



Lösungen zu den Kapiteln 1–10

Hinweise

Besteht eine Aufgabe im wesentlichen darin, eine gegebene Gleichung aufzulösen oder einen gegebenen Ausdruck in bestimmter Weise umzuformen, so wird diese Gleichung bzw. dieser Ausdruck mit % bezeichnet.

In Konstruktionsbeispielen wird gelegentlich Material verwendet (zum Beispiel die Funktion \arctan), das “offiziell” erst später behandelt wird, beim Leser aber vorausgesetzt werden darf.

Formelnummern beziehen sich auf das laufende Kapitel des Lösungsteils. Auf Formeln im Haupttext wird mit Angabe der Abschnittnummer verwiesen. Figuren im Lösungsteil sind kapitelweise zweistellig nummeriert. Dreistellige Figurenummern beziehen sich auf den Haupttext.

Fehlermeldungen nimmt der Autor dankend entgegen. Hier seine Adresse:

`christian.blatter@math.ethz.ch`

Greifensee, 15. Mai 2008

Lösungen zu Kapitel 1

Abschnitt 1.1

1 Wir argumentieren in der “Mengensprache” (Abschnitt 1.2) und bezeichnen mit K die Menge der Kalupen, mit B, F, D bzw. die Teilmengen der gebrochselten, foberanten und dorigen Kalupen; ferner bezeichnen wir mit einem $'$ das Komplement bezüglich K : Für beliebige Mengen X ist $X' := K \setminus X$. Es gelten die Inklusionen $B' \subset D, F \subset D$. Ferner ist $D \neq \emptyset$ und $D' \neq \emptyset$.

a Falsch: B' kann leer sein.

b Richtig: Aus $B' \subset D$ folgt $D' \subset B$ und damit $B \neq \emptyset$.

c Richtig: Es ist $D' \subset B$.

d Richtig: Wegen $D' \subset B$ und $D' \subset F'$ ist $D' \subset B \cap F'$ und damit $B \cap F' \neq \emptyset$.

e Falsch: Es könnte z.B. $B' = \emptyset, B = K$ und $F = D$ sein. Dann ist $B \setminus F' = D \neq \emptyset$.

2b Es gibt glavule Quorge, die nicht ropanzen.

c Ein Quorg, der ropanzt, ist glavul.

d Ein Quorg, der nicht ropanzt, ist nicht glavul.

Es besteht nur die logische Äquivalenz (a) \Leftrightarrow (d).

3 Man muss die zweite und die fünfte Karte umdrehen: Die zweite könnte kein As sein und die fünfte eine schraffierte Rückseite haben.

4 Es bezeichne $n \geq 0$ die fragliche Anzahl. Ist $n = 0$, so trifft nur (b) zu. Für $1 \leq n < 1000$ treffen (b) und (c) zu. Für $n = 1000$ trifft nur (c) zu, und für $n > 1000$ treffen (a) und (c) zu. Somit besitzt Fritz entweder 0 Bücher oder deren 1000.

5 Die Kontraposition lautet: Haben keine 7 Platz, dann höchstens deren 5. Der Radius der Plätzchen betrage 1. Besitzt die Dose D einen Radius $R \geq 3$, so lassen sich 7 Plätzchen hineinlegen: 6 am Rand und eines in der Mitte. Wenn also keine 7 Platz haben, so ist notwendiger Weise $R < 3$. Es seien nun r Plätzchen in eine derartige Dose eingelegt, und es seien M_1, \dots, M_r deren Mittelpunkte. Wir behaupten: Die M_i bilden ein konvexes r -Eck P .

┌ Angenommen, das sei nicht der Fall. Dann liegt ein M_i in einem von drei anderen M_k gebildeten Dreieck; es sei etwa $M_4 \in \triangle(M_1, M_2, M_3)$. Werden die in M_4 beginnenden Strecken M_4M_i ($1 \leq i \leq 3$) über M_i hinaus auf die Länge 3 verlängert, so erhält man die drei Punkte A_i . Wegen $|M_4M_i| \geq 2$ liegen diese drei Punkte in D und bilden ein Dreieck vom Umkreisradius 3, was nicht geht. └

Die r Plätzchen lassen sich somit längs Winkelhalbierenden von P an den Rand der Dose schieben, ohne dass es zu Überlappungen kommt. Wegen $R < 3$ muss dann $r \leq 5$ sein.

6 Lege in die Schachtel Q ein quadratisches Gitter der Maschenweite 0.99, so dass die Ecken von Q auf Gitterpunkte fallen. Dann befinden sich 25 Gitterpunkte im Innern von Q . Jedes achsenparallele Einheitsquadrat $E \subset Q$ enthält, unabhängig von seiner Lage, mindestens einen solchen Gitterpunkt in seinem Innern. Somit lassen sich höchstens 25 achsenparallele Einheitsquadrate in Q unterbringen, ohne zu überlappen.

Abschnitt 1.2

1 a, b Siehe die Fig. 1.1.

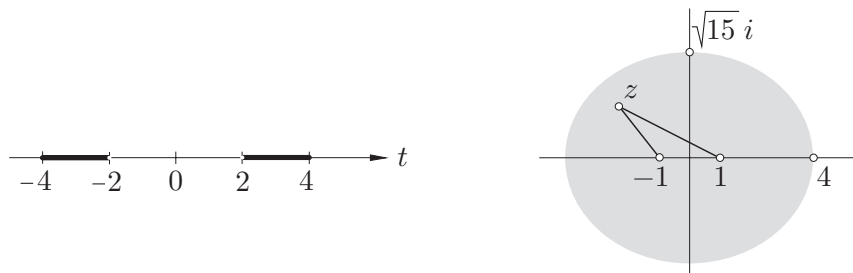


Fig. 1.1

c Die drei Ungleichungen schneiden aus der Ebene $x + y + z = 1$ ein im ersten Oktanten liegendes gleichseitiges Dreieck heraus; siehe die Fig. 1.2, links.

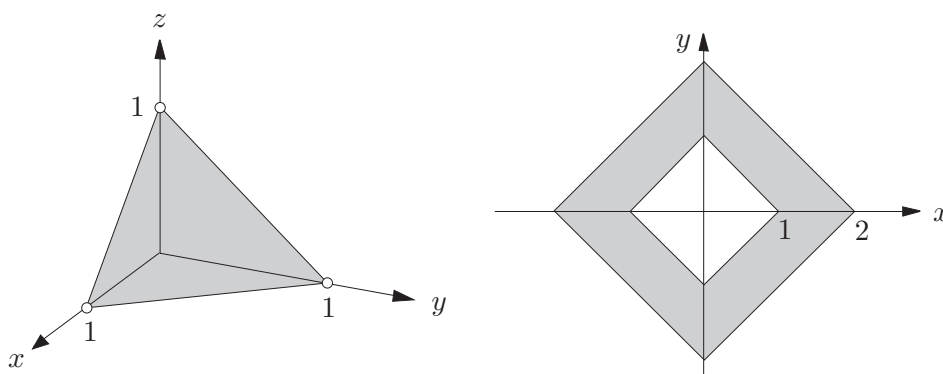


Fig. 1.2

d Algebraische Lösung (für das Rechnen mit Ungleichungen siehe den Abschnitt 2.2): Ist $x < 1$, so ist

$$\frac{1}{1-x} < 1 - \frac{x}{2} \quad (1)$$

äquivalent mit

$$1 < \left(1 - \frac{x}{2}\right)(1-x)$$

bzw. mit $x(x-3) > 0$. Letzteres trifft für $x < 0$ und für $x > 3$ zu. Da wir von vorneherein $x < 1$ vorausgesetzt haben, bleibt nur das Intervall $x < 0$ übrig. Ist aber $x > 1$, so ist (1) äquivalent mit

$$1 > \left(1 - \frac{x}{2}\right)(1-x)$$

bzw. mit $x(x-3) < 0$. Letzteres trifft für $0 < x < 3$ zu. Da wir von vorneherein $x > 1$ vorausgesetzt haben, bleibt hiervon nur das Teilintervall $1 < x < 3$ übrig. Im Ganzen erhält man die Vereinigung der beiden geschwärzten Intervalle in der Fig. 1.3.

Graphische Lösung: Man zeichnet die Graphen der beiden Funktionen $y = \frac{1}{1-x}$ und $y = 1 - \frac{x}{2}$ und entnimmt der Figur, für welche x der erste Graph unterhalb des zweiten verläuft.

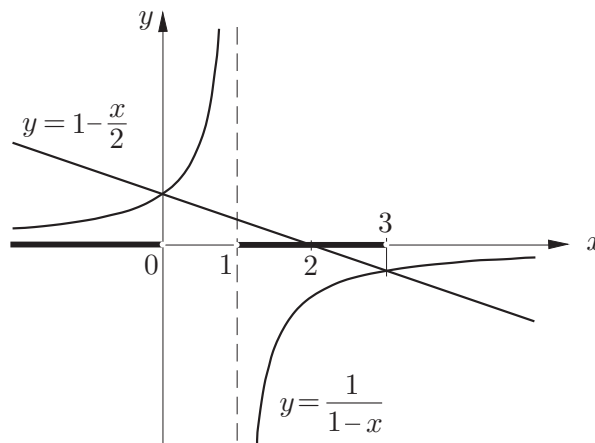


Fig. 1.3

e Fig. 1.2, rechts.

f Die Ungleichung $|x-y| + 2 \leq |x|$ nimmt in den vier Bereichen

$$A_1: x \geq 0, y \leq x, \quad A_2: x \geq 0, y \geq x, \quad A_3: x \leq 0, y \geq x, \quad A_4: x \leq 0, y \leq x$$

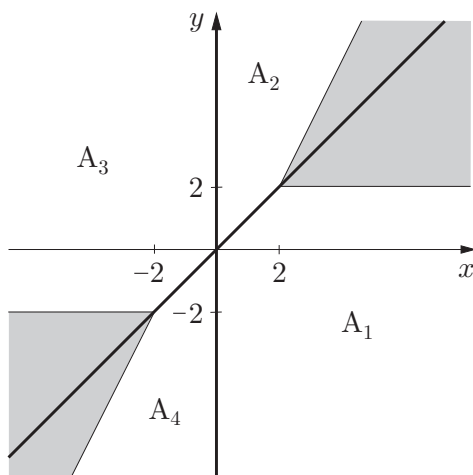


Fig. 1.4

folgende Formen an:

$$A_1: x - y + 2 \leq x, \quad \text{d.h.} \quad y \geq 2;$$

$$A_2: y - x + 2 \leq x, \quad \text{d.h.} \quad y \leq 2x - 2;$$

$$A_3: y - x + 2 \leq -x, \quad \text{d.h.} \quad y \leq -2;$$

$$A_4: x - y + 2 \leq -x, \quad \text{d.h.} \quad y \geq 2x + 2.$$

Zusammengenommen ergibt sich der eingefärbte Bereich in der Fig. 1.4.

2 Die angeschriebene Ungleichung ist äquivalent mit

$$(x + 3)^2 + (y - 4)^2 \leq 25 .$$

Die Menge der zulässigen Zustände (x, y) ist daher eine Kreisscheibe vom Radius 5 mit Zentrum $(-3, 4)$. Der grösstmögliche Wert für x ist $-3 + 5 = 2$, und er ist nur realisierbar, wenn $y = 4$ gewählt wird; siehe die Fig. 1.5.

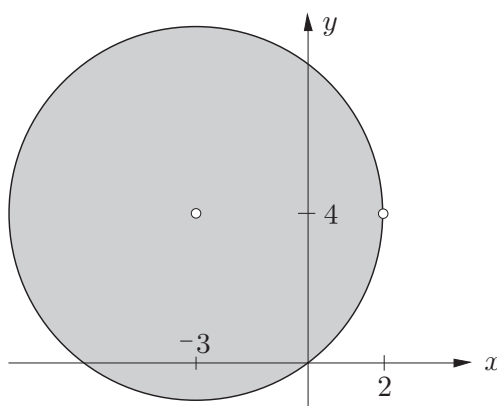


Fig. 1.5

3 Die im ersten Oktanten liegende Seitenfläche von A gehört der Ebene $x + y + z = 1$ an. Da A bezüglich aller drei Koordinatenebenen spiegelsymmetrisch ist, folgt $A = \{(x, y, z) \mid |x| + |y| + |z| < 1\}$.

4 Die "Würfelskugel" B vom Radius b besteht aus leichtem Kunststoff. In ihrem Innern befindet sich ein oktaedrischer Hohlraum, in dem sich eine kleine Metallkugel herumbewegt.

$$B = \{(x, y, z) \mid \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \leq b, |x| + |y| + |z| \geq a\}, \quad a < b.$$

5 Die betrachteten Zahlen sind die sämtlichen Produkte von drei verschiedenen Primzahlen, die ≤ 200 ausfallen. Wir listen sie in der folgenden Weise auf:

$$2 \cdot 3 \cdot \{5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31\}, \quad 2 \cdot 5 \cdot \{7, 11, 13, 17, 19\}, \quad 2 \cdot 7 \cdot \{11, 13\}, \\ 3 \cdot 5 \cdot \{7, 11, 13\}.$$

Die Menge $S \cap T \cap U$ besitzt daher 19 Elemente.

6 Durch Quadrieren der ersten Gleichung erhält man $x + 1 = 1 - 2y + y^2$ und somit $x = y^2 - 2y$. Quadrieren der zweiten Gleichung liefert $24y + 25 = 4x^2 - 20x + 25$ und folglich $6y = x^2 - 5x$. Wird hier x durch y ausgedrückt, so erhält man $6y = (y^4 - 4y^3 + 4y^2) - 5(y^2 - 2y)$ und weiter

$$y(y + 1)(y - 1)(y - 4) = 0.$$

Die y -Kooordinate jeder Lösung muss dieser Gleichung genügen. Wegen $x = y^2 - 2y$ ist daher L eine Teilmenge von $L' := \{(0, 0), (3, -1), (-1, 1), (8, 4)\}$. Setzt man die vier gefundenen Punkte in die ursprünglichen Gleichungen ein, so sieht man, dass nur $(3, -1)$ beide Gleichungen befriedigt; somit ist $L = \{(3, -1)\}$.

7 Die Aufgabenstellung ist sehr unbestimmt, da nirgends gesagt wird, was ein "zulässiger Test" ist. Offenbar geht es darum, die "Zweizahligkeit" einer Menge durch "innere Eigenschaften" zu erklären und die aufzählende Schreibweise $\{a, b\}$ zu vermeiden. Vorschlag: Eine Menge A ist *zweielementig*, wenn sie die folgenden beiden Eigenschaften besitzt:

(1) Es gibt $x \in A, y \in A$ mit $x \neq y$.

(2) Ist $x \in A, y \in A, z \in A$, so gilt $x = y$ oder $y = z$ oder $z = x$.

8a Die Periodizität von $\mathbb{C}A$ folgt durch Kontraposition der Definition. Ist die Menge A periodisch mit Periode p , so ist für jedes $n \geq 1$ auch np eine Periode von A . Hiernach sind sowohl A wie B periodisch mit Periode pq , und man hat

$$\begin{aligned} x \in A \cap B &\Rightarrow x \in A \wedge x \in B \Rightarrow x \pm pq \in A \wedge x \pm q \in B \\ &\Rightarrow x \pm pq \in A \cap B, \end{aligned}$$

analog für \cup .

b Gäbe es nur endlich viele Primzahlen, so wäre die Menge $U = \{-1, 1\}$ nach a periodisch.

Abschnitt 1.3

1a (A1) ist klar. — (A2): Ist $\lambda > 0$, so ist auch $\frac{1}{\lambda} > 0$. Aus $(x_2, y_2) = (\lambda x_1, \lambda y_1)$ folgt daher $(x_1, y_1) = (\frac{1}{\lambda} x_2, \frac{1}{\lambda} y_2) \sim (x_2, y_2)$. — (A3): Mit $\lambda > 0$ und $\mu > 0$ ist auch $\mu\lambda > 0$. Aus $(x_2, y_2) = (\lambda x_1, \lambda y_1)$ und $(x_3, y_3) = (\mu x_2, \mu y_2)$ folgt daher $(x_3, y_3) = (\mu\lambda x_1, \mu\lambda y_1) \sim (x_1, y_1)$.

b Die Äquivalenzklassen sind von $(0, 0)$ ausgehende Strahlen (ohne den Anfangspunkt). Jede Äquivalenzklasse hat einen “natürlichen” Repräsentanten, nämlich den Schnittpunkt des betreffenden Strahls mit dem Einheitskreis S^1 . Die Quotientenmenge lässt sich daher mit S^1 “identifizieren”.

c Gilt $(x'_1, y'_1) = (\lambda x_1, \lambda y_1)$ und $(x'_2, y'_2) = (\mu x_2, \mu y_2)$, so folgt

$$x'_1 x'_2 - y'_1 y'_2 = \mu\lambda(x_1 x_2 - y_1 y_2), \quad x'_1 y'_2 - x'_2 y'_1 = \mu\lambda(x_1 y_2 - y_2 y_1).$$

Die Äquivalenzklasse des “Produktpunkts” hängt also nicht von den für die Faktoren gewählten Repräsentanten ab.

d Jede Äquivalenzklasse, d.h. jeder Strahl S , hat ein wohlbestimmtes Argument $\phi \in \mathbb{R}/(2\pi)$, auch Polarwinkel genannt, siehe Abschnitt 6.5. Bei der Multiplikation $*$ addieren sich die Argumente der Faktoren. (Vgl. die Multiplikation von komplexen Zahlen, Additionstheoreme von \cos und \sin .)

