamma} \left( \frac{x - a}{(x - a)^2 + (y - b)^2} dx + \frac{y - b}{(x - a)^2 + (y - b)^2} dy \right) \\ &\quad + i \int_{\gamma} \left( -\frac{y - b}{(x - a)^2 + (y - b)^2} dx + \frac{x - a}{(x - a)^2 + (y - b)^2} dy \right) . \end{aligned} \tag{1}$$

Hier lässt sich das erste Integral rechter Hand interpretieren als  $\int_{\gamma} \nabla f \cdot d\mathbf{z}$  für die Funktion  $f(x, y) := \log \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$ . Nach (14.4) hat dieses Integral automatisch den Wert 0. Das letzte Integral in (1) ist aber gerade  $\int_{\gamma} \mathbf{A}_c \cdot d\mathbf{z}$ , womit die behauptete "komplexe Formel" für die Umlaufszahl erwiesen ist.

### Abschnitt 14.5

1a Man hat  $(f \mathbf{v})_{i,i} = f_{,i} v_i + f v_{i,i}$  und folglich

$$\operatorname{div}(f \mathbf{v}) = \nabla f \cdot \mathbf{v} + f \operatorname{div} \mathbf{v} . \quad (2)$$

b Aus  $(\mathbf{K} \times \mathbf{L})_i = K_{i+1} L_{i+2} - K_{i+2} L_{i+1}$  folgt

$$(\mathbf{K} \times \mathbf{L})_{i,i} = K_{i+1,i} L_{i+2} + K_{i+1} L_{i+2,i} - K_{i+2,i} L_{i+1} - K_{i+2} L_{i+1,i} ,$$

und bei der Summation über  $i$  ergibt sich mit Hilfe geeigneter zyklischer Umindexierung die Formel

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\mathbf{K} \times \mathbf{L}) &= \sum_i (K_{i+2,i+1} - K_{i+1,i+2}) L_i - \sum_i K_i (L_{i+2,i+1} - L_{i+1,i+2}) \\ &= \operatorname{rot} \mathbf{K} \cdot \mathbf{L} - \mathbf{K} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{L} . \end{aligned}$$

c Man hat

$$(f \operatorname{rot} \mathbf{K})_{i,i} = f_{,i} (\operatorname{rot} \mathbf{K})_i + f \left( \frac{\partial^2 K_{i+2}}{\partial x_{i+1} \partial x_i} - \frac{\partial^2 K_{i+1}}{\partial x_{i+2} \partial x_i} \right) .$$

Bei der Summation über  $i$  heben sich die zweiten Ableitungen heraus, und es bleibt

$$\operatorname{div}(f \operatorname{rot} \mathbf{K}) = \nabla f \cdot \operatorname{rot} \mathbf{K} .$$

2 Es bezeichne  $d$  die Dimension des betrachteten Grundraums. Dann ist  $\operatorname{div} \mathbf{x} = d$ . Ist weiter  $f$  eine nur von  $r$  abhängige Funktion, so gilt

$$\nabla f(\mathbf{x}) = f'(r) \frac{\mathbf{x}}{r} .$$

Wir setzen die gesuchten Felder in der Form  $\mathbf{v}(\mathbf{x}) := f(r) \mathbf{x}$  an. Dann folgt aus (2) und dem eben Gesagten

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \nabla f \cdot \mathbf{x} + d f = \frac{f'(r)}{r} \cdot r^2 + d f .$$

Wenn dies identisch verschwinden soll, muss  $f$  der Differentialgleichung

$$f'(r) = -\frac{d}{r} f(r)$$

genügen, und das ist genau für die Funktionen  $f(r) = \frac{C}{r^d}$  der Fall. Die in der Aufgabenstellung erfragte Feldstärke  $\kappa(r) = r f(r)$  ist dann gegeben durch

$$\kappa(r) = \frac{C}{r^{d-1}} .$$

Ist  $d = 3$ , so muss also die Feldstärke mit dem Quadrat der Entfernung von  $\mathbf{0}$  abnehmen. Damit ist z.B. das Gravitationsfeld im Äusseren der Erdkugel als quellenfrei erwiesen.