2a (A1) ist erfüllt wegen $A \setminus A = \emptyset$. — (A2) ist nicht erfüllt: Sei $A \subset \mathbb{N}$ die Teilmenge der geraden Zahlen. Dann ist $A \setminus \mathbb{N}$ leer, also endlich, aber $\mathbb{N} \setminus A$ unendlich. — Wegen

$$A \setminus C \subset (A \setminus B) \cup (B \setminus C) \tag{2}$$

ist (A3) erfüllt.

b (A1) und (A2) sind trivialerweise erfüllt. — Aus (2) und der dazu symmetrischen Inklusion folgt

$$A \Delta C \subset (A \Delta B) \cup (B \Delta C);$$

somit gilt auch (A3).

c Wegen $\mathbb{N} \cap \mathbb{N} = \mathbb{N}$ trifft (A1) nicht zu. — (A2) ist erfüllt. — Sei $A := 2\mathbb{N}$ ($:=$ Menge der geraden Zahlen), $B := \{2, 3\}$ und $C := 3\mathbb{N}$. Dann sind $A \cap B$ und $B \cap C$ endlich, aber $A \cap C = 6\mathbb{N}$ ist unendlich. Somit trifft (A3) nicht zu.

3 Wenn es ein x gibt ohne ein von x verschiedenes z mit $x \sim z$, so braucht $x \sim x$ nicht zu gelten. Beispiel: Wir definieren auf \mathbb{R} die Äquivalenzrelation?

$$x \sim y \quad :\Leftrightarrow \quad x \cdot y > 0. \tag{3}$$

Für diese Relation sind (A1) und (A3) erfüllt, aber $0 \sim 0$ trifft nicht zu. Die von 0 erzeugte Äquivalenzklasse² ist nicht etwa $\{0\}$, sondern leer. (Natürlich ist $\{\mathbb{R}_{>0}, \mathbb{R}_{<0}, \{0\}\}$ eine sinnvolle Zerlegung von \mathbb{R} ; nur kann sie nicht mit Hilfe von (3) produziert werden.)

4 Die Menge $\{1\}$ besitzt nur die triviale Zerlegung $\{\{1\}\}$, bestehend aus einer einzigen Klasse. Für $\{1, 2\}$ haben wir die beiden Zerlegungen $\{\{1, 2\}\}$ und $\{\{1\}, \{2\}\}$. $\{1, 2, 3\}$ besitzt die fünf Zerlegungen $\{\{123\}\}$, $\{\{12\}, \{3\}\}$, $\{\{23\}, \{1\}\}$, $\{\{13\}, \{2\}\}$, $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$. Und noch dies: Die leere Menge besitzt nur die triviale Zerlegung in 0 nichtleere Klassen.

Es bezeichne $B(n)$ die Anzahl der Zerlegungen der Menge $[n] := \{1, 2, \dots, n\}$ in disjunkte nichtleere Teilmengen. Man nennt $B(n)$ die n -te **Bellsche Zahl**. Bis jetzt haben wir $B(0) = B(1) = 1$, $B(2) = 2$, $B(3) = 5$. Um eine Rekursionsformel für die $B(n)$ zu erhalten, überlegen wir folgendermassen: Man erhält die allgemeinste Zerlegung von $[n+1]$, indem man durch Hinzunahme von k , $0 \leq k \leq n$, weiteren Elementen die Klasse bildet, die das Element $n+1$ enthält — dies lässt sich auf $\binom{n}{k}$ Arten bewerkstelligen — und hierauf die $(n-k)$ -elementige Restmenge beliebig in nichtleere Klassen zerlegt. Letzteres ist, unabhängig von der Wahl jener k Elemente, auf $B(n-k)$ Arten möglich. Damit ergibt sich ohne weiteres die folgende Rekursionsformel:

$$B(n+1) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B(n-k).$$

Sie liefert nacheinander $B(4) = 15$, $B(5) = 52$.

Abschnitt 1.4

1a Gilt $y \in f(X \cup X')$, so gibt es ein $x \in X \cup X'$ mit $f(x) = y$. Gilt dabei $x \in X$, so folgt $y \in f(X)$, gilt $x \in X'$, so folgt $y \in f(X')$. Somit gilt jedenfalls $y \in f(X) \cup f(X')$. Damit ist $f(X \cup X') \subset f(X) \cup f(X')$ bewiesen. Die umgekehrte Inklusion ergibt sich aus dem fundamentalen Prinzip

$$X \subset Z \quad \Rightarrow \quad f(X) \subset f(Z), \quad (4)$$

angewandt auf $X \subset (X \cup X')$ bzw. $X' \subset (X \cup X')$.

b Die behauptete Inklusion ergibt sich sofort mit Hilfe von (4), angewandt auf $(X \cap X') \subset X$ bzw. $(X \cap X') \subset X'$. — Die umgekehrte Inklusion trifft im allgemeinen nicht zu: Es sei $f(0) = f(1) = 1$. Dann ist

$$f(\{0\}) \cap f(\{1\}) = \{1\} \not\subset \emptyset = f(\{0\} \cap \{1\}).$$

c Beide Seiten beschreiben die Menge $\{x \in A \mid f(x) \in Y \vee f(x) \in Y'\}$.

d Beide Seiten beschreiben die Menge $\{x \in A \mid f(x) \in Y \wedge f(x) \in Y'\}$.

e Beide Seiten beschreiben die Menge $\{x \in A \mid f(x) \in B \setminus Y\}$.

2a Richtig: Gilt $f(x) = f(x')$, so folgt $x = g(f(x)) = g(f(x')) = x'$.

b, c Beides falsch: Betrachte das Beispiel

$$X = \{0\}, \quad Y = \{0, 1\}, \quad f(0) = 0, \quad g(0) = g(1) = 0. \quad (5)$$

d Richtig: Es sei ein $x \in X$ vorgegeben. An der Stelle $y := f(x)$ hat man $g(y) = g(f(x)) = x$.

e Falsch: Betrachte das Beispiel (5).

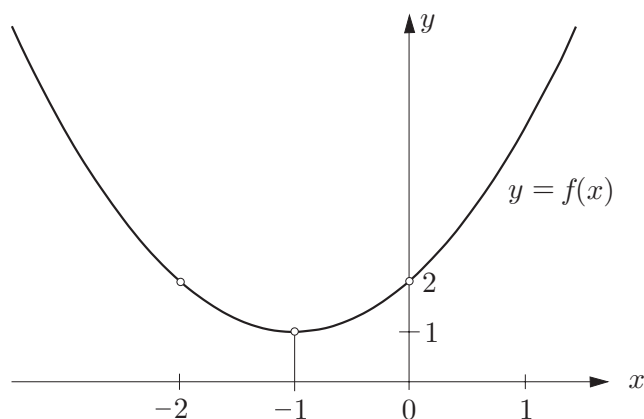


Fig. 1.6

3 Wie die Fig. 1.6 zeigt, ist f auf $\mathbb{R}_{\leq -1}$ streng monoton fallend und auf $\mathbb{R}_{\geq -1}$ streng monoton wachsend. Somit besitzt die Einschränkung von f auf irgend ein Teilintervall von $\mathbb{R}_{\leq -1}$ bzw. $\mathbb{R}_{\geq -1}$ eine Umkehrfunktion g . Der algebraische Ausdruck für das jeweilige g ergibt sich durch Auflösen der Gleichung $y = x^2 + 2x + 2$ nach x und Auswahl der passenden Lösung. Man findet $x = -1 \pm \sqrt{y-1}$.

a $y \mapsto g(y) = -1 + \sqrt{y-1} \quad (2 \leq y < \infty)$.

b Wegen $f(-1+t) = 1+t^2 = f(-1-t)$ ist f auf keinem Intervall, das den Punkt $x_0 = -1$ in seinem Innern enthält, injektiv. Die Einschränkung von f auf ein derartiges Intervall besitzt daher keine Umkehrfunktion.

c $y \mapsto g(y) = -1 - \sqrt{y-1} \quad (2 \leq y < \infty)$.

4 Da die Wurzelfunktion $t \mapsto \sqrt{t}$ auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$ streng monoton wächst, muss y abnehmen, wenn x zunimmt. Dabei muss von vorneherein $x \geq -1$ und $\sqrt{1+x} \leq 2$, also $x \leq 3$ sein. Aus Symmetriegründen unterliegt y den gleichen

Beschränkungen: Während x von -1 nach 3 läuft, fällt y von 3 nach -1 . Wird die gegebene Gleichung nach y aufgelöst, erhält man

$$y = 4 + x - 4\sqrt{1+x} \quad (-1 \leq x \leq 3). \quad (6)$$

Durch (6) wird eine bijektive Abbildung f des Intervalls $[-1, 3]$ auf sich selbst definiert, die den Richtungssinn umkehrt, siehe die Fig. 1.7. Aus Symmetriegründen ist $f^{-1} = f$.

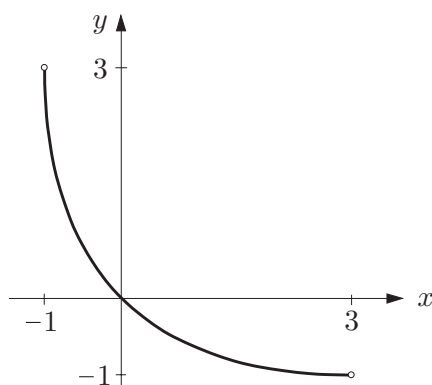


Fig. 1.7

5a Damit die innerste Wurzel reell ausfällt, muss $x \geq 0$ sein. Damit die nächste Wurzel reell ausfällt, muss $\sqrt{x} \leq 25$, also $x \leq 625$ sein. Damit die äusserste Wurzel reell ausfällt, muss $\sqrt{25 - \sqrt{x}} \leq 9$ sein; dies trifft aber immer zu. Damit wird $D = [0, 625]$.

b Die Funktion $\text{sqrt}: t \mapsto \sqrt{t}$ ist auf ihrem Definitionsbereich streng monoton wachsend, und die beiden Funktionen $g_1(t) := 25 - t$, $g_2(t) := 9 - t$ sind streng monoton fallend. Die Funktion f lässt sich in der folgenden Weise als Zusammensetzung darstellen:

$$f = \text{sqrt} \circ g_2 \circ \text{sqrt} \circ g_1 \circ \text{sqrt}.$$

Da in diesem "Produkt" eine gerade Anzahl von monoton fallenden Faktoren vorkommt, ist f streng monoton wachsend. Wegen $f(0) = 2$, $f(625) = 3$ ergibt sich damit die Wertmenge $W = [2, 3]$.

c Aus $y = \sqrt{9 - \sqrt{25 - \sqrt{x}}}$ folgt nacheinander

$$\begin{aligned} y^2 &= 9 - \sqrt{25 - \sqrt{x}} \quad \text{bzw.} \quad \sqrt{25 - \sqrt{x}} = -y^2 + 9, \\ 25 - \sqrt{x} &= y^4 - 18y^2 + 81 \quad \text{bzw.} \quad \sqrt{x} = -y^4 + 18y^2 - 56, \\ x &= y^8 - 36y^6 + 436y^4 - 2016y^2 + 3136. \end{aligned}$$

Die Umkehrfunktion $f^{-1}: [2, 3] \rightarrow [0, 625]$ erscheint damit in der folgenden Gestalt:

$$f^{-1}(y) = y^8 - 36y^6 + 436y^4 - 2016y^2 + 3136 \quad (2 \leq y \leq 3).$$

Lösungen zu Kapitel 2

Abschnitt 2.1

1 Die Fig. 2.1 zeigt mögliche Lösungen.

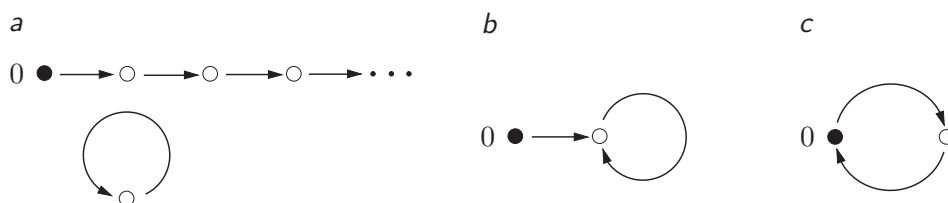


Fig. 2.1

2a Es bezeichne a_n die Anzahl der Teilgebiete bei n Geraden. Dann ist $a_0 = 1$, wie behauptet. Die $(n + 1)$ -te Gerade g_{n+1} wird von den schon vorhandenen n Geraden in n Punkten geschnitten. Die $n + 1$ entstehenden Teilstücke von g_{n+1} zerlegen insgesamt $n + 1$ vorhandene Teilgebiete in zwei Teile. Somit genügen die a_n der folgenden Rekursionsformel:

$$a_{n+1} = a_n + n + 1 .$$

Setzen wir also für a_n die behauptete Formel voraus, so ergibt sich

$$a_{n+1} = \frac{n^2 + n + 2}{2} + n + 1 = \frac{n^2 + 3n + 4}{2} = \frac{(n + 1)^2 + (n + 1) + 2}{2} ,$$

wie für den Induktionsschluss verlangt.

b Ist $n = 0$, so haben beide Seiten der behaupteten Formel den Wert 0. Die Formel sei also richtig für n . Dann folgt

$$\sum_{k=0}^n q^k = \sum_{k=0}^{n-1} q^k + q^n = \frac{q^n - 1}{q - 1} + q^n = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} .$$

c Ist $n = 1$, so haben beide Seiten der angeschriebenen Formel denselben Wert. Wir beweisen daher: Gilt die Formel für n mit \geq , so gilt sie für $n + 1$ mit $>$. Wegen $1 - x_{n+1} > 0$ hat man

$$\prod_{k=1}^{n+1} (1 - x_k) = (1 - x_{n+1}) \prod_{k=1}^n (1 - x_k) \geq (1 - x_{n+1}) \left(1 - \sum_{k=1}^n x_k \right) > 1 - \sum_{k=1}^{n+1} x_k .$$

d Es bezeichne s_n die betrachtete Summe. Dann ist $s_0 = 0$, wie behauptet. Ferner gilt

$$s_{n+1} = s_n + (10n + 1) + (10n + 3) + (10n + 7) + (10n + 9) = s_n + 40n + 20 .$$

Mit Hilfe der Induktionsvoraussetzung erhalten wir daher

$$s_{n+1} = 20n^2 + 40n + 20 = 20(n + 1)^2 ,$$

wie für den Induktionsschluss verlangt.

e Die behauptete Formel trifft für $n = 0$ trivialerweise zu. Der Induktionsschluss ergibt sich durch die folgende Rechnung:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=1}^n k^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \dots \\ &= \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6} . \end{aligned}$$

f Die behauptete Formel trifft für $n = 0$ trivialerweise zu. Der Induktionsschluss ergibt sich durch die folgende Rechnung:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k^3 &= \sum_{k=1}^n k^3 + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = \dots \\ &= \frac{(n+1)^2((n+1)+1)^2}{4} . \end{aligned}$$

Abschnitt 2.2

1 Es entsteht ein Ring mit dem Nullelement $(0, 0) =: \mathbf{0}$ und dem Einselement $(1, 1)$, aber kein Körper: Die Elemente $(0, x)$ und $(x, 0)$, $x \neq 0$, sind $\neq \mathbf{0}$, besitzen aber kein multiplikatives Inverses.

2 Die Ersetzungen $x \rightsquigarrow -x$ und $y \rightsquigarrow -y$ vertauschen $|x - y|$ mit $|x + y|$, und auch $x \rightsquigarrow y$ lässt beide Seiten der behaupteten Gleichung unverändert. Wir dürfen daher $x \geq y \geq 0$ annehmen. In diesem Fall lautet die Behauptung wie folgt:

$$x + y + (x - y) = (x - y) + (x + y) ,$$

und das trifft offensichtlich zu.

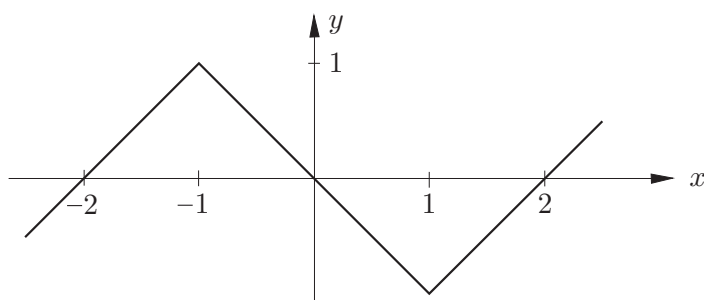


Fig. 2.2

3 Die Fig. 2.2 zeigt den Graphen von f . Die Funktion f ist ungerade. Die Knickstellen und das Verhalten für $x \rightarrow \pm\infty$ legen daher den Ansatz

$$f(x) = x + a(|1 - x| - |1 + x|)$$

nahe. Die Punktprobe an der Stelle $x = 1$ liefert $a = 1$. Damit erhalten wir als Lösungsvorschlag definitiv

$$f(x) = x + |1 - x| - |1 + x| .$$

Die (notwendige) Verifikation anhand der ursprünglichen Definition von f zeigt, dass dieser Vorschlag akzeptiert werden kann.

4 Alle f_n sind gerade Funktionen mit Werten ≥ 0 ; die ersten paar sind in der Fig. 2.3 dargestellt. Um hinter das Bildungsgesetz zu kommen, müssen wir die Hilfsabbildung

$$\phi: y \mapsto |1 - y| \quad (y \geq 0)$$

der positiven y -Halbachse auf sich selbst betrachten. Für $0 \leq y \leq 1$ ist $\phi(y) = 1 - y$, das ist eine Spiegelung am Punkt $y = \frac{1}{2}$. Für $y \geq 1$ wirkt ϕ als Translation $y \mapsto y - 1$. Der Übergang $f_n \rightsquigarrow f_{n+1}$ lässt sich daher folgendermassen interpretieren: Die in dem Streifen $0 \leq y \leq 1$ liegenden Teile des Graphen werden an der Horizontalen $y = \frac{1}{2}$ gespiegelt, und der oberhalb der Linie $y = 1$ liegende Teil wird um 1 nach unten geschoben. Letzteres bewirkt, dass erstens eine weitere Teilstrecke im Bereich $0 \leq y \leq 1$ entsteht und dass zweitens der oberhalb der Linie $y = 1$ verbleibende Teil des Graphen um 1 nach rechts verschoben erscheint.