3 Zur Vereinfachung wählen wir das Zentrum des Feldes  $\mathbf{v}$  im Ursprung und berechnen den Fluss von unten nach oben durch die Ebene  $z = 1$ . Dann ist

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \frac{C}{r^3} \cdot \frac{\mathbf{x}}{r}$$

für ein gewisses  $C$ , und die Bedingung  $\mathbf{v}(0, 0, 1) = (0, 0, 1)$  liefert definitiv

$$\mathbf{v}(x, y, z) = \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} (x, y, z) .$$

Das vektorielle Oberflächenelement ist hier natürlich gegeben durch

$$d\boldsymbol{\omega} = (0, 0, 1) d\mu(x, y) ,$$

somit ist

$$\mathbf{v}(x, y, 1) \cdot d\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{(1 + x^2 + y^2)^2} d\mu(x, y) .$$

Der gesuchte Fluss berechnet sich daher folgendermassen:

$$\begin{aligned} \Phi &= \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{v} \cdot d\boldsymbol{\omega} = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{(1 + x^2 + y^2)^2} d\mu(x, y) = \pi \int_0^\infty \frac{2r}{(1 + r^2)^2} dr \\ &= \pi \frac{-1}{1 + r^2} \Big|_0^\infty = \pi . \end{aligned}$$

4 Im vorliegenden Fall ist  $d\boldsymbol{\omega} = (0, 1, 0) d\mu(x, z)$  und folglich

$$\mathbf{v}(x, 0, z) \cdot d\boldsymbol{\omega} = (x^2 + 2z^2) d\mu(x, z) .$$

Damit ergibt sich

$$\Phi = \int_Q \mathbf{v} \cdot d\boldsymbol{\omega} = \int_Q (x^2 + 2z^2) d\mu(x, z) = 2 \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^1 + 2 \frac{2z^3}{3} \Big|_{-1}^1 = 4 .$$

### Abschnitt 14.6

1a Wir verwenden 14.5.(9) sowie die in Beispiel 12.7.④ bereitgestellten Formeln. Man hat

$$\mathbf{v}(\mathbf{f}(\phi, \theta)) \cdot (\mathbf{f}_\phi \times \mathbf{f}_\theta) = (1 - \sin \theta) \sin \theta \cos \theta .$$

Damit ergibt sich

$$\Phi = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} (1 - \sin \theta) \sin \theta \cos \theta \, d\theta \, d\phi = 2\pi \int_0^1 (u - u^2) \, du = \frac{\pi}{3} .$$

b Es bezeichne  $B$  die obere Halbkugel und  $S$  den nach unten orientierten Einheitskreis in der  $(x, y)$ -Ebene. Dann gilt nach dem Satz von Gauss

$$\int_S \mathbf{v} \cdot d\boldsymbol{\omega} + \Phi = \int_B \operatorname{div} \mathbf{v} \, d\mu$$

und folglich

$$\Phi = \int_B (-1) \, d\mu - \int_S (-1) \, d\omega = -\frac{2\pi}{3} + \pi = \frac{\pi}{3} .$$

2a Hier ist von vektorwertigen Integralen die Rede! Wir zeigen, dass sie komponentenweise übereinstimmen. Für festes  $i \in \{1, 2, 3\}$  gilt nach dem Satz von Gauss und (2):

$$\begin{aligned} \left( \int_{\partial B} f \, d\boldsymbol{\omega} \right)_i &= \int_{\partial B} f \mathbf{e}_i \cdot d\boldsymbol{\omega} = \int_B \operatorname{div}(f \mathbf{e}_i) \, d\mu = \int_B \nabla f \cdot \mathbf{e}_i \, d\mu \\ &= \left( \int_B \nabla f \, d\mu \right)_i . \end{aligned}$$

b Der mit der Tiefe zunehmende Druck  $p$  sei gegeben durch

$$p(x, y, z) := -z \quad (z \leq 0) .$$

Dann wirkt auf das Flächenelement  $d\boldsymbol{\omega}$  an der Stelle  $(x, y, z) \in \partial B$  die nach innen weisende Kraft

$$d\mathbf{K} = -p(x, y, z) \mathbf{n} \, d\omega = z \, d\boldsymbol{\omega} .$$

Die totale auf  $B$  wirkende Kraft berechnet sich daher nach a wie folgt:

$$\mathbf{K} = \int_{\partial B} z \, d\boldsymbol{\omega} = \int_B (0, 0, 1) \, d\mu = \mu(B) \mathbf{e}_3 .$$

Heureka!

3a Es bezeichne  $B_\varepsilon$  die Kugel vom Radius  $\varepsilon$  um  $\mathbf{0}$ . Dann ist  $\partial B' = \partial B - \partial B_\varepsilon$ . Im Innern von  $B'$  ist das Feld  $\mathbf{v}$  stetig differenzierbar und quellenfrei. Nach dem Satz von Gauss ist daher  $\int_{\partial B'} \mathbf{v} \cdot d\boldsymbol{\omega} = 0$  und folglich

$$\int_{\partial B} \mathbf{v} \cdot d\boldsymbol{\omega} = \int_{\partial B_\varepsilon} \mathbf{v} \cdot d\boldsymbol{\omega} = \int_{\partial B_\varepsilon} |\mathbf{v}| d\omega = \frac{1}{4\pi\varepsilon^2} \omega(\partial B_\varepsilon) = 1 .$$

b Von jeder Quelle geht ein Achtel ihrer Produktion direkt in den Würfel hinein und kommt durch die gegenüberliegenden Seitenflächen wieder heraus. Der Gesamtfluss durch die Würfeloberfläche beträgt daher  $8 \cdot \frac{1}{8} = 1$ , macht  $\frac{1}{6}$  pro Seitenfläche.

4 Aus Symmetriegründen genügt es, das Feld  $\mathbf{v}(x, y, z) := (0, 0, \gamma z)$  zu betrachten. Dieses Feld ist tangential zur  $(x, z)$ - und zur  $(y, z)$ -Ebene und verschwindet auf der  $(x, y)$ -Ebene. Der aus  $B$  heraustretende Gesamtfluss ist daher gleich dem Fluss durch den im ersten Oktanten gelegenen Teil  $S$  der Einheitskugel. Zu dessen Berechnung verwenden wir 14.5.(9) sowie die in Beispiel 12.7.(4) bereitgestellten Formeln. Man hat

$$\mathbf{v}(\mathbf{f}(\phi, \theta)) \cdot (\mathbf{f}_\phi \times \mathbf{f}_\theta) = \gamma \sin \theta \sin \theta \cos \theta .$$

Damit ergibt sich

$$\Phi = \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \gamma \sin^2 \theta \cos \theta d\theta d\phi = \frac{\pi\gamma}{2} \int_0^1 u^2 du = \frac{\pi\gamma}{6} .$$

Wird stattdessen das Feld  $\mathbf{v}(x, y, z) := (\alpha x, \beta y, \gamma z)$  zugrundegelegt, so erhält man den Gesamtfluss

$$\Phi = \frac{\pi}{6}(\alpha + \beta + \gamma) .$$

Das Feld  $\mathbf{v}$  besitzt die konstante Divergenz  $\alpha + \beta + \gamma$ . Mit Hilfe des Satzes von Gauss erhält man daher ohne Weiteres

$$\Phi = (\alpha + \beta + \gamma) \mu(B) = (\alpha + \beta + \gamma) \frac{1}{8} \frac{4\pi}{3} = \frac{\pi}{6}(\alpha + \beta + \gamma) ,$$

wie vorher.

5 Im Sinne von Satz (14.22) berechnen wir das Linienintegral des Feldes

$$*\mathbf{v}(x, y) := (-x^2 - y^2, 2xy - y^2)$$

längs  $\partial Q = \sum_{i=1}^4 \gamma_i$ , wobei  $\gamma_1$  die untere Quadratseite darstellt und die weiteren Quadratseiten im Gegenuhrzeigersinn aufeinanderfolgend nummeriert sind. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} \Phi &:= \int_{\partial Q} *\mathbf{v} \cdot d\mathbf{z} \\ &= \int_0^1 (-x^2) dx + \int_0^1 (2y - y^2) dy - \int_0^1 (-x^2 - 1) dx - \int_0^1 (-y^2) dy \\ &= -\frac{1}{3} + \left(1 - \frac{1}{3}\right) - \left(-\frac{1}{3} - 1\right) - \left(-\frac{1}{3}\right) = 2 . \end{aligned}$$

Andererseits ist  $\operatorname{div} \mathbf{v}(x, y) = 2y + 2y = 4y$ . Nach dem Satz von Gauss ist daher

$$\Phi = \int_Q 4y \, d\mu(x, y) = 4 \int_0^1 \int_0^1 y \, dy \, dx = 2,$$

wie vorher.