Der Graph von f_{100} besitzt 50 "Sägezähne" der Breite 2, bevor er definitiv mit Steigung 1 entschwindet.

5 Sind die drei Zahlen a, b, c positiv, so sind die Ungleichungen (*) natürlich erfüllt. Umgekehrt: Sind die Ungleichungen (*) erfüllt, so gilt

$$p(x) := x^3 - (a + b + c)x^2 + (ab + bc + ca)x - abc < 0$$

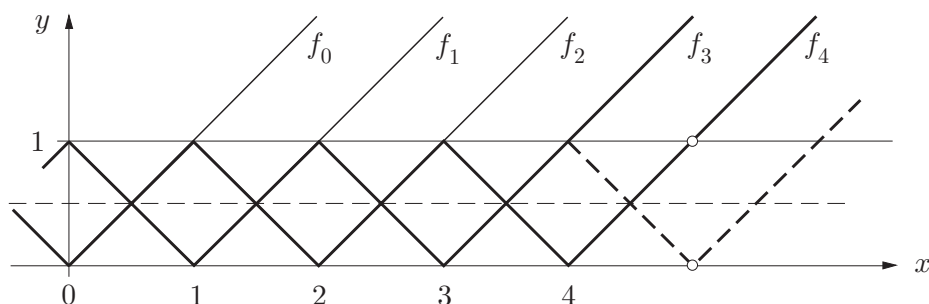


Fig. 2.3

für alle $x \leq 0$. Das Polynom $p(\cdot)$ besitzt daher keine Nullstellen ≤ 0 . Nach dem Satz von Vieta sind aber diese Nullstellen gerade die Zahlen a , b und c . Diese Zahlen müssen somit alle > 0 sein.

Abschnitt 2.3

1 Damit λ überhaupt wohldefiniert ist, muss $(c, d) \neq (0, 0)$ sein. Ist $c = 0$, so ist $d \neq 0$, und λ lässt sich in der folgenden Form schreiben:

$$\lambda = \frac{a}{d}\tau + \frac{b}{d}.$$

In diesem Fall ist λ genau dann rational, wenn auch $a = 0$ ist.

Ist $c \neq 0$, so ist $c\tau + d$ irrational, insbesondere $\neq 0$, und λ lässt sich in der Form

$$\lambda = \frac{a}{c} - \frac{ad - bc}{c(c\tau + d)}$$

schreiben. Hiernach ist λ genau dann rational, wenn $ad - bc = 0$ ist.

Zusammengefasst kann man also sagen: Die Zahl λ ist genau dann rational, wenn $(c, d) \neq (0, 0)$ und $ad - bc = 0$ ist.

2 Die Binärdarstellung von 3 ist 11_2 . Um die ersten 15 Stellen der Binärdarstellung von $0.14159265\dots$ zu erhalten, bestimmen wir die Binärdarstellung von $[2^{15} \cdot 0.14159265] = [4639.708\dots] = 4639$. Aus $4639 = 4096 + 512 + 31$ ergibt sich $4639 = 1001000011111_2$. Verschieben wir das "Dualkomma" wieder um 15 Stellen nach links, so erhalten wir insgesamt

$$\pi = 11.001001000011111_2.$$

3a Man kann der Einfachheit halber $\mathbf{x} = 0.1111\dots$ und $y_k = 1$ ($k = 2^m$) bzw. $= 0$ (sonst) annehmen. Damit wird

$$\mathbf{x} \oplus \mathbf{y} = 1.1101000100000\dots$$

mit einer 1 an den Stellen $k = 0$ und $k = 2^m$, $m \geq 0$.

b Um das Bildungsgesetz zum Vorschein zu bringen, legen wir die folgende Tabelle an, wobei überflüssige Nullen unterdrückt werden:

$$\begin{aligned} T_4\mathbf{x} + T_4\mathbf{y} &= 1.1100 \\ T_5\mathbf{x} + T_5\mathbf{y} &= 1.11001 \\ T_7\mathbf{x} + T_7\mathbf{y} &= 1.1100111 \\ T_8\mathbf{x} + T_8\mathbf{y} &= 1.11010000 \\ T_{15}\mathbf{x} + T_{15}\mathbf{y} &= 1.110100001111111 \\ T_{16}\mathbf{x} + T_{16}\mathbf{y} &= 1.1101000100000000 \end{aligned}$$

Für $n = 2^m$ hat man demnach $j_n = 2n$. Es folgt, dass erst $T_{32}\mathbf{x} + T_{32}\mathbf{y}$ die ersten 20 Stellen von $\mathbf{x} \oplus \mathbf{y}$ richtig wiedergibt; das heisst, es ist $j_{20} = 32$.

4 Betrachte ein festes $n \geq 0$. Nach (i) und (m) lassen sich nacheinander j , j' , j'' so bestimmen, dass das Folgende zutrifft:

$$\begin{aligned} T_n(\mathbf{x} \odot (\mathbf{y} \oplus \mathbf{z})) &\leq T_j\mathbf{x} \cdot T_j(\mathbf{y} \oplus \mathbf{z}) \leq T_{j'}\mathbf{x} \cdot (T_{j'}\mathbf{y} + T_{j'}\mathbf{z}) \\ &= (T_{j'}\mathbf{x} \cdot T_{j'}\mathbf{y}) + (T_{j'}\mathbf{x} \cdot T_{j'}\mathbf{z}) \leq T_{2j'}(\mathbf{x} \odot \mathbf{y}) + T_{2j'}(\mathbf{x} \odot \mathbf{z}) \\ &\leq T_{j''}((\mathbf{x} \odot \mathbf{y}) \oplus (\mathbf{x} \odot \mathbf{z})) \leq (\mathbf{x} \odot \mathbf{y}) \oplus (\mathbf{x} \odot \mathbf{z}) . \end{aligned}$$

Da hier n beliebig war, gilt auch noch $\mathbf{x} \odot (\mathbf{y} \oplus \mathbf{z}) \leq (\mathbf{x} \odot \mathbf{y}) \oplus (\mathbf{x} \odot \mathbf{z})$. — Die umgekehrte Ungleichung wird analog bewiesen.

5 Die Argumentation von Beispiel (4) lässt sich weitgehend übernehmen: Betrachte die Mengen

$$S_n := \{\mathbf{x} \in \mathbb{D}_n \mid x > 0, x^q \leq a\} \quad (n \geq 0) .$$

Für alle $x \in S_n$ gilt $x \leq a$, und für alle $n \geq 0$ ist $S_n \subset S_{n+1}$. Die Folge

$$n \mapsto s_n := \max(S_n) \in \mathbb{D}_n \quad (n \geq 0)$$

ist daher monoton wachsend und beschränkt, besitzt also nach Satz (2.9) einen Grenzwert $s \in X$. Wir behaupten: Es gilt $s^q = a$.

┌ Betrachte ein festes $n \geq 0$. Nach (l) gibt es ein j und ein $l \geq j$ mit

$$T_n(s^q) \leq (T_j s)^q = (T_j s_l)^q \leq (T_l s_l)^q = (s_l)^q \leq a .$$

Da dies für jedes n zutrifft, folgt $s^q \leq a$.

Um nun $s^q < a$ auszuschließen, nehmen wir nach (j) an, es gäbe ein $r \in \mathbb{N}$ mit

$$s^q + \iota_r \leq a . \tag{6}$$

Nach Konstruktion von s_n gilt aber für jedes $n \geq 0$ die Ungleichung

$$a < (s_n + \iota_n)^q \leq s_n^q + (2^q - 1)\iota_n s_n^{q-1};$$

dabei haben wir $2^q - 1$ Terme der binomischen Entwicklung mit Hilfe von $\iota_n \leq 1 \leq s_n \leq s$ nach oben abgeschätzt. Hieraus folgt weiter

$$a < s^q + (2^q - 1)a\iota_n \leq s^q + 2^N \iota_n \quad (n \geq 0)$$

für ein geeignetes N . Dies steht für $n > r + N$ im Widerspruch zu (6). \square

6 Der Schnitt (A, B) wird erzeugt von einer Zahl s , die entweder zu A oder zu B gehört. Gilt $s \in A$, so ist s offensichtlich das maximale Element von A . Angenommen, B besitzt zugleich ein minimales Element t . Dann ist $s < t$. Die Zahl $m := (s + t)/2$ liegt zwischen s und t , gehört also weder A noch B an, und (A, B) wäre kein Schnitt. Analog schliesst man im Fall $s \in B$.

7 Jeder Punkt $(x, y) \in Q_n$ ist rechte obere Ecke eines Quadrats der Seitenlänge ι_n , das ganz in dem Bereich $B \subset]0, 1]^2$ liegt. Hieraus folgt sofort $\#Q_n \leq 2^n \cdot 2^n$ und damit $s_n \leq 1$ für alle $n \geq 1$. Weiter: Liegt (x, y) in Q_n , so liegen die vier Punkte

$$(x, y), \quad (x - \iota_{n+1}, y), \quad (x, y - \iota_{n+1}), \quad (x - \iota_{n+1}, y - \iota_{n+1})$$

in Q_{n+1} ; folglich ist $\#Q_{n+1} \geq 4\#Q_n$. Die Folge $n \rightarrow s_n \in \mathbb{D}$ ist daher monoton wachsend, und es existiert der $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n =: s \in \mathbb{R}$.

Die Zahl s_n ist gerade der totale Flächeninhalt der erwähnten Quadrate im Gitter der Maschenweite ι_n und ist damit ein Näherungswert für den Flächeninhalt von B . Hieraus schliesst man auf $s = \pi/4$.

Abschnitt 2.4

1 Die gegebene Menge wird im folgenden jeweils mit A bezeichnet.

a Aus Symmetriegründen genügt es, nichtnegative x zu betrachten. Die Funktion $x \mapsto x/(1+x)$ wächst auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$ von 0 gegen 1, ohne aber den Wert 1 zu erreichen. Damit ist $\inf A = \min A = 0$, $\sup A = 1$.

b Inspektion des Graphen von $x \mapsto x/(1+x)$ für $x > -1$ liefert sofort $\inf A = -\infty$, $\sup A = 1$.

c Inspektion des Graphen von $x \mapsto x + 1/x$ für $\frac{1}{2} < x < 2$ liefert sofort $\inf A = \min A = 2$ (entsprechend $x = 1$) sowie $\sup A = \frac{5}{2}$. Die Menge A besitzt kein maximales Element, da die Punkte $x = \frac{1}{2}$ und $x = 2$ von der Betrachtung ausgeschlossen sind.

d Es geht um die $x \in \mathbb{R}$, für die $(x+1)^2 < 4$ ist; denn für jedes derartige x kann noch ein (unter Umständen sehr kleines) $y \in \mathbb{R}$ gefunden werden, so

dass die angegebene Ungleichung zutrifft. Die Bedingung $(x + 1)^2 < 4$ ist äquivalent mit $|x + 1| < 2$ und beschreibt die Menge aller Punkte, die von -1 einen Abstand < 2 haben. Folglich ist $\inf A = -3$, $\sup A = 1$; Minimal- und Maximalelement gibt es nicht.

2a Aus der Rekursionsformel folgt unmittelbar

$$a_k - a_{k-1} = a_{k-1} - a_{k-2} = \dots = a_1 - a_0 = \lambda - 1 \quad (k \geq 2),$$

und durch Aufaddieren der konstanten Zuwächse erhält man

$$a_k = 1 + k(\lambda - 1) \quad (k \geq 0). \quad (3)$$

b Wie man unmittelbar an (3) abliest, hat man die folgenden drei Fälle:

$$\begin{aligned} \lambda > 1 : & \quad \inf A = \min A = 1, \quad \sup A = \infty; \\ \lambda = 1 : & \quad \inf A = \min A = \max A = \sup A = 1; \\ \lambda < 1 : & \quad \inf A = -\infty, \quad \max A = \sup A = 1. \end{aligned}$$

3 Zu vorgegebenem $x \in A$ gibt es ein $\iota_0 \in I$ mit $x \in A_{\iota_0}$. Somit gilt dann $x \leq s_{\iota_0} \leq s$; denn s_{ι_0} ist eine obere Schranke von A_{ι_0} , und s ist eine obere Schranke aller s_ι . Da hier $x \in A$ beliebig war, ist s obere Schranke von A .

Betrachte ein beliebiges $s' < s$. Nach Definition von s gibt es dann ein $\iota_0 \in I$ mit $s' < s_{\iota_0}$ (sonst wäre s nicht kleinste obere Schranke aller s_ι) und weiter ein $x \in A_{\iota_0} \subset A$ mit $s' < x$ (sonst wäre s_{ι_0} nicht kleinste obere Schranke von A_{ι_0}). Hiernach ist s' keine obere Schranke von A , d.h. s ist als kleinste obere Schranke von A erwiesen.

Abschnitt 2.5

1 Zu jeder zulässigen Folge $x = (x_1, x_2, x_3, \dots)$ gibt es ein minimales $r \geq 0$ mit $x_k = 0$ ($k > r$). Dieses r ist die **wahre Länge** der betrachteten Folge. Die Folge $(0, 0, 0, \dots)$ hat die wahre Länge $r = 0$. Eine Folge der wahren Länge $r \geq 1$ lässt sich als Element von \mathbb{N}^r auffassen, und damit wird die Menge Z aller zulässigen Folgen eine Teilmenge der Vereinigung $\bigcup_{r \geq 1} \mathbb{N}^r$, wobei $0 \in \mathbb{N}^1$ die Folge $(0, 0, 0, \dots)$ vertreten soll. Diese Vereinigung ist abzählbar und damit auch Z .

Die angedeutete Nummerierung von Z mit Hilfe von Primzahlpotenzen wird folgendermassen erhalten: Es bezeichne p_k ($k \geq 1$) die k -te Primzahl. Dann erhält die Folge $x \in Z$ die (endliche!) Nummer

$$\nu(x) := p_1^{x_1} \cdot p_2^{x_2} \cdot p_3^{x_3} \cdot \dots$$

Der Satz von der eindeutigen Primfaktorzerlegung garantiert, dass die so definierte Abbildung $\nu: Z \rightarrow \mathbb{N}_{\geq 1}$ bijektiv ist.

Die Menge *aller* Folgen von natürlichen Zahlen ist überabzählbar, denn sie enthält $\mathbb{B}^{\mathbb{N}}$ als Teilmenge.

2 Die im Beweis von Satz (2.24) angegebene Funktion $\psi: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ weist dem Punkt $(0, r)$ die Zahl $r(r+1)/2$ zu und dem Punkt $(0, r+1)$ entsprechend die Zahl $(r+1)(r+2)/2$. Die Punkte auf der Schrägen $k+l=r$ erhalten demnach Zahlenwerte n im Bereich

$$\frac{r(r+1)}{2} \leq n < \frac{(r+1)((r+1)+1)}{2}.$$

Hiernach ist die Nummer der Schrägen, auf die n fällt, das grösste ganzzahlige r mit $r(r+1)/2 \leq n$ bzw. mit $(r+\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} \leq 2n$. Die gewünschte Abzählung $\phi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^2$ lässt sich daher folgendermassen beschreiben:

$$\phi: n \mapsto \begin{cases} k = \phi_1(n) := n - r(r+1)/2 \\ l = \phi_2(n) := r(r+3)/2 - n \end{cases}, \quad r := \lfloor \sqrt{2n + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \rfloor.$$

3 Für die Zwecke dieser Aufgabe definieren wir die **Norm** eines Bruchs $\frac{p}{q}$ durch $\left\| \frac{p}{q} \right\| := p+q$. Der Bruch $\frac{p}{q}$ ($\neq \frac{1}{1}$) stammt entweder von $\frac{p}{q-p}$ ab (falls $q > p$) oder von $\frac{p-q}{q}$ (falls $q < p$). In beiden Fällen hat der "Elternbruch" kleinere Norm.

a $\frac{1}{1}; \quad \frac{1}{2}, \frac{2}{1}; \quad \frac{1}{3}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}; \quad \frac{1}{4}, \frac{4}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{2}, \frac{2}{5}, \frac{5}{3}, \frac{1}{4}, \frac{4}{3}.$

b Treten ungekürzte Brüche $\frac{p}{q}$ auf, so gibt es darunter einen mit minimaler Norm; dabei sei $d > 1$ ein gemeinsamer Teiler von p und q . Wie leicht zu sehen, sind dann auch Zähler und Nenner des "Elternbruchs" durch d teilbar. Da der "Elternbruch" kleinere Norm hat, entsteht ein Widerspruch.

c Unter den mehrfach auftretenden Brüchen $\frac{p}{q}$ gibt es einen mit minimaler Norm. Ist z.B. $q > p$, so kann dieser Bruch, wo immer er erscheint, nur von $\frac{p}{q-p}$ abstammen, also müsste auch $\frac{p}{q-p}$ mehrfach auftreten. Dieser Bruch hat aber kleinere Norm als $\frac{p}{q}$.

d Unter den nicht auftretenden Brüchen $\frac{p}{q}$ gibt es einen mit minimaler Norm. Ist z.B. $q > p$, so dürfte dann auch $\frac{p}{q-p}$ nicht auftreten. Dieser Bruch hat aber kleinere Norm als $\frac{p}{q}$.

4 Gemäss dem Resultat von Aufgabe 1 gibt es nur abzählbar viele Gleichungen der betrachteten Art. Eine Gleichung vom Grad n besitzt höchstens n verschiedene Lösungen. Die Vereinigung von abzählbar vielen endlichen Mengen ist abzählbar.

5 Das ist nicht so einfach und mit Hilfe einer "endlichen Konstruktion" nicht zu schaffen. Hier je ein Lösungsvorschlag:

a Die Abbildung

$$f(x) := \begin{cases} x + 1 & (x \in \mathbb{N}), \\ x & (x \notin \mathbb{N}). \end{cases}$$

bringt den Ursprung zum Verschwinden.

b Als Kreislinie wählen wir den Einheitskreis in der (x, y) -Ebene, bijektiv parametrisiert durch den Polarwinkel ϕ , $0 \leq \phi < 2\pi$. Wir müssen also eine bijektive Abbildung $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, 2\pi[$ produzieren.