6 Die Funktion  $f$  ist ein homogenes quadratisches Polynom in den Koordinatenvariablen  $x_i$ . Demnach ist  $\Delta f = \operatorname{div}(\nabla f)$  eine Konstante. Da überdies das Volumen von  $B$  einfach zu berechnen ist, nehmen wir zur Berechnung des gesuchten Flusses den Satz von Gauss zu Hilfe.

Nach der Produktregel gilt

$$\nabla f(\mathbf{x}) = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{x}) \mathbf{a} + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}) \mathbf{b},$$

und hieraus folgt mit (2):

$$\Delta f = \operatorname{div}(\nabla f) = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 2 \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}.$$

Damit erhalten wir

$$\Phi = \int_B \Delta f \, d\mu = 2 \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \, \mu(B) = \frac{8}{3} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b},$$

denn  $B$  besteht aus 8 Simplexen vom Volumen  $\frac{1}{8}$ .

7a Man hat

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\omega = f \nabla g \cdot \mathbf{n} \, d\omega = f \frac{\partial g}{\partial n} \, d\omega;$$

und mit Hilfe von (2) berechnet man

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \nabla f \cdot \nabla g + f \operatorname{div}(\nabla g) = f \Delta g + \nabla f \cdot \nabla g.$$

Die Formel (I) folgt daher unmittelbar aus dem Satz von Gauss, angewandt auf  $B$  und  $\mathbf{v}$ . Betrachtet man anstelle von  $\mathbf{v}$  das Feld  $\mathbf{w} := f \nabla g - g \nabla f$ , so heben sich auf der linken Seite die beiden Terme  $\pm \nabla f \cdot \nabla g$  heraus, und es folgt (II).

b Ist  $\Delta f(\mathbf{x}) \equiv 0$  in  $B$  und  $f(\mathbf{x}) \equiv 0$  auf  $\partial B$ , so folgt aus (I) mit  $g := f$  die Beziehung

$$\int_B |\nabla f(\mathbf{x})|^2 \, d\mu(\mathbf{x}) = 0.$$

Hiernach ist  $\nabla f(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{0}$  auf  $B$ . Nach (12.18) ist daher  $f$  auf jeder Zusammenhangskomponente von  $B$  konstant, und aus Stetigkeitsgründen kann dieser konstante Wert nur 0 sein.

Abschnitt 14.7

1a Es sei

$$\sigma : y \mapsto (1 - y, y, 0) \quad (0 \leq y \leq 1)$$

die in der  $(x, y)$ -Ebene liegende Teilstrecke von  $\gamma$ . Dann ist

$$\int_{\sigma} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{x} = \int_0^1 ((1 - 2y)(-1) + (y + 1 - y) \cdot 1 + 0) dy = \int_0^1 2y dy = 1,$$

und unter Ausnützung der Symmetrie erhält man damit

$$\int_{\gamma} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{x} = 3.$$

b Man berechnet  $\mathbf{rot} \mathbf{K}(x, y, z) = (2, 2, 2)$ . Eine Parameterdarstellung der von  $\gamma$  berandeten Dreiecksfläche ist gegeben durch

$$\Delta : (x, y) \mapsto \mathbf{f}(x, y) := (x, y, 1 - x - y) \quad (0 \leq y \leq 1 - x \leq 1).$$