Die Exponentialfunktion \exp bildet \mathbb{R} bijektiv auf $\mathbb{R}_{>0}$ ab, und die Hilfsabbildung

$$\psi(t) := \begin{cases} t - 1 & (t \in \mathbb{N}_{\geq 1}), \\ t & (t \notin \mathbb{N}_{\geq 1}) \end{cases}$$

bildet weiter $\mathbb{R}_{>0}$ bijektiv auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$ ab. Schliesslich definieren wir die bijektive Abbildung $\chi: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow [0, 2\pi[$ durch $\chi(t) := 4 \arctan(t)$. Dann leistet $f := \chi \circ \psi \circ \exp$ das Verlangte.

Abschnitt 2.6

1a $\% = \frac{1-i}{2} + \frac{2-i}{5} + \frac{3-i}{10} = \frac{6}{5} - \frac{4}{5}i.$

b $\% = \frac{(2-3i)(2-i)}{5} + \frac{(1-i)(1-3i)}{10} = -2i.$

2 Die Gleichung $z^2 = 0$ besitzt nur die Lösung $z = 0$. Im Weiteren sei also $c \neq 0$. Wir schreiben $z = x + iy$ und erhalten wegen $z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$ durch Trennung von Real- und Imaginärteil die beiden reellen Gleichungen

$$x^2 - y^2 = a, \quad 2xy = b. \tag{4}$$

Ist $b = 0$, d.h. c eine reelle Zahl, so folgt $x = 0$ oder $y = 0$. Ist dabei $a > 0$, so ist notwendigerweise $x^2 = a$ und $y = 0$, und wir erhalten $z = \pm\sqrt{a}$, wie erwartet. Ist aber $b = 0$ und $a < 0$, so muß $x = 0$ und $y^2 = -a = |a|$ sein, und es folgt $z = \pm i\sqrt{|a|}$.

Bsp: $z^2 = -32 \implies z = \pm 4i\sqrt{2}.$

Es sei jetzt $b \neq 0$. Wegen

$$x^2 + y^2 = |z|^2 = |z^2| = |c| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

ergeben sich im Verein mit der ersten Gleichung (4) die Formeln

$$x^2 = \frac{1}{2}(\sqrt{a^2 + b^2} + a), \quad y^2 = \frac{1}{2}(\sqrt{a^2 + b^2} - a) \quad (5)$$

(beide Klammern sind > 0 , unabhängig vom Vorzeichen von a). Ist $a \geq 0$, so erhält man x aus der ersten Gleichung (5) und anschliessend y aus der zweiten Gleichung (4):

$$x = \pm \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{a^2 + b^2} + a)}, \quad y = \frac{b}{2x}.$$

Im Fall $a < 0$ berechnet man vorteilhafter Weise erst das y aus (5) und dann das x aus (4):

$$y = \pm \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{a^2 + b^2} - a)}, \quad x = \frac{b}{2y}.$$

In jedem Fall erhält man die beiden komplexen Lösungen

$$z_{\pm} = \pm \left(\sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{a^2 + b^2} + a)} + i \operatorname{sgn} b \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{a^2 + b^2} - a)} \right)$$

der ursprünglichen Gleichung $z^2 = c$. Die beiden Punkte z_+ und z_- liegen spiegelbildlich zum Ursprung.

Anmerkung: Wir haben an sich nur das folgende bewiesen:

$$z^2 = c \implies z = z_+ \vee z = z_-.$$

Strenggenommen müßte man noch verifizieren, daß tatsächlich $z_+^2 = z_-^2 = c$ ist; siehe Beispiel 1.2.①.

3a Das Bild von $\mathbb{R}_{>0}$ ist $\mathbb{R}_{>0}$, und das Bild von $\mathbb{R}_{<0}$ ist $\mathbb{R}_{<0}$; jeweils unter Umkehrung des Richtungssinns.

b Das Bild von $i\mathbb{R}_{>0}$ ist $i\mathbb{R}_{<0}$, und das Bild von $i\mathbb{R}_{<0}$ ist $i\mathbb{R}_{>0}$; jeweils unter Umkehrung des Richtungssinns.

c Der Kreis vom Radius $r > 0$ geht in den Kreis vom Radius $\frac{1}{r}$ über; dabei wird der Umlaufssinn umgekehrt: Man erhält den Bildpunkt $w := 1/z$, indem man den Strahl $0\bar{z}$ mit dem Kreis vom Radius $1/|z|$ schneidet.

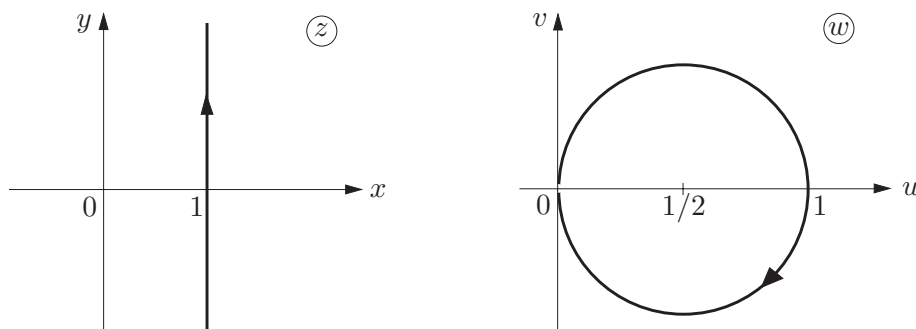


Fig. 2.4

d Das Bild der Geraden $x = 1$ besitzt die Parameterdarstellung

$$y \mapsto \frac{1}{1 + iy} \quad (-\infty < y < \infty),$$

oder reell geschrieben:

$$y \mapsto \begin{cases} u(y) := \frac{1}{1 + y^2} \\ v(y) := \frac{-y}{1 + y^2} \end{cases} \quad (-\infty < y < \infty).$$

Wie man leicht nachrechnet, ist $(u(y) - \frac{1}{2})^2 + v^2(y) \equiv \frac{1}{4}$; ferner gilt

$$\lim_{y \rightarrow \pm\infty} u(y) = \lim_{y \rightarrow \pm\infty} v(y) = 0.$$

Das Bild der Geraden $x = 1$ ist daher der Kreis vom Radius $\frac{1}{2}$ mit Mittelpunkt $\frac{1}{2}$ in der w -Ebene, ohne den Ursprung; siehe die Fig. 2.4.

4 Die Bedingung $|z - 1| \cdot |z + 1| = 1$ beschreibt die Menge L derjenigen $z \in \mathbb{C}$, für die das Produkt der Abstände von den beiden Punkten 1 und -1 gleich 1 ist. L und der Bereich B sind in der Fig. 2.5 dargestellt; siehe auch das Beispiel 3.1.⑤.

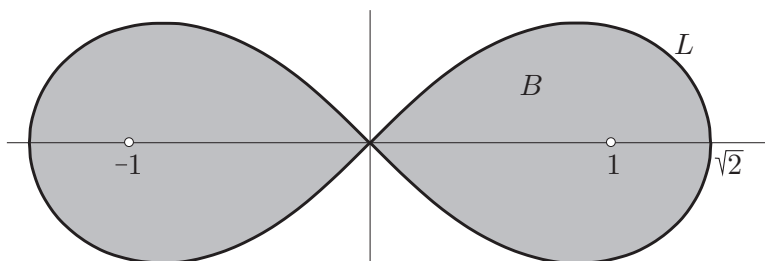


Fig. 2.5

5 Die beiden Vektoren $\mathbf{z}_i = (x_i, y_i)$ spannen ein Parallelogramm P auf, dessen Flächeninhalt nach den Regeln der Vektorrechnung gegeben ist durch

$$\mu(P) = |\mathbf{z}_1 \times \mathbf{z}_2| = |x_1 y_2 - y_2 x_1| = |\operatorname{Im}(z_1 \bar{z}_2)|.$$

Wegen $\mu(\Delta) = \frac{1}{2}\mu(P)$ folgt die Behauptung.

Abschnitt 2.7

1 Es gelten offensichtlich die Identitäten

$$\begin{aligned} \mathbf{z} \cdot \mathbf{w} &= \overline{\mathbf{w} \cdot \mathbf{z}}, & |\mathbf{z}|^2 &:= \sum_{k=1}^n |z_k|^2 = \mathbf{z} \cdot \mathbf{z}, \\ \mathbf{z} \cdot (\mathbf{w} + \mathbf{w}') &= \mathbf{z} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{z} \cdot \mathbf{w}', & (\mathbf{z} + \mathbf{z}') \cdot \mathbf{w} &= \mathbf{z} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{z}' \cdot \mathbf{w}, \\ (\lambda \mathbf{z}) \cdot \mathbf{w} &= \bar{\lambda}(\mathbf{z} \cdot \mathbf{w}), & \mathbf{z} \cdot (\lambda \mathbf{w}) &= \lambda(\mathbf{z} \cdot \mathbf{w}). \end{aligned}$$

Zum Beweis der Schwarzschen Ungleichung betrachtet man wie im reellen Fall den Hilfsvektor $\mathbf{z} := |\mathbf{x}|^2 \mathbf{y} - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) \mathbf{x}$ und berechnet

$$|\mathbf{z}|^2 = |\mathbf{x}|^2 (|\mathbf{x}|^2 |\mathbf{y}|^2 - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})(\mathbf{y} \cdot \mathbf{x})).$$

Hieraus folgt $|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}| |\mathbf{y}|$ wie im reellen Fall.

2 Vier Punkte im Raum bilden genau dann ein Parallelogramm, wenn die Mittelpunkte der Verbindungsstrecken gegenüberliegender Punkte zusammenfallen. Sieht man A und B als gegenüberliegend an, so muss also

$$\frac{1}{2}(C + D) = \frac{1}{2}(A + B)$$

gelten, wobei wir die Punkte mit ihren Ortsvektoren identifiziert haben. Dies liefert $D = A + B - C = (4, 4, -1)$. Sieht man B und C als gegenüberliegend an, so erhält man analog $D = B + C - A = (-6, 4, 1)$; als dritte Variante ergibt sich $D = C + A - B = (2, -2, -3)$.

3 Es sei $ABCD$ die zyklische Reihenfolge der vier Ecken, und es seien M_{AB} , M_{BC} , M_{CD} , M_{DA} die vier Seitenmitten. Dann gilt

$$\frac{1}{2}(M_{AB} + M_{CD}) = \frac{1}{4}(A + B + C + D) = \frac{1}{2}(M_{BC} + M_{DA}).$$

Die vier Seitenmitten bilden daher ein Parallelogramm (vgl. 2); insbesondere liegen sie in einer Ebene.

4 Die Additionsfigur ist ein gleichseitiges Dreieck. Die drei Vektoren liegen daher in einer Ebene und schliessen unter sich Winkel von 120° ein.

Lösungen zu Kapitel 3

Abschnitt 3.1

1 Die Funktion f ist im Punkt $(-1, 0)$ nicht definiert und nimmt nur Werte $C =: \rho^2$, $\rho \geq 0$, an. Die Gleichung

$$\sqrt{(x-1)^2 + y^2} = \rho \sqrt{(x+1)^2 + y^2} \quad (1)$$

beschreibt die Menge K der Punkte (x, y) , die vom Punkt $(1, 0)$ ρ -mal so weit entfernt sind wie vom Punkt $(-1, 0)$. Diese Punktmenge ist ein Kreis, der sogenannte **Apolloniuskreis** zu den gegebenen Daten. Aus (1) folgt nämlich

$$(\rho^2 - 1)(x^2 + y^2) + 2(\rho^2 + 1)x + \rho^2 - 1 = 0,$$

und dies ist eine Kreisgleichung, ausgenommen im Fall $\rho = 1$, wo K die Mittelsenkrechte $\{(x, y) | x = 0\}$ der beiden Punkte $(\pm 1, 0)$ ist. In der Fig. 3.1 ist der Apolloniuskreis zu $\rho := 3$ dargestellt. Dieser Kreis schneidet die x -Achse in den Punkten $x = -2$ und $x = -\frac{1}{2}$.

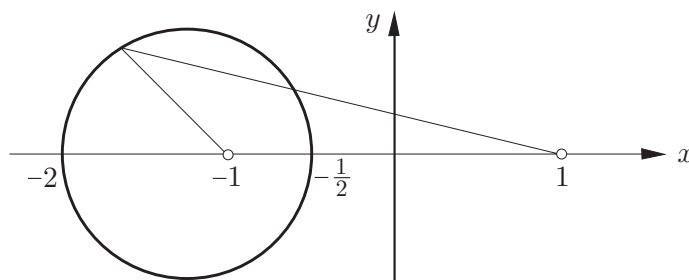


Fig. 3.1

2 Es sei $P := (x, y)$ gegeben (Fig. 3.2). Ist $x \leq 0$ und $y \geq 0$, so ist $(0, 1)$ der nächstgelegene Punkt vom γ . Ist aber $x \geq 0$, so ist der Schnittpunkt des Strahls OP mit γ der nächstgelegene Punkt von γ . Damit wird

$$f(x, y) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + (|y| - 1)^2} & (x \leq 0), \\ |\sqrt{x^2 + y^2} - 1| & (x \geq 0). \end{cases}$$

Abschnitt 3.2

1 Es gibt eine Umgebung U des Punktes x_0 mit $|f(x) - f(x_0)| < 1$ für alle $x \in U$. Dann gilt

$$|f(x)| \leq M := |f(x_0)| + 1$$

für alle $x \in U$.

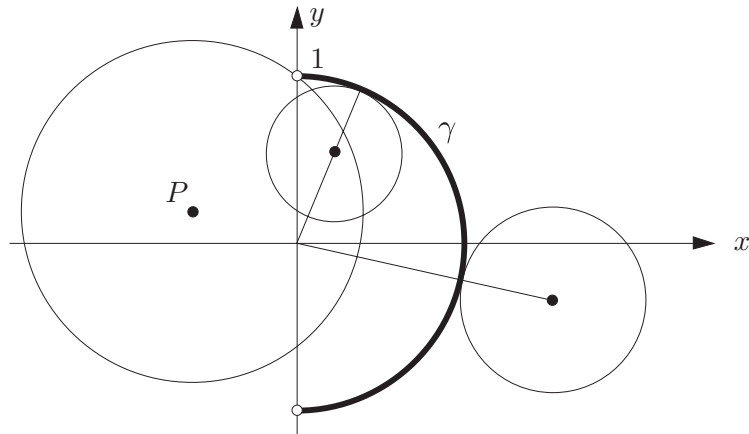


Fig. 3.2

2 Es sei $C \geq 0$ eine gemeinsame Lipschitzkonstante für f und g . Dann gilt

$$|(f(x) + g(x)) - (f(y) + g(y))| \leq |f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)| \leq 2C|x - y| .$$

Weiter sei $M := \max\{|f(a)|, |g(a)|\} + C(b - a)$. Dann gilt

$$|f(x)| \leq |f(a)| + |f(x) - f(a)| \leq |f(a)| + C|x - a| \leq M$$

für alle $x \in [a, b]$ und analog $|g(x)| \leq M$ für alle $x \in [a, b]$. Hieraus folgt

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - f(y)g(y)| &= |f(x)(g(x) - g(y)) + g(y)(f(y) - f(x))| \\ &\leq |f(x)||g(x) - g(y)| + |g(y)||f(y) - f(x)| \\ &\leq 2MC|x - y| . \end{aligned}$$

Um zu beweisen, dass $1/g(x)$ lipstetig ist, benötigen wir den erst später behandelten Satz **(4.15)**: Ist $g(x) \neq 0$ auf dem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$, so gibt es eine positive untere Schranke $\delta > 0$ mit $|g(x)| \geq \delta$ für alle $x \in [a, b]$. Mit Hilfe dieses δ können wir folgendermassen argumentieren:

$$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(y)} \right| = \frac{|g(y) - g(x)|}{|g(x)||g(y)|} \leq \frac{C}{\delta^2} |x - y| \quad \forall x, \forall y \in [a, b] .$$

Ist der betrachtete Definitionsbereich D nicht kompakt (s.u.), so braucht $1/g(x)$ nicht lipstetig zu sein: Die Funktion $x \mapsto x$ ist auf $]0, 1]$ ungleich 0 und lipstetig; der Graph von $x \mapsto 1/x$ ($0 < x \leq 1$) besitzt aber beliebig steile Sekanten.

Sind f und g lipstetig auf dem unbeschränkten Intervall I , so braucht $f \cdot g$ auf I nicht lipstetig zu sein. Betrachte hierzu das Beispiel $f(x) = g(x) := x$ auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$.

3 a Aus

$$x' \leq x + |x' - x|, \quad y' \leq y + |y' - y| \quad (2)$$

folgt

$$\max\{x', y'\} \leq \max\{x, y\} + \max\{|x' - x|, |y' - y|\},$$

und hieraus ergibt sich aus Symmetriegründen

$$|\max\{x', y'\} - \max\{x, y\}| \leq \max\{|x' - x|, |y' - y|\} \leq \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}.$$

Die Funktion \vee ist somit lipstetig. Aus (2) folgt aber auch

$$\min\{x, y\} \geq \min\{x', y'\} - \max\{|x' - x|, |y' - y|\}$$

und somit wie vorher

$$|\min\{x', y'\} - \min\{x, y\}| \leq \max\{|x' - x|, |y' - y|\} \leq \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}.$$

b Die Funktion h lässt sich als Zusammensetzung der stetigen Abbildungen $x \mapsto (f(x), g(x))$ und \vee auffassen. Das sup von unendlich vielen stetigen Funktionen braucht aber nicht stetig zu sein: Betrachte die stetigen Funktionen

$$f_n(x) := 1 - x^n \quad (0 \leq x \leq 1).$$

Ihr Supremum

$$\sup_{n \geq 0} f_n(x) = \begin{cases} 1 & (0 \leq x < 1) \\ 0 & (x = 1) \end{cases}$$

ist an der Stelle 1 unstetig.

4 a Ist $x < 0$, so ist $x^2 > 0$. Es genügt daher, zu zeigen, dass f auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$ konstant ist. Gilt $f(x) = \alpha$ für alle $x > 0$, so muss auch $f(0) = \alpha$ sein, wenn f an der Stelle 0 stetig sein soll. Es genügt also, zu zeigen, dass f auf $\mathbb{R}_{> 0}$ konstant ist. Es sei $f(1) =: \alpha$, und es sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Da f an der Stelle 1 stetig ist, gibt es ein $\rho < 1$ und ein $\sigma > 1$ mit

$$|f(x) - \alpha| < \varepsilon \quad (\rho < x < \sigma).$$

Aufgrund der (wiederholt angewandten) Funktionalgleichung gilt dann

$$|f(x) - \alpha| < \varepsilon \quad (\rho^{2^n} < x < \sigma^{2^n}) \quad (3)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Nun streben aber die ρ^{2^n} mit $n \rightarrow \infty$ gegen 0 und die σ^{2^n} gegen ∞ . Es sei nun ein beliebiges $x > 0$ vorgegeben. Dann liegt x für hinreichend grosses n im Gültigkeitsbereich von (3), somit gilt $|f(x) - \alpha| < \varepsilon$. Dies trifft für jedes $\varepsilon > 0$ zu; folglich ist in Wirklichkeit $f(x) = \alpha$. Da hier $x > 0$ beliebig war, ergibt sich die Behauptung.

b Wähle eine beliebige nichtkonstante stetige Funktion $f_0: [2, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(2) = f(4)$, zum Beispiel $f_0(x) := (x - 3)^2$, und definiere die Funktionen

$$f_n: [2^{2^n}, 2^{2^{n+1}}] \rightarrow \mathbb{R} \quad (n \geq 1)$$

rekursiv durch die Vorschrift

$$f_n(x) := f_{n-1}(\sqrt{x}) \quad (n \geq 1).$$

Da sich die Definitionsintervalle der f_n nahtlos aneinanderreihen und an den Nahtstellen keine Wertzweideutigkeiten entstehen, erhält man durch "Zusammenlegen" aller f_n ($n \geq 0$) eine nichtkonstante stetige Funktion $f: [2, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$, die jener Funktionalgleichung genügt.

5 Wenn der Sprung an einer Stelle $\xi \notin \mathbb{Q}$, zum Beispiel bei $\xi := 1/\sqrt{2}$ stattfindet, so macht es nichts. Wir definieren also

$$f(x) := \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Q} \wedge x < \xi, \\ 1 & x \in \mathbb{Q} \wedge x > \xi. \end{cases}$$

Auch wenn x noch so nahe bei ξ liegt, gibt es immer eine Umgebung von x , auf der f konstant ist. Somit ist f an jeder Stelle $x \in \mathbb{Q}$ stetig.

6 a Es gibt ein $\varepsilon_0 > 0$ und zu noch so kleinem $\delta > 0$ ein $x \in]1 - \delta, 1 + \delta[$ mit $|f(x) - f(1)| \geq \varepsilon_0$.

b Es gibt ein $\varepsilon_0 > 0$ und zu noch so kleinem $\delta > 0$ ein $x \in]1 - \delta, 1 + \delta[$, $x \neq 1$, mit $|f(x) - 2| \geq \varepsilon_0$.

7 Die Einschränkungen der angegebenen Funktionsterme auf irgendwelche Teilintervalle von \mathbb{R} sind stetig. Nach Satz **(3.8)** müssen wir daher nur dafür sorgen, dass an den Stellen $x = -1$ und $x = 1$ keine Sprünge entstehen. Dies liefert für α und β die beiden Gleichungen

$$1 + \alpha + \beta = -(\alpha + \beta), \quad \alpha + \beta = 1 + \alpha - \beta$$

mit der Lösung $\alpha = -1$, $\beta = \frac{1}{2}$. Damit wird $f(-1) = \frac{1}{2}$, $f(1) = -\frac{1}{2}$. Die Fig. 3.3 zeigt den Graphen von f .

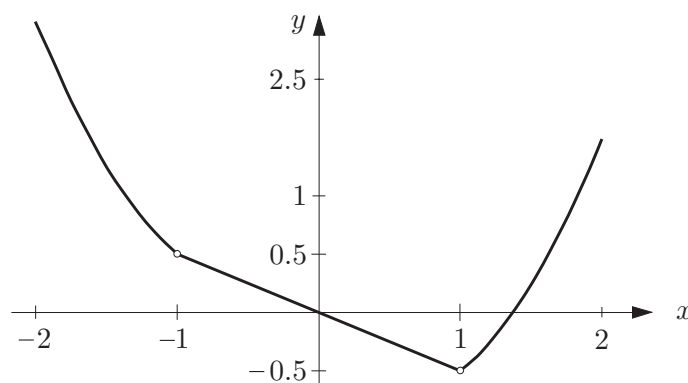


Fig. 3.3

Abschnitt 3.3

1 Die Fig. 3.4 zeigt die Funktionen

$$g_n(x) := \begin{cases} 1 - nx & (0 \leq x \leq 1/n) \\ nx - 1 & (1/n \leq x \leq 1) \end{cases}$$

sowie $f(x) := \inf_{n \geq 0} g_n(x)$. Der Schnittpunkt von g_n und g_{n+1} hat die Koordinaten $\left(\frac{2}{2n+1}, \frac{1}{2n+1}\right)$. Die Funktion f ist auf $]0, 1]$ stückweise linear und somit stetig. Der Figur entnimmt man ausserdem $0 \leq f(x) \leq x/2$, und dies beweist $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = 0$.

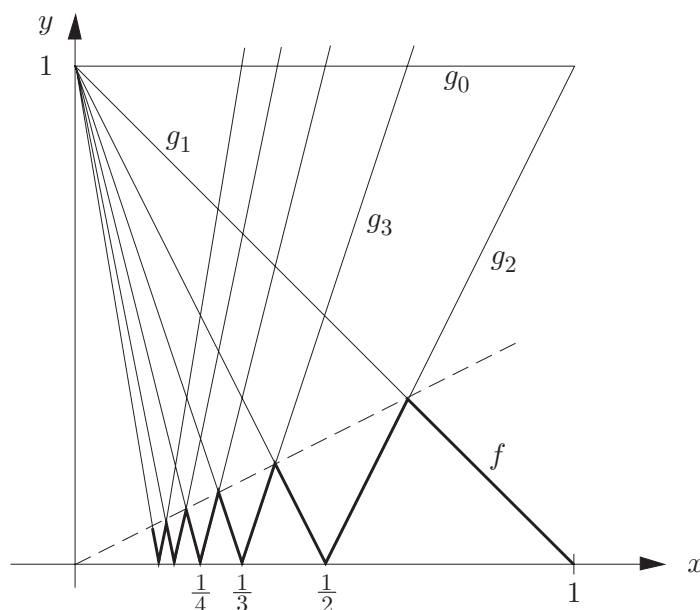


Fig. 3.4

2a Der an der Stelle $x = -3$ verschwindende Faktor lässt sich herauskürzen:

$$\% = \lim_{x \rightarrow -3-} \frac{(x+3)(x^2 - 3x + 9)}{(x+3)(x-3)(x^2 + 9)} = \lim_{x \rightarrow -3-} \frac{x^2 - 3x + 9}{(x-3)(x^2 + 9)} = \frac{27}{(-6) \cdot 18} = -\frac{3}{4}.$$

$$b \quad \% = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^{p-1} + \dots + x + 1)}{(x-1)(x^{q-1} + \dots + x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{p-1} + \dots + x + 1}{x^{q-1} + \dots + x + 1} = \frac{p}{q}.$$

c Der Limes existiert nicht.

d Man hat

$$g(x) := \frac{2x-1}{(\sqrt{x}+1)^3} = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{2 - \frac{1}{x}}{\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^3}$$

und folglich $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$. Da \sin an der Stelle 0 stetig ist, folgt $\% = \lim_{x \rightarrow \infty} \sin(g(x)) = \sin(0) = 0$.

$$e \quad \% = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 14x + 24}{(x-2) + (x^2 - 4)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-12}{1+(x+2)} = -2.$$

$$f \quad \% = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 14x + 24}{-(x-2) - (x^2 - 4)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-12}{-1-(x+2)} = 2.$$

g Durch Erweitern mit $\sqrt{x(x+a)} + x$ erhält man

$$\sqrt{x(x+a)} - x = \frac{ax}{\sqrt{x(x+a)} + x} = \frac{a}{\sqrt{1+a/x} + 1}.$$

Damit ergibt sich $\% = a/2$.

3 Wird der angegebene Ausdruck $F(x)$ mit $N(x) := \sqrt{\dots} + (\alpha x^2 + \beta x + \gamma)$ erweitert, so erhält man $F(x) = Z(x)/N(x)$ mit

$$\begin{aligned} Z(x) &= x^4 - 2x^2 + 7x + 1 - (\alpha x^2 + \beta x + \gamma)^2 \\ &= (1 - \alpha^2)x^4 - 2\alpha\beta x^3 - (2 + \beta^2 + 2\alpha\gamma)x^2 + (7 - 2\beta\gamma)x - \gamma^2. \end{aligned}$$

Der Nenner $N(x)$ ist (ausser im Fall $\alpha = -1$) für $x \rightarrow \infty$ von der Grössenordnung x^2 . Um $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 0$ zu erzwingen, müssen wir daher die Parameter α, β, γ so wählen, dass das Zählerpolynom $Z(x)$ einen Grad ≤ 1 hat. Dies lässt sich durch $\alpha = 1, \beta = 0, \gamma = -1$ bewerkstelligen.

4 Ist $\beta = \alpha$, so besitzt $f(x) = 2x^\alpha$ für $x \rightarrow \infty$ genau dann eine Asymptote, wenn $\alpha = 1$ oder $\alpha = 0$ oder $\alpha < 0$ ist. In den ersten beiden Fällen stimmt der Graph von f mit der Asymptote überein, und für $\alpha < 0$ ist $y = 0$ die Asymptote.

Im weiteren setzen wir $\alpha > \beta$ voraus. Aus $f(x) - (mx+c) \rightarrow 0$ ($x \rightarrow \infty$) folgt $m = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)/x$. Für die Existenz einer Asymptote ist daher *notwendig*, dass der Limes

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} x^{\alpha-1}(1+x^{\beta-\alpha}) =: m$$

existiert. Damit ist $\alpha > 1$ schon ausgeschlossen. Im Fall $\alpha = 1$ ergibt sich $m = 1$. Damit die Asymptote existiert, muss nun auch der Limes $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^\beta =: c$ existieren, und das ist nur für $\beta \leq 0$ der Fall.

Im Fall $\alpha < 1$ ergibt sich $m = 0$. Damit die Asymptote existiert, muss nun auch $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^\alpha(1+x^{\beta-\alpha}) =: c$ existieren, und dies ist nur für $\alpha \leq 0$ der Fall.

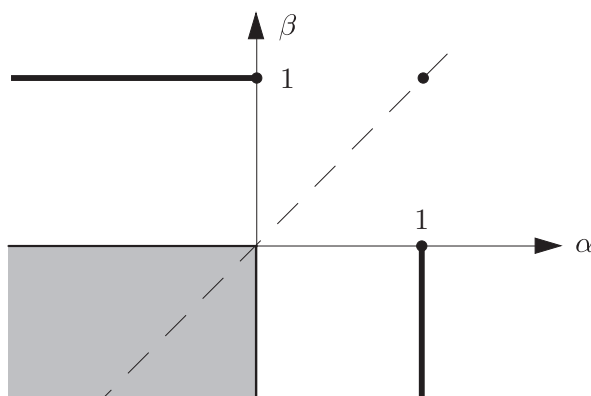


Fig. 3.5

Unter Berücksichtigung der Symmetrie $\alpha \leftrightarrow \beta$ erhalten wir damit als Menge der Paare (α, β) , für die eine Asymptote existiert, die folgende Vereinigung (Fig. 3.5):

$$\{(1, 1)\} \cup \{(1, \beta) \mid \beta \leq 0\} \cup \{(\alpha, 1) \mid \alpha \leq 0\} \cup \{(\alpha, \beta) \mid \alpha \leq 0, \beta \leq 0\} .$$

Abschnitt 3.4

1 Die ganzzahlige Folge x_k konvergiere gegen den Punkt $\xi \in \mathbb{R}$. Es gibt höchstens *eine* ganze Zahl $j \in U_{1/2}(\xi)$. Nach Annahme über die Folge x_k gibt es ein n_0 mit

$$x_k \in U_{1/2}(\xi) \cap \mathbb{Z} \quad (k \geq n_0) .$$

Somit gilt $x_k = j$ für alle $k \geq n_0$; überdies ist $\xi = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = j$.

2 Wir müssen ausdrücken, dass kein $\xi \in \mathbb{R}$ als Limes in Frage kommt. Also: Zu jedem $\xi \in \mathbb{R}$ gibt es ein $\varepsilon_0 > 0$ und beliebig grosse k mit $|x_k - \xi| \geq \varepsilon_0$.

Mit Hilfe des Cauchy-Kriteriums (4.2) geht es wesentlich einfacher: Es gibt ein $\varepsilon_0 > 0$ und beliebig grosse m, n mit $|x_m - x_n| \geq \varepsilon_0$.

$$3a \quad \% = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3 - 4/n)(1 + 1/n^2)}{7(2 + 10\,000/n^2)} = \frac{3 \cdot 1}{7 \cdot 2} = \frac{3}{14} .$$

$$b \quad \% = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + 1/n} + 1} = 0 .$$

$$c \quad \% = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot a/n}{1 + \sqrt{1 - a/n}} = \frac{a}{2} .$$

d Mit Hilfe der Bernoullischen Ungleichung (2.2) ergibt sich

$$1 - n \cdot \frac{1}{n^2} \leq \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \leq 1 \quad (n \geq 1) .$$

Hier strebt die linke Seite mit $n \rightarrow \infty$ gegen 1; somit ist $\% = 1$.

4a Für alle $n \geq 1$ ist $0 < x_n = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{1 + 1/n + 1/n^3} < \frac{1}{n^2}$. Um $|x_n| < \varepsilon$ zu garantieren, reicht es daher, dafür zu sorgen, dass $1/n^2 < \varepsilon$ wird. Dies wird durch

$$n > n_0(\varepsilon) := \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$$

sichergestellt.

b Für alle $n \geq 1$ gilt $|x_n| \leq \frac{2}{\sqrt{n}}$. Um $|x_n| < \varepsilon$ zu garantieren, reicht es daher, dafür zu sorgen, dass $2/\sqrt{n} < \varepsilon$ wird. Dies wird durch

$$n > n_0(\varepsilon) := \frac{4}{\varepsilon^2}$$

sichergestellt.

c Für alle $n \geq 1$ ist $0 < x_n = \frac{1/\sqrt{n} + 1}{n^{3/2}} \leq \frac{2}{n^{3/2}}$. Um $|x_n| < \varepsilon$ zu garantieren, reicht es daher, $2/n^{3/2} < \varepsilon$ zu erfüllen. Dies wird durch

$$n > n_0(\varepsilon) := \left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^{2/3}$$

sichergestellt.

5a Für $n \geq 8$ gilt $|4n + 8i| \leq 4n + 8 \leq 5n$. Weiter ist

$$q := \left| \frac{8}{9} + \frac{4}{9}i \right| = \frac{\sqrt{80}}{9} < 1.$$

Damit ergibt sich die Abschätzung $|z_n| \leq 5^9 n^9 q^n$ ($n \geq 8$), und nach Rechenregel **(3.17)**(f) sowie Beispiel 3.4.③ folgt $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$.

b Um ein derartiges n_0 zu finden, müssen wir die Hilfsfunktion

$$f(n) := 5^9 n^9 q^n \quad (n \geq 0)$$

untersuchen. Zeichnet man den Graphen von f auf, so stellt man fest, dass f an der Stelle $n = 1449$ den Maximalwert $6.786 \dots \cdot 10^{30}$ erreicht, von da an monoton abnimmt und für $n_0 = 17610$ zum ersten Mal < 0.001 wird.

6a Für alle $n \geq 2$ gilt $1 \leq \sqrt[n]{n^4 - n^2 + 2} \leq (\sqrt[n]{n})^4$; folglich ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^4 - n^2 + 2} = 1.$$

Weiter ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{2n+1} = \frac{1}{2}.$$

Die Funktion $n \mapsto \sin(\pi n/2)$ ist periodisch mit der Periode 4 und nimmt für $0 \leq n < 4$ die Werte 0, 1, 0 und -1 an; analog ist $n \mapsto \sin(2\pi n/3)$ periodisch mit der Periode 3 und nimmt für $0 \leq n < 3$ die Werte 0, $\sqrt{3}/2$ und $-\sqrt{3}/2$ an. Da die beiden Perioden teilerfremd sind, treten alle 9 möglichen Wertkombinationen periodisch mit der Periode 12 auf. Damit resultieren die folgenden 9 Häufungspunkte:

$$0, \quad \frac{\sqrt{3}}{4}i, \quad -\frac{\sqrt{3}}{4}i, \quad 1, \quad 1 + \frac{\sqrt{3}}{4}i, \quad 1 - \frac{\sqrt{3}}{4}i, \quad -1, \quad -1 + \frac{\sqrt{3}}{4}i, \quad -1 - \frac{\sqrt{3}}{4}i.$$

b Ist $0 < |a| < 1$, so gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{2n} = 0$ und folglich

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{2n} - 1}{a^{2n} + 1} = -1.$$

Ist $|a| > 1$, so gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{-2n} = 0$ und folglich

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - a^{-2n}}{1 + a^{-2n}} = 1.$$

Im Fall $a = \pm 1$ ist $a^{2n} - 1 = 0$ und $a^{2n} + 1 = 2$ für alle n . Folglich ist dann $x_n = 0$ für alle n , und es ergibt sich $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

7a Mit $(\alpha, \beta) := (2, 5)$ resultiert die Folge $(2, 5, 3, \frac{4}{5}, \frac{3}{5}, 2, 5, \dots)$, und mit $(\alpha, \beta) := (-4, 1)$ resultiert $(-4, 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -3, -4, 1, \dots)$. In beiden Fällen wird die entstehende Folge periodisch mit Periode 5. Dieser Sachverhalt gilt allgemein, wie sich durch Nachrechnen mit variablen Anfangswerten α, β ergibt:

$$\left(\alpha, \beta, \frac{1+\beta}{\alpha}, \frac{1+\alpha+\beta}{\alpha\beta}, \frac{1+\alpha}{\beta}, \alpha, \beta, \dots \right). \quad (4)$$

b In (4) erscheinen zwar nur die Nenner α und β ; bei der Berechnung wurde aber stillschweigend $1 + \alpha \neq 0$ und $1 + \beta \neq 0$ vorausgesetzt. Folglich müssen 0 und -1 sowohl für α wie für β ausgeschlossen werden. Die Menge der ausgeschlossenen Anfangsdaten besteht demnach aus zwei Paaren von achsenparallelen Geraden in der (α, β) -Ebene.