Hierzu gehört

$$\mathbf{f}_x = (1, 0, -1), \quad \mathbf{f}_y = (0, 1, -1), \quad \mathbf{f}_x \times \mathbf{f}_y = (1, 1, 1),$$

wir haben also die richtige Orientierung erwischt. Der Fluss von  $\mathbf{rot} \mathbf{K}$  durch  $\Delta$  berechnet sich jetzt gemäss 14.5.(9) folgendermassen:

$$\int_{\Delta} \mathbf{rot} \mathbf{K} \cdot d\boldsymbol{\omega} = \int_0^1 \int_0^{1-x} (2, 2, 2) \cdot (1, 1, 1) dy dx = 6 \int_0^1 (1 - x) dx = 3.$$

c Da  $\mathbf{rot} \mathbf{K}$  und  $\mathbf{n}$  auf ganz  $\Delta$  gleichsinnig parallel sind, ist

$$\int_{\Delta} \mathbf{rot} \mathbf{K} \cdot d\boldsymbol{\omega} = |\mathbf{rot} \mathbf{K}| \omega(\Delta) = 2\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} (\sqrt{2})^2 \sin 60^\circ = 3.$$

2 Es seien

$$\sigma_1 : z \mapsto \left(\frac{\pi}{2}, 0, z\right) \quad \left(0 \leq z \leq \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\sigma_2 : t \mapsto \left(\frac{\pi}{2} - t, 0, \frac{\pi}{2}\right) \quad \left(0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

die beiden in der  $(x, z)$ -Ebene liegenden Teilstrecken von  $\gamma$ . Dann ist

$$\int_{\sigma_1} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{x} = \int_0^{\pi/2} \sin \frac{\pi}{2} \cdot 1 dz = \frac{\pi}{2},$$

$$\int_{\sigma_2} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{x} = \int_0^{\pi/2} \sin 0 \cdot (-1) dt = 0$$

und folglich

$$\int_{\gamma} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{x} = \frac{3\pi}{2} .$$

Andererseits ist

$$\mathbf{rot} \mathbf{K}(x, y, z) = (-\cos z, -\cos x, -\cos y) .$$

Der Fluss von  $\mathbf{rot} \mathbf{K}$  durch die in der  $(x, z)$ -Ebene liegende und "nach vorn" orientierte Seitenfläche des Würfels ist daher gegeben durch

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} (-\cos z, -\cos x, -1) \cdot (0, -1, 0) dx dz = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi/2} \cos x dx = \frac{\pi}{2} .$$

Somit ist der Fluss von  $\mathbf{rot} \mathbf{K}$  durch den gesamten von  $\gamma$  berandeten Teil der Würfeloberfläche ebenfalls gleich  $\frac{3\pi}{2}$ , wie nach dem Satz von Stokes vorausgesagt.

3a Es sei

$$\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{u} \mapsto \mathbf{f}(\mathbf{u}), \quad \mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{p},$$

eine Parameterdarstellung von  $S$ , und es bezeichne  $\mathbf{n}(\mathbf{u})$  den Normalenvektor zum Parameterpunkt  $\mathbf{u}$ .

Wir nehmen also an, es sei  $\mathbf{K}(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{rot} \mathbf{K}(\mathbf{p}) =: c \neq 0$ . Dann ist insbesondere  $\mathbf{K}(\mathbf{p}) \neq \mathbf{0}$  und somit  $\mathbf{K}(\mathbf{p}) = c' \mathbf{n}(\mathbf{0})$  für ein  $c' \neq 0$ . Hiernach gilt

$$\mathbf{rot} \mathbf{K}(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{0}) = \frac{c}{c'} =: 2q,$$

wobei wir im Weiteren  $q > 0$  annehmen. Es gibt ein  $r > 0$  mit

$$\mathbf{rot} \mathbf{K}(\mathbf{f}(\mathbf{u})) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{u}) \geq q \quad (|\mathbf{u}| \leq r) .$$

Betrachte nun das Flächenscheibchen  $S' := \mathbf{f}(B_r)$ , wobei  $B_r$  die Kreisscheibe vom Radius  $r$  um  $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^2$  darstellt. Dann ist einerseits

$$\int_{S'} \mathbf{rot} \mathbf{K} \cdot \mathbf{n} d\omega \geq q \omega(S') > 0;$$

andererseits gilt aber

$$\int_{\partial S'} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{x} = \int_0^{2\pi} \mathbf{K}(\mathbf{x}(t)) \cdot \mathbf{x}'(t) dt = 0;$$

denn  $\mathbf{K}$  steht in allen Punkten  $\mathbf{x}(t) \in \partial S'$  senkrecht auf  $\mathbf{x}'(t) \in T_{\mathbf{x}(t)} S$ .