8a Es sei $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{2k} =: \xi_0$, $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{2k+1} =: \xi_1$ und $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{5k} =: \xi_5$. Die Folge (x_{10k}) ist eine Teilfolge sowohl von (x_{2k}) wie von (x_{5k}) , konvergiert also gegen $\xi_0 = \xi_5$. Analog ist die Folge (x_{10k+5}) eine Teilfolge sowohl von (x_{2k+1}) wie von (x_{5k}) , konvergiert also gegen $\xi_1 = \xi_5$. Somit ist $\xi_1 = \xi_0 =: \xi$. Es sei ein $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Dann gibt es ein k_0 mit $|x_{2k} - \xi| < \varepsilon$ für alle $k > k_0$ und ein k_1 mit $|x_{2k+1} - \xi| < \varepsilon$ für alle $k \geq k_1$. Hieraus folgt die Gültigkeit von $|x_n - \xi| < \varepsilon$ für alle $n > 2 \max\{k_0, k_1\}$.

b Betrachte die Folge

$$x_n := \begin{cases} 1 & (n \text{ eine Primzahl}), \\ 0 & (\text{sonst}). \end{cases}$$

Dann ist $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{pk} = 0$ für jede Primzahl p ; aber die Folge x ist divergent, da es unendlich viele Primzahlen gibt.

9 Es sei ein $M > 0$ vorgegeben. Die Menge

$$A := \left\{ r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \mid 1 \leq r \leq 2, 1 \leq q \leq M \right\}$$

ist endlich und enthält die Zahl $\sqrt{2}$ nicht. Es gibt daher ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(\sqrt{2}) \cap A = \emptyset$. Da die $r_n := p_n/q_n$ gegen $\sqrt{2}$ konvergieren, gibt es ein n_0 mit $r_n \in U_\varepsilon(\sqrt{2})$ für alle $n > n_0$. Diese r_n liegen alle nicht in A , somit sind ihre Nenner $q_n > M$. Damit ist gezeigt: Zu jedem noch so grossen M gibt es ein n_0 mit $q_n > M$ für alle $n > n_0$, wie für $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = \infty$ erforderlich.

10 Lösungsvorschlag: Wir produzieren Zahlen der Form

$$l + \frac{1}{k+2} \quad (k \in \mathbb{N}, l \in \mathbb{N}).$$

Wegen $0 < \frac{1}{k+2} < 1$ ($k \in \mathbb{N}$) stimmen keine zwei dieser Zahlen überein. Zur Produktion der Paare (k, l) verwenden wir die in Fig. 2.5.1 dargestellte und in Aufgabe 2 des Abschnitts 2.5 beschriebene Abzählung von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. In dieser Weise entsteht die Folge

$$\left(0 + \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2}, 0 + \frac{1}{3}, 2 + \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{3}, 0 + \frac{1}{4}, 3 + \frac{1}{2}, 2 + \frac{1}{3}, 1 + \frac{1}{4}, 0 + \frac{1}{5}, \dots \right).$$

11a Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $s \in S$ mit $|s - \xi| < \varepsilon/2$. Da s ein Häufungspunkt der Folge x ist, gibt es weiter unendlich viele k mit $|x_k - s| < \varepsilon/2$. Alle diese x_k liegen in $U_\varepsilon(\xi)$, und da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt die Behauptung.

b Es sei $(x_n \mid n \geq 0)$ die in Aufgabe 10 konstruierte Folge. Die “eingebauten” Häufungspunkte häufen sich ihrerseits in dem uneigentlichen Häufungspunkt ∞ . Definieren wir jetzt die Folge y durch $y_n := \frac{1}{1+x_n}$, so ist die Menge S ihrer Häufungspunkte gegeben durch

$$S = \left\{ \frac{1}{r} \mid r \geq 1 \right\} \cup \{0\}.$$

Lösungen zu Kapitel 4

Abschnitt 4.1

1 Erstens gilt $a_n < 2$ für alle $n \geq 0$: Dies trifft zu für $n = 0$ und sei richtig für n . Dann folgt $a_{n+1} = \sqrt{2a_n} < \sqrt{2 \cdot 2} = 2$. Zweitens ist die Folge a_n monoton wachsend; denn es gilt

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \sqrt{2/a_n} > 1 \quad (n \geq 0).$$

Die Folge a_n ist damit als konvergent erwiesen. Es sei α der Grenzwert. Dann ist jedenfalls $\alpha \geq 1$, und aus der Rekursionsformel ergibt sich mit $n \rightarrow \infty$ die Gleichung $\alpha = \sqrt{2\alpha}$. Damit verbleibt nur $\alpha = 2$.

Andere Lösung: Die Rekursionsformel legt die Substitution $a_n := 2^{b_n}$ nahe. Man hat dann $b_0 = 0$ und vor allem $2^{b_{n+1}} = 2^{1/2} \cdot 2^{b_n/2}$ bzw.

$$b_{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{b_n}{2}.$$

Mit Hilfe des Ansatzes $b_n := A + B \cdot 2^{-n}$ findet man durch Koeffizientenvergleich

$$b_n = 1 - \frac{1}{2^n} \quad (n \geq 0).$$

Hieraus folgt $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1$ und damit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$.

2 Falls die Folge gegen ein $\xi \in \mathbb{R}$ konvergiert, genügt ξ der Gleichung $\xi = \xi + \cot \xi$, also $\cot \xi = 0$. Im Hinblick auf den Startwert 2 vermutet man daher $\xi = \frac{\pi}{2}$. Die vorgeschlagene Substitution $x_n := \frac{\pi}{2} + (-1)^n y_n$ liefert die Rekursion

$$y_0 = 2 - \frac{\pi}{2} < \frac{1}{2}, \quad y_{n+1} = \tan y_n - y_n.$$

Dem Graphenbild von \tan entnimmt man die Ungleichung

$$y < \tan y < \frac{4}{\pi} y \quad (0 < y < \frac{\pi}{4}),$$

und hieraus folgt

$$0 < \tan y - y < \left(\frac{4}{\pi} - 1\right)y < \frac{y}{3} \quad (0 < y < \frac{\pi}{4}).$$

Damit gilt

$$0 < y_{n+1} < \frac{y_n}{3} \quad (n \geq 0),$$

und es folgt $0 < y_n < \frac{1}{2} 3^{-n}$ für alle n , woraus wir den Schluss $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$ ziehen dürfen. Es gilt also in der Tat $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{\pi}{2}$.

Anmerkung: In Wirklichkeit ist die Konvergenz noch wesentlich rasanter; denn für $y \rightarrow 0$ gilt $\tan y - y \sim y^3/3$. Das bedeutet numerisch: Mit jedem Rekursionsschritt wird die Anzahl der korrekten Dezimalstellen von $\frac{\pi}{2}$ im wesentlichen verdreifacht.

3 Die Menge A enthält diejenigen n , für die x_n von keinem späteren x_k übertroffen wird. Ist A endlich, so gibt es für jedes $n > \max A$ (bzw. für jedes $n \geq 0$, falls $A = \emptyset$) ein $k > n$ mit $x_k > x_n$. Damit lässt sich eine monoton wachsende Teilfolge von x herstellen. Ist aber die Menge A unendlich, so gibt es zu jedem $n \in A$ ein $n' > n$, das ebenfalls in A liegt, und nach Definition von A ist $x_{n'} \leq x_n$. Damit lässt sich eine monoton fallende Teilfolge von x herstellen.

$$4a \quad x_n \left(1 - \frac{1 - c/x_n^2}{2}\right) = \frac{x_n}{2} \left(1 + \frac{c}{x_n^2}\right) = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{1}{x_n}\right).$$

$$b \quad y_{n+1} = x_{n+1} - \sqrt{c} = \frac{1}{2} \left(x_n - 2\sqrt{c} + \frac{1}{x_n}\right) = \frac{1}{2} \frac{(x_n - \sqrt{c})^2}{x_n} = \frac{y_n^2}{2x_n}.$$

c Ist $c \gg 1$, so ist $x_0 = c \gg \sqrt{c}$. Für ein beliebiges $n \geq 0$ treffe $x_n = \lambda\sqrt{c}$ mit $\lambda \gg 1$ zu. Dann ist $y_n = (\lambda - 1)\sqrt{c}$ und folglich

$$y_{n+1} = \frac{\lambda - 1}{2\lambda} y_n.$$

Das lässt sich so interpretieren: In der Anfangsphase wird der Fehler y_n mit jedem Rekursionsschritt ungefähr halbiert.

Wegen $x_n \rightarrow \sqrt{c}$ wird nach einigen Schritten $0 < y_n \ll 1$ und $x_n \doteq \sqrt{c}$ sein; folglich gilt dann approximativ $y_{n+1} \sim y_n^2/(2\sqrt{c})$. Da sich jetzt der Fehler y_n mit jedem Schritt im wesentlichen quadriert, verdoppelt sich mit jedem Schritt die Anzahl der korrekten Dezimalstellen in der Approximation $x_n \doteq \sqrt{c}$. Man spricht hier von **quadratischer Konvergenz**; siehe dazu auch Abschnitt 7.7.

5 Die Funktion $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ genüge für $x \rightarrow \xi$ dem Cauchy-Kriterium (C). Die angegebene Datenmenge S enthält beliebig genaue Daten: Es sei ein $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann gibt es eine Umgebung U von ξ mit $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/2$ für alle $x, y \in U$. Da ξ ein Häufungspunkt der Menge A ist, gibt es einen Punkt $y_0 \in A \cap \dot{U}$; ferner gibt es eine Binärzahl s mit $|f(y_0) - s| < \varepsilon/2$. Dann gilt $|f(x) - s| < \varepsilon$ für alle $x \in U$; folglich ist $(s, \varepsilon) \in S$. Weiter: Sind (s, δ) und (s', δ') zwei beliebige Zahlendaten in S und U, U' zugehörige Umgebungen von ξ , so ist auch $V := U \cap U'$ eine Umgebung von ξ . Somit gibt es einen Punkt $x_0 \in A \cap \dot{V}$, und der Wert $f(x_0)$ gehört sowohl dem Intervall $[s - \delta, s + \delta]$ wie dem Intervall $[s' - \delta', s' + \delta']$ an. Das ist nur

möglich, wenn (s, δ) und (s', δ') kompatibel sind. Damit ist S als Zahlbasis erwiesen und definiert eine reelle Zahl $S^\vee =: \eta$.

Um nun $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = \eta$ zu beweisen, denken wir uns ein $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Es gibt ein $(s, \delta) \in S$ mit $\delta < \varepsilon/2$ und dazu eine Umgebung U von ξ mit $s - \delta \leq f(x) \leq s + \delta$ für alle $x \in U$. Nach (4.4) gilt aber auch $s - \delta \leq \eta \leq s + \delta$; folglich hat man $|f(x) - \eta| \leq 2\delta < \varepsilon$ für alle $x \in U$, was zu beweisen war.

Abschnitt 4.2

1a Setze $x_k := (-1)^k(1 + \frac{1}{k})$ ($k \geq 1$). Dann ist $\inf_k x_k = -2$, $\sup_k x_k = \frac{3}{2}$, $\liminf_{k \rightarrow \infty} x_k = -1$ und $\limsup_{k \rightarrow \infty} x_k = 1$.

b Setze $x_k := (-1)^k$, $y_k := (-1)^{k+1}$. Dann ist $\limsup_{k \rightarrow \infty} (x_k + y_k) = 0$, aber $\limsup_{k \rightarrow \infty} x_k + \limsup_{k \rightarrow \infty} y_k = 2$.

2 Wir argumentieren nur über den \limsup . Ist $\limsup_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1}/a_n) = \infty$, so ist nichts zu beweisen. Es sei also $\limsup_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1}/a_n) =: q < \infty$, und es sei ein $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Es gibt dann ein n_0 mit $a_{n+1}/a_n \leq q + \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$. Hieraus folgt

$$a_n \leq (q + \varepsilon)^{n-n_0} a_{n_0} = C(q + \varepsilon)^n \quad (n \geq n_0)$$

mit einem von n unabhängigen C . Durch Ziehen der n -ten Wurzel ergibt sich weiter

$$\sqrt[n]{a_n} \leq (q + \varepsilon) \sqrt[n]{C}$$

und damit $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} \leq (q + \varepsilon) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{C} = q + \varepsilon$. Da hier $\varepsilon > 0$ beliebig war, muss in Wirklichkeit $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \leq q$ gelten.

3 Ist $\sigma_0 \in \mathbb{R}$, so heisst das: Die Ausgangsfolge x ist nach oben beschränkt. Die σ_n bilden eine monoton fallende Folge, da mit wachsendem n weniger x_k "angeschaut" werden. Folglich existiert der $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n =: \sigma \geq -\infty$. Betrachte ein beliebiges $p > \sigma$. Dann gibt es ein n mit $\sigma_n < p$; folglich ist dann $x_k \leq \sigma_n < p$ für alle $k > n$, und hieraus ergibt sich $\limsup_{k \rightarrow \infty} x_k \leq p$. Da dies für alle $p > \sigma$ zutrifft, muss $\limsup_{k \rightarrow \infty} x_k \leq \sigma$ sein. (Diese Schlusskette ist auch im Fall $\sigma = -\infty$ zulässig.)

Beim Beweis der Ungleichung $\limsup_{k \rightarrow \infty} x_k \geq \sigma$ dürfen wir $\sigma > -\infty$ annehmen. Betrachte ein beliebiges $p < \sigma$. Dann ist $p < \sigma_n$ für alle n ; folglich gibt es zu jedem n ein $k > n$ mit $x_k > p$. Hieraus schliesst man auf $\limsup_{k \rightarrow \infty} x_k \geq p$. Da dies für alle $p < \sigma$ zutrifft, muss $\limsup_{k \rightarrow \infty} x_k \geq \sigma$ sein.

Ist $\sigma_0 = \infty$, so ist die Ausgangsfolge x nach oben unbeschränkt. Dann sind auch alle Endstücke nach oben unbeschränkt: Gäbe es nämlich ein M und ein n mit $x_k \leq M$ für alle $k > n$, so hätte man $\sigma_0 \leq \max\{x_0, \dots, x_n, M\}$. Damit sind alle $\sigma_n = \infty$, und man hat $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \infty = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$.

4 Es gilt $\limsup_{x \rightarrow \xi} f(x) = \eta$ ($\pm\infty$ zugelassen), wenn der folgende Sachverhalt zutrifft: Zu jedem $p > \eta$ gibt es eine Umgebung U von ξ mit $f(x) < p$ für alle $x \in U$; aber zu jedem $p < \eta$ und jeder Umgebung U von ξ gibt es ein $x \in U$ mit $f(x) > p$. (Ist $\eta \neq \pm\infty$, so kann man natürlich mit $\eta \pm \varepsilon$ argumentieren statt mit einem p .)

Man kann es auch so ausdrücken: Es gilt $\limsup_{x \rightarrow \xi} f(x) = \eta$, wenn es auf $A \setminus \{\xi\}$ eine Punktfolge $x_n \rightarrow \xi$ gibt mit $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \eta$, aber keine Punktfolge $x_n \rightarrow \xi$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) > \eta$.

Insbesondere ist $\limsup_{t \rightarrow \infty} (1 - \frac{1}{t}) \sin t = 1$ und $\liminf_{t \rightarrow \infty} (1 - \frac{1}{t}) \sin t = -1$.

5a Es sei x eine Cauchy-Folge in dem metrischen Raum M und es sei a ein beliebig gewählter "Ursprung" von M . Es gibt ein n_0 mit $d(x_n, x_m) \leq 1$ für alle $m, n \geq n_0$. Dann gilt

$$d(a, x_n) \leq R := \max\{d(a, x_k) \mid 0 \leq k \leq n_0\} + 1 \quad (n \geq 0).$$

b Zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n_0 = n_0(\varepsilon)$ mit $d(x_n, x_m) < \varepsilon/2$ für alle $m, n > n_0$ sowie ein $m_1 > n_0$ mit $d(x_{m_1}, \xi) < \varepsilon/2$. Hieraus folgt

$$d(x_n, \xi) \leq d(x_n, x_{m_1}) + d(x_{m_1}, \xi) < \varepsilon \quad (n > n_0).$$

Dies beweist $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi$.

6 Wendet man die Funktion $f(x) := 3.9x(1-x)$ wiederholt auf die Anfangsdaten $\{0.2000, 0.2001, 0.2010, 0.2100\}$ an, so erhält man nach 5, 10, 20 und 40 Schritten die folgenden Werte:

$$\begin{aligned} n = 5 : & \quad \{0.565661, 0.562819, 0.537156, 0.291944\} \\ n = 10 : & \quad \{0.097966, 0.095065, 0.242723, 0.749382\} \\ n = 20 : & \quad \{0.292551, 0.901979, 0.967403, 0.335279\} \\ n = 40 : & \quad \{0.891242, 0.230323, 0.961875, 0.757535\} \end{aligned}$$

Bei der Ersetzung $0.2000 \rightsquigarrow 0.2001$ ist die Abweichung nach 10 Schritten "wie erwartet"; nach 20 Schritten ist aber von der engen Nachbarschaft der Ausgangswerte nichts mehr sichtbar. Die Ersetzung $0.2000 \rightsquigarrow 0.2100$ führt schon nach 5 Schritten zu einer total anderen Position.

Abschnitt 4.3

1a Zu jedem Punkt $a \in A$ gibt es eine Umgebung $U(a)$ und eine Zahl $M(a)$ mit

$$|f(x)| \leq M(a) \quad (x \in U(a)).$$

Das System $\mathcal{U} := (U(a))_{a \in A}$ ist ein Umgebungsfeld auf A . Es gibt daher endlich viele Punkte $a_i \in A$ ($1 \leq i \leq N$) mit $A \subset \bigcup_{1 \leq i \leq N} U(a_i)$. Setze $M := \max_{1 \leq i \leq N} M(a_i)$. Betrachte ein beliebiges $x \in A$. Dieses x liegt in einem $U(a_i)$, somit gilt $|f(x)| \leq M(a_i) \leq M$. Da $x \in A$ beliebig war, folgt die Behauptung.

b Ist f auf A unbeschränkt, so gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ einen Punkt $x_n \in A$ mit $|f(x_n)| > n$. Nach dem Satz (4.12) besitzt die Folge x einen Häufungspunkt $\xi \in A$; weiter gibt es eine Umgebung $U(\xi)$ und eine Zahl M mit $|f(x)| \leq M$ für alle $x \in U(\xi)$. Da sich die x_n im Punkt ξ häufen, gibt es beliebig grosse n mit $x_n \in U(\xi)$. Für alle diese n hätte man $n < |f(x_n)| \leq M$, was natürlich nicht geht.

2 Die Menge $A \subset \mathbb{R}^d$ sei kompakt, und es sei $\mathcal{V} := (V(x))_{x \in A}$ ein Umgebungsfeld auf A . Es gibt einen achsenparallelen Würfel W_0 der Seitenlänge $s > 0$ mit $A \subset W_0$. Ist $A \cap W_0 = A$ schlecht, so konstruieren wir rekursiv eine Folge $(W_k)_{k \geq 1}$ von achsenparallelen Würfeln, so dass für jedes $k \geq 1$ das Folgende zutrifft:

- (1) $W_k \subset W_{k-1}$,
- (2) W_k besitzt die Seitenlänge $s \cdot 2^{-k}$,
- (3) $A \cap W_k$ ist schlecht, insbesondere $\neq \emptyset$.

Die Bedingungen (2) und (3) treffen für W_0 zu. Ist W_k festgelegt, so dass (2) und (3) erfüllt sind, so erhält man W_{k+1} wie folgt: Man teilt W_k auf naheliegende Weise in 2^d Teilwürfel $W_{k,i}$ ($1 \leq i \leq 2^d$) der Seitenlänge 2^{-k-1} . Wenigstens einer der Durchschnitte $A \cap W_{k,i}$ ist schlecht. Wir wählen einen derartigen "schlechten Teilwürfel" $W_{k,i}$ als W_{k+1} und lassen alle andern $W_{k,i}$ ausser Acht. Dann treffen (1)–(3) für $k+1$ zu.

Es sei $W_k = \prod_{j=1}^d [a_k^j, b_k^j]$ (obere Indizes, nicht Exponenten!). Dann sind die Folgen $k \mapsto a_k^j$ für jedes $j \in [d]$ monoton wachsend und die Folgen $k \mapsto b_k^j$ für jedes $j \in [d]$ monoton fallend. Es ist leicht zu sehen, dass es einen Punkt $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^d)$ gibt mit

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k^j = \lim_{k \rightarrow \infty} b_k^j = \xi^j \quad (1 \leq j \leq d).$$

Wegen

$$a_k^j \leq \xi^j \leq b_k^j \quad (k \geq 0, 1 \leq j \leq d)$$

liegt ξ in allen W_k . Es sei U eine beliebige Umgebung von ξ . Da die Durchmesser der W_k mit $k \rightarrow \infty$ gegen 0 gehen, gibt es ein k mit

$$\emptyset \neq A \cap W_k \subset W_k \subset U.$$

Hiernach schneidet jede Umgebung U von ξ die Menge A , und da A abgeschlossen ist, folgt $\xi \in A$. Dann ist aber für ξ eine Umgebung $V(\xi)$ festgelegt, die für die Überdeckung verwendet werden kann. Es gibt ein k mit $A \cap W_k \subset$

$V(\xi)$, und dieses $A \cap W_k$ ist angeblich schlecht; dabei lässt es sich mit dem einen $V(\xi)$ überdecken — ein Widerspruch.

Abschnitt 4.4

1a Ist $f(x)$ nicht $\equiv 0$, so gibt es zum Beispiel einen Punkt x_0 mit $f(x_0) =: p > 0$. Weiter gibt es ein $a > 0$ mit $f(x) < p$ für alle x mit $|x| > a$. Insbesondere gilt $-a \leq x_0 \leq a$. Die Funktion f nimmt auf dem abgeschlossenen Intervall $[-a, a]$ ein globales Maximum $f(\xi)$ an; dabei ist $f(\xi) \geq f(x_0) = p$. Folglich gilt dann $f(\xi) \geq f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

b Nein. Beispiel: Die Funktion $f(t) := \frac{1}{1+t^2}$ nimmt auf \mathbb{R} kein globales Minimum an.

2 Es ist $f(0, 0, 0) = 1$, $f(\frac{\pi}{2}, 0, 0) = -1/(1 + \pi^2/4) < -\frac{2}{7}$, und für Punkte (x, y, z) mit $x^2 + y^2 + z^2 > 6$ gilt $|f(x, y, z)| < \frac{2}{7}$. Die Funktion f nimmt auf der kompakten Menge $B := \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 6\}$ ein globales Maximum $f(\xi_1) \geq 1$ und ein globales Minimum $f(\xi_2) \leq -\frac{2}{7}$ an. Da $|f|$ ausserhalb B nur Werte $< \frac{2}{7}$ annimmt, gilt $f(\xi_2) \leq f(x, y, z) \leq f(\xi_1)$ für alle $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

3a Es gibt ein $\varepsilon_0 > 0$ und in jeder punktierten Umgebung $\dot{U}(1)$ zwei Punkte x, y mit $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon_0$.

b Es gibt ein $\varepsilon_0 > 0$ und zu jedem (noch so kleinen) $\delta > 0$ zwei Punkte x, y mit $|x - y| < \delta$, für die $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon_0$ ausfällt.

c Es gibt drei Punkte x, y, z mit $x < y < z$ und $(f(y) - f(x))(f(z) - f(y)) \leq 0$.

4 Zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass für alle $x, y \in I$ mit $|x - y| < \delta$ gilt: $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Insbesondere gilt dann $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ für alle x, y in der punktierten Umgebung $]0, \delta[$ von $0+$. Die Funktion f genügt daher der Cauchy-Bedingung für den anvisierten Grenzübergang, und der $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x)$ existiert.

5 Betrachte die Hilfsfunktion $\phi(x) := f(x) - x$. Nach Annahme über f ist $\phi(a) \geq 0$ und $\phi(b) \leq 0$. Gilt $\phi(a) = 0$ oder $\phi(b) = 0$, so ist a oder b Fixpunkt von f . Gilt gleichzeitig $\phi(a) > 0$ und $\phi(b) < 0$, so liefert der Zwischenwertsatz einen Punkt $\xi \in]a, b[$ mit $\phi(\xi) = 0$, d.h. $f(\xi) = \xi$. Siehe die Fig. 4.1, links.

6 Für jedes $k \in \mathbb{Z}$ gilt $\lim_{x \rightarrow k\pi+} \cot x = \infty$ und $\lim_{x \rightarrow k\pi-} \cot x = -\infty$. Es seien $\lambda \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{Z}$ vorgegeben. Wir betrachten die Hilfsfunktion $\phi(x) := \cot x - \lambda x$ auf dem Intervall $I :=]k\pi, (k+1)\pi[$. Wegen

$$\lim_{x \rightarrow k\pi+} \phi(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow (k+1)\pi-} \phi(x) = -\infty$$

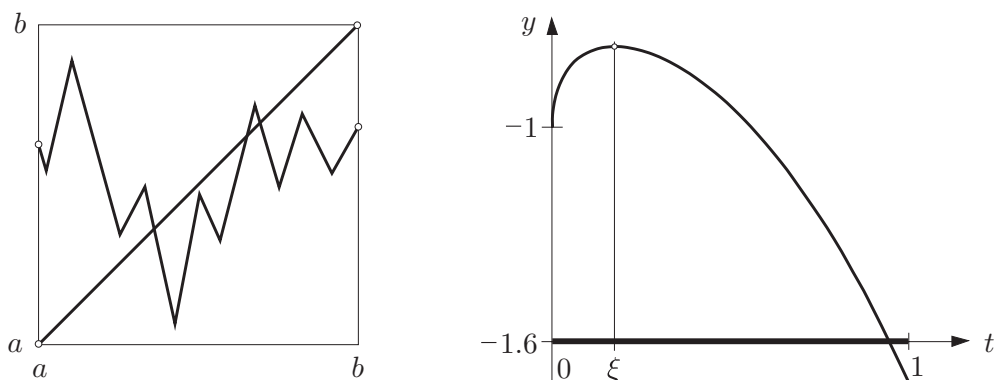


Fig. 4.1

gibt es ein $a \in I$ mit $\phi(a) > 1$ und ein $b \in I$, $b > a$, mit $\phi(b) < -1$. Wenden wir den Zwischenwertsatz auf das Intervall $[a, b] \subset I$ an, so erhalten wir ein $\xi \in I$ mit $\phi(\xi) = 0$.

7 Die Funktion $\phi_1(x) := \frac{a_1}{x - \lambda_1}$ fällt im Intervall $I :=]\lambda_1, \lambda_2[$ streng monoton von ∞ nach $\frac{a_1}{\lambda_2 - \lambda_1}$, und die Funktion $\phi_2(x) := \frac{a_2}{x - \lambda_2}$ fällt auf I streng monoton von $\frac{a_2}{\lambda_1 - \lambda_2}$ nach $-\infty$. Die Funktion $\phi(x) := \phi_1(x) + \phi_2(x)$ fällt ebenfalls streng monoton, und es gilt

$$\lim_{x \rightarrow \lambda_1^+} \phi(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow \lambda_2^-} \phi(x) = -\infty.$$

Mit Hilfe des bereits in Aufgabe 6 verwendeten Arguments folgt hieraus die Existenz einer Nullstelle von ϕ , und wegen der Monotonie kann es nicht mehr als eine Nullstelle geben.

8 Betrachte die stetige Funktion $g(\phi) := f(\cos \phi, \sin \phi) - f(-\cos \phi, -\sin \phi)$ auf dem Intervall $[0, \pi]$. Es gilt

$$g(0) = f(1, 0) - f(-1, 0) = -g(\pi).$$

Ist $g(0) = 0$, so nimmt f in den beiden Diametralpunkten $\pm(1, 0)$ denselben Wert an. Ist aber $g(0) \neq 0$, so folgt $g(0)g(\pi) < 0$. Nach dem Zwischenwertsatz gibt es daher ein $\xi \in]0, \pi[$ mit $g(\xi) = 0$, und das bedeutet, dass f in den beiden Diametralpunkten $\pm(\cos \xi, \sin \xi)$ denselben Wert annimmt.

9 Der Flächeninhalt des in Fig. 4.2 schraffierten Bereichs beträgt

$$A = \frac{1}{2} \cdot 2\alpha + \frac{1}{2} \cdot 2 \cos \alpha \cdot \sin \alpha = \alpha + \cos \alpha \sin \alpha.$$

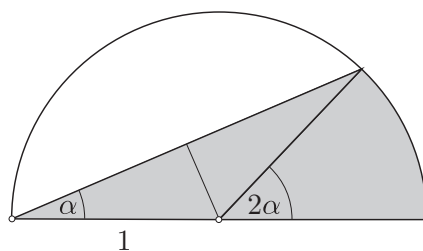


Fig. 4.2

Wir setzen $\alpha := \frac{\pi x}{2}$ und suchen die Nullstelle der Funktion

$$f(x) := \frac{\pi x}{2} + \cos \frac{\pi x}{2} \sin \frac{\pi x}{2} - \frac{\pi}{4}$$

im Intervall $0 \leq x \leq 1$. Es ist $f(0) = -\frac{\pi}{4}$ und $f(1) = \frac{\pi}{4}$. Für die binäre Suche setzen wir daher $x_1 = \frac{1}{2}$ und definieren rekursiv

$$x_n := \begin{cases} x_{n-1} + 2^{-n} & (f(x_n) < 0) \\ x_{n-1} - 2^{-n} & (f(x_n) > 0) \end{cases} \quad (n \geq 2).$$

Dieses Programm liefert z.B. $x_{16} = \frac{17351}{65536} \doteq 0.264755$; für den gesuchten Winkel ergibt sich damit $\alpha \doteq 0.264755 \cdot 90^\circ \doteq 23.8^\circ$.

10a Eine Vorüberlegung: Es seien p, m, q drei beliebige Punkte in I mit $p < m < q$. Dann gibt es nur die drei folgenden Möglichkeiten:

(L) $f(p) \geq f(m) > f(q)$. In diesem Fall muss $a \leq \xi \leq m$ sein.

(M) $f(p) < f(m)$ und $f(m) > f(q)$. In diesem Fall muss $p \leq \xi \leq q$ sein.

(R) $f(p) < f(m) \leq f(q)$. In diesem Fall muss $m \leq \xi \leq b$ sein.

Wir setzen $a_0 := a, b_0 := b, m_0 := (a+b)/2$ und definieren rekursiv wie folgt: Sind a_k, b_k, m_k mit $m_k = (a_k + b_k)/2$ bestimmt, so werden zunächst p_k und q_k definiert durch $p_k := (a_k + m_k)/2, q_k := (m_k + b_k)/2$. Dann gilt jedenfalls $a_k < p_k < m_k < q_k < b_k$. Anschliessend setzen wir

$$(a_{k+1}, m_{k+1}, b_{k+1}) := \begin{cases} (a_k, p_k, m_k) & \text{im Fall (L),} \\ (p_k, m_k, q_k) & \text{im Fall (M),} \\ (m_k, q_k, b_k) & \text{im Fall (R),} \end{cases}$$

nach dem Motto: "Suche das Dächlein!" Damit ist $\xi \in [a_k, b_k]$ für alle $k \geq 0$ sichergestellt. Die so konstruierte Intervallschachtelung konvergiert offensichtlich gegen einen Punkt $\xi' \in [a, b]$, und da der gesuchte Punkt ξ nach Konstruktion allen Intervallen $[a_k, b_k]$ angehört, muss $\xi' = \xi$ sein.

b Der Graph von f ist in der Fig. 4.1, rechts, dargestellt. Wird der obige Algorithmus in Mathematica implementiert, so resultiert $\xi \doteq 0.175867$.

Lösungen zu Kapitel 5

Abschnitt 5.1

1 Sind \mathbf{a} und \mathbf{b} linear abhängig, so ist $\mathbf{b} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$, und man hat trivialerweise $\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{a}_k = \mathbf{a}$.

Sind \mathbf{a} und \mathbf{b} linear unabhängig, so steht \mathbf{a}_1 senkrecht auf \mathbf{b} , \mathbf{a}_2 steht senkrecht auf \mathbf{b} und \mathbf{a}_1 , und alle weiteren \mathbf{a}_k liegen in der von \mathbf{a}_1 und \mathbf{a}_2 aufgespannten Ebene, siehe die Fig. 5.1. Wir benötigen die folgende Formel aus der Vektoralgebra:

$$\mathbf{b} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{x}) = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{x})\mathbf{b} - |\mathbf{b}|^2 \mathbf{x};$$

insbesondere ist $\mathbf{b} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{x}) = -|\mathbf{b}|^2 \mathbf{x}$, falls \mathbf{x} auf \mathbf{b} senkrecht steht. Hieraus folgt $\mathbf{a}_{k+2} = -|\mathbf{b}|^2 \mathbf{a}_k$ für alle $k \geq 1$ und somit

$$\sum_{k \geq 1} \mathbf{a}_k = \sum_{m=0}^{\infty} (-|\mathbf{b}|^2)^m (\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2).$$

Die gesuchte Summe \mathbf{s} berechnet sich damit zu

$$\mathbf{s} = \mathbf{a} + \frac{\mathbf{b} \times \mathbf{a} + (\mathbf{b} \cdot \mathbf{a})\mathbf{b} - |\mathbf{b}|^2 \mathbf{a}}{1 + |\mathbf{b}|^2} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b} \times \mathbf{a} + (\mathbf{b} \cdot \mathbf{a})\mathbf{b}}{1 + |\mathbf{b}|^2}.$$

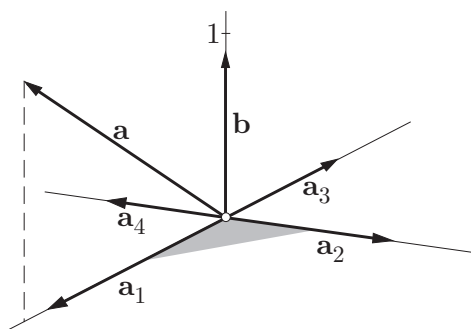


Fig. 5.1

2 Die Zahlen k zwischen 10^n (inklusive) und 10^{n+1} (exklusive) haben $n + 1$ Dezimalstellen. Für die erste Stelle kommen 8 verschiedene Werte $\neq 9$ in Frage, für die übrigen Stellen deren 9. Es gibt also in dem angegebenen Bereich genau $8 \cdot 9^n$ Zahlen, deren Dezimaldarstellung keine 9 enthält, und alle diese Zahlen sind $\geq 10^n$. Damit folgt

$$\sum_{10^n \leq k < 10^{n+1}} \frac{\varepsilon_k}{k} \leq \frac{8 \cdot 9^n}{10^n},$$

und hieraus ergibt sich weiter

$$\sum_{1 \leq k < 10^n} \frac{\varepsilon_k}{k} \leq \sum_{j=0}^{n-1} 8 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^j = \frac{8}{1 - \frac{9}{10}} = 80 .$$

Die Partialsummen der betrachteten Reihe sind somit beschränkt, und die Reihe ist konvergent.