Die beiden letzten Gleichungen zusammengenommen sind mit dem Satz von Stokes nicht verträglich.

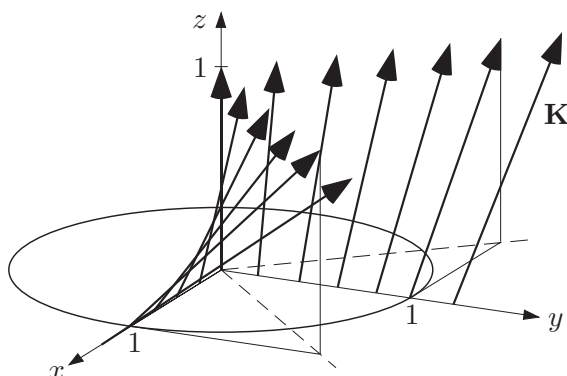


Fig. 14.6

b Man berechnet

$$\mathbf{rot} \mathbf{K}(x, y, z) = (0, 0, 2), \quad \mathbf{K}(x, y, z) \cdot \mathbf{rot} \mathbf{K}(x, y, z) \equiv 2 \neq 0;$$

folglich besitzt das Feld  $\mathbf{K}$  (Fig. 14.6) keine "Orthogonalflächen".

4 Das Feld  $\mathbf{v}$  wurde schon in den Beispielen 14.1.② und 14.3.③ betrachtet. Damals ergab sich

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \omega \mathbf{e} \times \mathbf{x}, \quad \mathbf{rot} \mathbf{v}(\mathbf{x}) \equiv 2\omega \mathbf{e}.$$

Die angegebene Parameterdarstellung von  $\gamma$  liefert  $\mathbf{x}'(t) = -\sin t \mathbf{a} + \cos t \mathbf{b}$ ; folglich ist

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} &= \int_0^{2\pi} \omega (\mathbf{e} \times (\cos t \mathbf{a} + \sin t \mathbf{b})) \cdot (-\sin t \mathbf{a} + \cos t \mathbf{b}) dt \\ &= \omega (\varepsilon(\mathbf{e}, \mathbf{a}, \mathbf{b})\pi - \varepsilon(\mathbf{e}, \mathbf{b}, \mathbf{a})\pi) = 2\pi\omega \varepsilon(\mathbf{e}, \mathbf{a}, \mathbf{b}). \end{aligned}$$

Es bezeichne  $E$  die von  $\gamma$  berandete orientierte Ellipsenfläche; ihr Flächeninhalt beträgt  $\omega(E) = \pi|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$ . Der Satz von Stokes liefert somit

$$\int_{\gamma} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} = \int_E \mathbf{rot} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\omega = 2\omega \mathbf{e} \cdot \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|} \omega(E) = 2\pi\omega \varepsilon(\mathbf{e}, \mathbf{a}, \mathbf{b}),$$

wie vorher.

### Abschnitt 14.8

1a Ist  $\mathbf{rot}(f \mathbf{K}) \equiv \mathbf{0}$ , so gilt auf Grund von Aufgabe 14.3.1b die Beziehung

$$f \mathbf{rot} \mathbf{K} = -\nabla f \times \mathbf{K} \quad (3)$$

und folglich

$$f \mathbf{K} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{K} = -\varepsilon(\nabla f, \mathbf{K}, \mathbf{K}) = 0 .$$

Da  $f$  nicht verschwindet, folgt die Behauptung.

*b* Man berechnet

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{K}(x, y, z) &= (0, xy, -xz) \\ \mathbf{K}(x, y, z) \cdot \operatorname{rot} \mathbf{K}(x, y, z) &= 0 + xz \cdot xy + xy(-xz) \equiv 0 . \end{aligned} \quad (4)$$

Ist  $x \mapsto f(x)$  ein integrierender Faktor, so muss nach (3) und (4) identisch in  $x$ ,  $y$  und  $z$  das Folgende gelten:

$$f(x)(0, xy, -xz) = -(f'(x), 0, 0) \times (xyz + yz, xz, xy) = -f'(x)(0, -xy, xz) ,$$

und umgekehrt: Trifft diese Identität zu, so ist  $x \mapsto f(x)$  ein integrierender Faktor. Die resultierende Bedingung  $f'(x) = f(x)$  wird durch  $f(x) := e^x$  befriedigt, so dass

$$\mathbf{L}(x, y, z) := e^x \mathbf{K}(x, y, z)$$

im ganzen Raum wirbelfrei ist. Die Inspektion der Komponenten  $L_2$  und  $L_3$  von  $\mathbf{L}$  lässt vermuten, dass die Funktion  $p(x, y, z) := e^x \cdot xyz$  ein Potential von  $\mathbf{L}$  ist, und diese Vermutung wird ohne Weiteres durch Differenzieren bestätigt.

2 Man berechnet

$$\operatorname{rot} \mathbf{K}(x, y, z) = (\gamma + 1, \alpha - 4, \beta - 2)$$

so dass  $\mathbf{K}$  mit den Parameterwerten  $\alpha = 4$ ,  $\beta = 2$ ,  $\gamma = -1$  wirbelfrei wird. Im Weiteren sei also

$$\mathbf{K}(x, y, z) = (x + 2y + 4z, 2x - 3y - z, 4x - y + 2z) .$$

Wir wählen den Ursprung als Nullpunkt des zugehörigen Potentials  $f$  und berechnen den Wert  $f(x, y, z)$  für einen festen Punkt  $(x, y, z)$  durch Integration längs des Streckenwegs

$$\sigma : \quad t \mapsto \mathbf{x}(t) := (tx, ty, tz) \quad (0 \leq t \leq 1) .$$

Es ergibt sich

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= \int_0^1 \mathbf{K}(\mathbf{x}(t)) \cdot \mathbf{x}'(t) dt \\ &= \int_0^1 t(x + 2y + 4z, 2x - 3y - z, 4x - y + 2z) \cdot (x, y, z) dt \\ &= \frac{1}{2}(x^2 + 4xy + 8xz - 3y^2 - 2yz + 2z^2) . \end{aligned}$$

3a Wir setzen zur Abkürzung  $\sqrt{x^2 + y^2} =: r$ . Dann ist

$$P(x, y) = (x^2 - y^2)r^{-4}, \quad Q(x, y) = 2xyr^{-4},$$

und es folgt

$$\begin{aligned} Q_x &= 2yr^{-4} - 8xyr^{-5} \frac{x}{r} = 2yr^{-6}(r^2 - 4x^2) = 2yr^{-6}(y^2 - 3x^2), \\ P_y &= -2yr^{-4} - 4(x^2 - y^2)r^{-5} \frac{y}{r} = r^{-6}(-2yr^2 - 4x^2y + 4y^3) \\ &= 2yr^{-6}(y^2 - 3x^2). \end{aligned}$$

Hiernach ist  $\operatorname{rot} \mathbf{K} = Q_x - P_y \equiv 0$ .

b Für den Kreis

$$\gamma: \quad t \mapsto \mathbf{z}(t) := r(\cos t, \sin t) \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

gilt  $\mathbf{z}'(t) = r(-\sin t, \cos t)$  und folglich

$$\int_{\gamma} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{z} = \int_0^{2\pi} \frac{r}{r^2} (\cos(2t), \sin(2t)) \cdot (-\sin t, \cos t) dt = \frac{1}{r} \int_0^{2\pi} \sin t dt = 0;$$

dabei wurde noch das Additionstheorem des Sinus benutzt.

c Wir wählen zunächst den Punkt  $(1, 0)$  als Nullpunkt des gesuchten Potentials  $f$ . Um den Wert von  $f$  an einer fest gewählten Stelle  $(x, y)$ ,  $x > 1$ , zu berechnen, integrieren wir  $\mathbf{K}$  längs der beiden Strecken

$$\sigma_1: \quad t \mapsto (t, 0) \quad (1 \leq t \leq x), \quad \sigma_2: \quad t \mapsto (x, ty) \quad (0 \leq t \leq 1).$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \int_1^x \frac{t^2}{t^4} dt + \int_0^1 \frac{2xty}{(x^2 + t^2y^2)^2} y dt = -\frac{1}{t} \Big|_{t=1}^x + \frac{-x}{x^2 + t^2y^2} \Big|_{t=0}^1 \\ &= 1 - \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2 + y^2} + \frac{1}{x} = 1 - \frac{x}{x^2 + y^2}. \end{aligned}$$

Auf die Konstante 1 kommt es natürlich nicht an, weshalb wir definitiv

$$f(x, y) := \frac{-x}{x^2 + y^2} \quad ((x, y) \in \dot{\mathbb{R}}^2)$$

als Potential von  $\mathbf{K}$  vorschlagen. Man verifiziert leicht, dass  $f$  in der ganzen punktierten Ebene wohldefiniert ist und dass  $\nabla f = \mathbf{K}$  ohne Einschränkungen zutrifft.

## 4 Die zwei Teilgebiete

$$\Omega_+ := \Omega \setminus \{(0, y) \mid -b < y < -a\}, \quad \Omega_- := \Omega \setminus \{(0, y) \mid a < y < b\}$$

(Fig. 14.7) sind einfach zusammenhängend. Auf Grund der Sätze (14.37) und (14.6) gibt es daher Funktionen

$$f_+ : \Omega_+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_- : \Omega_- \rightarrow \mathbb{R}$$

mit

$$f_+(r, 0) = f_-(r, 0) = 0 \quad (6)$$

und

$$\nabla f_+(\mathbf{z}) = \mathbf{K}(\mathbf{z}) \quad (\mathbf{z} \in \Omega_+), \quad \nabla f_-(\mathbf{z}) = \mathbf{K}(\mathbf{z}) \quad (\mathbf{z} \in \Omega_-).$$

Der Durchschnitt  $\Omega_+ \cap \Omega_-$  besteht aus den beiden zusammenhängenden Komponenten  $H_> := \{(x, y) \in \Omega \mid x > 0\}$  und  $H_< := \{(x, y) \in \Omega \mid x < 0\}$ . Auf  $H_>$  stimmen  $f_+$  und  $f_-$  nach (14.7)(b) und (6) überein.

Es sei nun  $\gamma : t \mapsto r(\cos t, \sin t)$  ( $0 \leq t \leq 2\pi$ ) der genannte Kreis, und es sei  $\gamma_+$  dessen obere und  $\gamma_-$  dessen untere Hälfte. Nach (14.3) gilt dann

$$f_+(-r, 0) - f_-(-r, 0) = \int_{\gamma_+} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{z} - \int_{-\gamma_-} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{z} = \int_{\gamma} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{z} = 0;$$

folglich stimmen  $f_+$  und  $f_-$  auch auf  $H_<$  überein. Somit besitzt  $\mathbf{K}$  ein auf ganz  $\Omega$  wohldefiniertes Potential

$$f(\mathbf{z}) := \begin{cases} f_+(\mathbf{z}) & (\mathbf{z} \in \Omega_+) \\ f_-(\mathbf{z}) & (\mathbf{z} \in \Omega_-) \end{cases}.$$

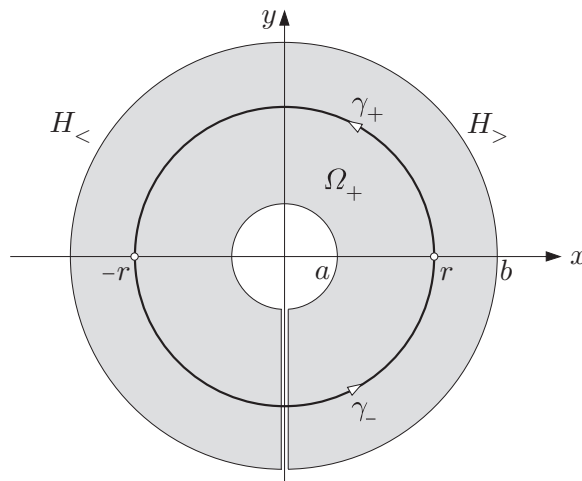


Fig. 14.7