3 Es sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k =: A$, $\sum_{k=0}^{\infty} b_k =: B$.

a Gilt $a_k \geq 0$, $b_k \geq 0$ für alle k , so ist $0 \leq c_k \leq a_k + b_k$. Die Partialsummen der Reihe $\sum_k c_k$ sind daher beschränkt durch $A + B$; somit ist $\sum_k c_k$ konvergent. Können die a_k und die b_k beiderlei Vorzeichen annehmen, so ist dieser Schluss nicht mehr zulässig: Es sei $a_k := (-1)^k/k$ und $b_k := -a_k$. Dann ist $c_k = 1/k$ ($k \geq 1$). Die Reihen $\sum_k a_k$ und $\sum_k b_k$ sind konvergent nach **(5.13)**; aber die Reihe $\sum_k c_k$ ist divergent.

b Gilt $a_k \geq 0$, $b_k \geq 0$ für alle k , so schliesst man folgendermassen: Es gibt ein n_0 mit $|a_k| \leq 1$ für alle $k > n_0$. Es sei $M := \max\{1, a_0, \dots, a_{n_0}\}$. Dann gilt $\sum_{k=0}^n c_k \leq M \sum_{k=0}^n b_k \leq MB$ für alle $n \geq 0$. Die Partialsummen der Reihe $\sum_k c_k$ sind somit beschränkt; die Reihe $\sum_k c_k$ ist daher konvergent.

Können die a_k und die b_k beiderlei Vorzeichen annehmen, so ist dieser Schluss nicht mehr zulässig: Es sei $a_k = b_k := (-1)^k/\sqrt{k}$. Dann ist $c_k = 1/k$ ($k \geq 1$). Die Reihen $\sum_k a_k$ und $\sum_k b_k$ sind konvergent nach **(5.13)**; aber die Reihe $\sum_k c_k$ ist divergent.

Abschnitt 5.2

1 Die angegebenen Reihenglieder werden jeweils mit a_k bezeichnet.

a Wir schreiben a_k in der Form $a_k = \frac{1}{k} \frac{1 - 1/\sqrt{k}}{(1 + 1/\sqrt{k})^2}$. Hier konvergiert der zweite Faktor mit $k \rightarrow \infty$ gegen 1. Es gibt daher ein k_0 mit $a_k \geq \frac{1}{2k}$ für alle $k \geq k_0$; somit ist die betrachtete Reihe divergent.

b Es gilt die Abschätzung $|a_k| \leq \frac{1}{3^k} \frac{2}{1 - (2/3)^k}$. Hier konvergiert der zweite Faktor mit $k \rightarrow \infty$ gegen 2, somit gibt es ein k_0 mit $|a_k| \leq 3 \cdot 3^{-k}$ für alle $k \geq k_0$, und die Reihe ist konvergent.

c Es ist $\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^2$. Hier konvergiert der zweite Faktor mit $k \rightarrow \infty$ gegen 1. Der betrachtete Quotient ist daher von einem k_0 an kleiner als $\frac{3}{4}$, und die Reihe ist konvergent.

d Es ist $k! \leq k^k$ und folglich $\sqrt[k]{k!} \leq k$ für alle $k \geq 1$. Somit ist $a_k \geq \frac{1}{k}$, und die angegebene Reihe ist divergent.

2 Die angegebenen Reihenglieder werden jeweils mit a_k bezeichnet.

a Ist $x = 0$, so ist die Reihe trivialerweise konvergent. Ist $x > 0$ (fest!), so gibt es ein k_0 mit $0 < \frac{x}{k} < \frac{\pi}{2}$ für alle $k \geq k_0$. Nun ist aber $\sin \alpha \geq \frac{2\alpha}{\pi}$ ($0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$). Folglich gilt $a_k \geq \frac{2x}{\pi} \frac{1}{k}$ für alle $k \geq k_0$, und die Reihe erweist sich als divergent. Analog schliesst man im Fall $x < 0$.

b Für beliebige α gilt $0 \leq 1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \leq \frac{\alpha^2}{2}$. Für jedes feste x gilt daher $a_k \leq \frac{x^2}{2} \frac{1}{k^2}$. Die Reihe ist daher für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergent.

c Für grosse k ist $\tan \frac{x}{k} \sim \frac{x}{k}$; wir streben daher einen Konvergenzbeweis an. Für $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{4}$ gilt $0 \leq \tan \alpha \leq \frac{4\alpha}{\pi}$. Ist $x \geq 0$, so gibt es ein k_0 mit $0 \leq \frac{x}{k} \leq \frac{\pi}{4}$ für alle $k \geq k_0$. Folglich gilt $0 \leq a_k \leq \frac{4x}{\pi} \frac{1}{k^2}$ für alle $k \geq k_0$, und die Reihe erweist sich als konvergent. Analog schliesst man im Fall $x < 0$.

d Es gilt $\binom{2k+2}{k+1} / \binom{2k}{k} = \frac{(2k+1)(2k+2)}{(k+1)^2} = 4 \frac{k + \frac{1}{2}}{k+1}$, und hieraus folgt

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = 4 \frac{k + \frac{1}{2}}{k+1} |x| \rightarrow 4|x| \quad (k \rightarrow \infty). \quad (1)$$

Dies erlaubt den folgenden Schluss: Ist $|x| < \frac{1}{4}$, so gibt es ein $q < 1$ und ein k_0 mit $|a_{k+1}/a_k| \leq q$ für alle $k \geq k_0$, und die Reihe ist in diesem Fall konvergent. Ist aber $|x| > \frac{1}{4}$, so gibt es ein k_0 mit $|a_{k+1}/a_k| \geq 1$ für alle $k \geq k_0$. In diesem Fall gehen die a_k nicht einmal mehr gegen 0, und die Reihe ist divergent.

Für $x = \pm \frac{1}{4}$ benötigen wir eine genauere Abschätzung von a_k . Die Stirlingsche Formel liefert folgende Grössenordnung:

$$a_k \sim \frac{4^k x^k}{\sqrt{\pi k}} \quad (k \rightarrow \infty).$$

Die Reihe ist daher für $x = \frac{1}{4}$ divergent. Ist $x = -\frac{1}{4}$, so ist die Reihe alternierend: Die $|a_k|$ gehen gegen 0, und auf Grund von (1) hat man

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \frac{k + \frac{1}{2}}{k+1} < 1 \quad (k \geq 1).$$

Die Reihe ist daher für $x = -\frac{1}{4}$ konvergent nach **(5.13)**.

3 Es ist $a_{n+1} \geq a_{n+2} \geq \dots \geq a_{2n} \geq a_{2n+1}$ und somit $\sum_{k=n+1}^{2n} a_k \geq n a_{2n}$ sowie $\sum_{k=n+1}^{2n+1} a_k \geq (n+1) a_{2n+1} \geq \left(n + \frac{1}{2}\right) a_{2n+1}$. Damit erhalten wir

$$0 \leq 2n a_{2n} \leq 2R_n \quad \text{bzw.} \quad 0 \leq (2n+1) a_{2n+1} \leq 2R_n,$$

wobei R_n die n -te Restsumme der Ausgangsreihe bezeichnet. Hieraus folgt mit (5.6)(b) die Behauptung.

4 Wir unterscheiden die Fälle $|\beta| < 1$, $\beta = -1$, $\beta = 1$ und $|\beta| > 1$.

Ist $|\beta| < 1$, so hat man

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \frac{|\beta|}{\left(1 + \frac{1}{k}\right)^\alpha} \rightarrow |\beta| < 1 \quad (k \rightarrow \infty).$$

Es gibt daher ein $q < 1$ und ein k_0 , so dass der betrachtete Quotient für alle $k \geq k_0$ kleiner als q ist. Die Reihe ist daher für diese β absolut konvergent, unabhängig vom Wert von α .

Ist $\beta = -1$, so ist die Reihe divergent für alle $\alpha \leq 0$, da dann die a_k nicht gegen 0 gehen, und als alternierende Reihe konvergent für $\alpha > 0$, da dann die $|a_k|$ monoton fallend gegen 0 gehen.

Ist $\beta = 1$, so ist die Reihe divergent für $\alpha \leq 1$ und konvergent für $\alpha > 1$.

Im Fall $|\beta| > 1$ hat man $|a_{k+1}/a_k| \rightarrow |\beta| > 1$, unabhängig von α . Es gibt dann ein k_0 mit $|a_{k+1}/a_k| \geq 1$ für alle $k \geq k_0$. Die a_k gehen daher nicht einmal gegen 0, und die Reihe ist divergent.

Die Menge K ist in der Fig. 5.2 dargestellt.

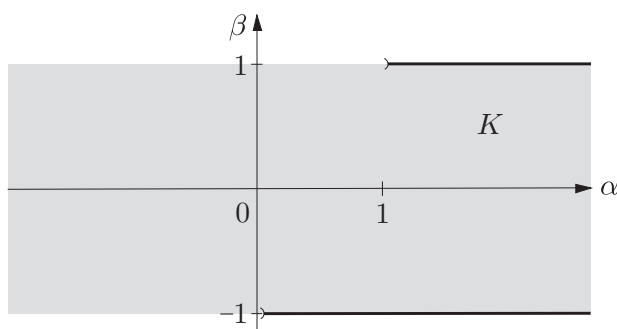


Fig. 5.2

5 Die Partialsummen $s_n := \sum_{k=0}^n c_k$ bilden eine monoton wachsende Folge mit $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty$. Wir setzen $c_0 > 0$ voraus und definieren

$$d_k := \frac{c_k}{\sqrt{s_k}} \quad (k \geq 0).$$

Dann gilt jedenfalls $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{d_k}{c_k} = 0$. Für die Partialsummen s'_n der Reihe $\sum_k d_k$ erhält man

$$s'_n = \sum_{k=0}^n d_k = \sum_{k=0}^n \frac{c_k}{\sqrt{s_k}} > \frac{1}{\sqrt{s_n}} s_n = \sqrt{s_n} \quad (n \geq 0).$$

Hieraus folgt $\lim_{n \rightarrow \infty} s'_n = \infty$ und damit die Divergenz der Reihe $\sum_k d_k$.

6 Es sei B die Menge der betrachteten Binärfolgen β . Die durch (*) festgelegte Abbildung $\phi: B \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ ist wohldefiniert; denn wegen $|\beta_k| \leq 1$ ist die angeschriebene Reihe für alle $\beta \in B$ konvergent.

Sind β und β' zwei verschiedene Binärfolgen, so gibt es ein $n \in \mathbb{Z}$ mit

$$\beta_k = \beta'_k \quad (k < n), \quad \beta_n = 0, \quad \beta'_n = 1.$$

Die Zahl $a := \sum_{k < n} \beta_k 2^{-k} + 2^{-n}$ liegt in $\mathbb{D}_{>0}$. Wir unterscheiden zwei Fälle:

(I)
$$\beta_k = 1 \quad \forall k > n, \quad \beta'_k = 0 \quad \forall k > n.$$

In diesem Fall ist $\phi(\beta) = \phi(\beta') = a$. ($0.9999\dots = 1!$) Die Binärzahl a besitzt demnach zwei Darstellungen.

(II) Es gibt ein $k > n$ mit $\beta_k = 0$ oder $\beta'_k = 1$. Im ersten Fall gilt $\phi(\beta) < a \leq \phi(\beta')$ und im zweiten $\phi(\beta) \leq a < \phi(\beta')$. Jedenfalls hat man $\phi(\beta) \neq \phi(\beta')$.

Um zu zeigen, dass die Abbildung ϕ surjektiv ist, denken wir uns ein beliebiges $x \in \mathbb{R}_{>0}$ gegeben. Wir müssen eine Folge $\beta \in B$ konstruieren mit $\phi(\beta) = x$. Die Konstruktion erfolgt rekursiv. Sind alle β_k mit $k \leq n$ festgelegt, bezeichnen wir die Zahl $\sum_{k \leq n} \beta_k 2^{-k} \in \mathbb{D}$ mit a_n . Am Anfang der Rekursion unterscheiden wir zwei Fälle:

(a) Ist $x \geq 1$, so gibt es ein $r \geq 0$ mit $2^r \leq x < 2^{r+1}$. Wir setzen $\beta_{-r} = 1$ und $\beta_k = 0$ für alle $k < -r$. Dann gilt $0 \leq x - a_{-r} < 2^r$.

(b) Ist $x < 1$, so ist $1/x > 1$, und es gibt ein $s \geq 1$ mit $2^{s-1} < 1/x \leq 2^s$, d.h. $2^{-s} \leq x < 2^{-s} + 2^{-s}$. Wir setzen $\beta_s = 1$ und $\beta_k = 0$ für alle $k < s$. Dann gilt $0 \leq x - a_s < 2^{-s}$.

Nun der Rekursionsschritt: Es seien alle β_k mit $k \leq n$ festgelegt, so dass $0 \leq x - a_n < 2^{-n}$ garantiert ist. Gilt sogar $x - a_n < 2^{-(n+1)}$, so setzen wir $\beta_{n+1} := 0$; gilt aber $x - a_n \geq 2^{-(n+1)}$, so setzen wir $\beta_{n+1} := 1$. Damit trifft auch $0 \leq x - a_{n+1} < 2^{-(n+1)}$ zu.

Es ist offensichtlich, dass die Partialsummen a_n der Reihe $\sum_k \beta_k 2^{-k}$ gegen x konvergieren, und das heisst $\phi(\beta) = x$. Ist speziell $x \in \mathbb{D}_r$, so folgt aus $0 \leq x - a_r < 2^{-r}$ die Gleichung $x = a_r$, und alle β_k mit $k > r$ sind 0. Dieses x besitzt noch eine zweite Darstellung (*), die mit 1111... endet, von der Rekursion aber nicht produziert wird.

Abschnitt 5.3

1 Für beliebiges $n \geq 1$ gilt

$$\frac{1}{2^n + 1} + \frac{1}{2^n + 3} + \dots + \frac{1}{2^n + (2^n - 1)} > 2^{n-1} \cdot \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{4}.$$

Die umgestellte Reihe besteht aus der 1 am Anfang; anschliessend folgen für jedes $n \geq 1$ nacheinander Pakete mit den Summanden

$$-\frac{1}{2n} + \frac{1}{2^n + 1} + \frac{1}{2^n + 3} + \dots + \frac{1}{2^n + (2^n - 1)}.$$

Das n -te Paket hat einen Wert $> \frac{1}{4} - \frac{1}{2n}$, und dieser Wert ist $> \frac{1}{8}$, sobald $n \geq 4$ ist. Die Partialsummen der umgestellten Reihe sind daher nach oben unbeschränkt, und diese Reihe divergiert.

2 Um die Summe ∞ zu erreichen, müssen wir das Ziel σ immer weiter hinausschieben. Mit s_n bezeichnen wir wiederum die Partialsummen der umgestellten Reihe, $s_{-1} := 0$. Zusätzlich setzen wir $\sigma_{-1} := 1$ und definieren für $n \geq 0$ rekursiv wie folgt:

- (a) $s_{n-1} < \sigma_{n-1} \Rightarrow \phi(n) := \min\{k \mid a_k > 0 \wedge k \neq \phi(j) \ (0 \leq j < n)\},$
 $\sigma_n := \sigma_{n-1};$
- (b) $s_{n-1} \geq \sigma_{n-1} \Rightarrow \phi(n) := \min\{k \mid a_k \leq 0 \wedge k \neq \phi(j) \ (0 \leq j < n)\},$
 $\sigma_n := \sigma_{n-1} + 1.$

In Worten: Liegt s_{n-1} links vom momentanen Ziel, so wählt man als b_n das erste noch unverbrauchte $a_k > 0$; gilt aber $s_{n-1} \geq \sigma_{n-1}$, so wählt man als b_n das erste noch unverbrauchte $a_k \leq 0$ und erhöht gleichzeitig die Zielvorgabe um 1. Durch (*) ist sichergestellt, dass die sich ändernden Zielvorgaben jeweils in endlich vielen Schritten erreicht werden können, so dass auch die $a_k \leq 0$ nach und nach aufgebraucht werden.

Da es also unendlich viele "Zyklen" gibt, gilt jedenfalls $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \infty$. Um $\sum_{j=0}^{\infty} b_j = \infty$ zu beweisen, bemerken wir zunächst, dass es ein k_0 gibt mit $|a_k| < 1$ für alle $k > k_0$ und weiter ein n_0 mit $\phi(n) > k_0$ für alle $n > n_0$, denn nach einer hinreichenden Anzahl Schritten sind a_0, a_1, \dots, a_{k_0} bestimmt aufgebraucht. Es gibt ein $n_1 > n_0$ mit $s_{n_1} \geq \sigma_{n_1}$. Wir behaupten: Für alle $n \geq n_1$ ist $s_n > \sigma_n - 2$.

┌ Dies trifft jedenfalls zu für n_1 und sei richtig für n . Ist $s_n < \sigma_n$, so erfolgt ein Schritt (a), und man hat $s_{n+1} > s_n > \sigma_n - 2 = \sigma_{n+1} - 2$. Ist $s_n \geq \sigma_n$, so erfolgt ein Schritt (b), und man hat $s_{n+1} > s_n - 1 \geq \sigma_n - 1 = \sigma_{n+1} - 2$. ┘

Damit ist auch $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty$ erwiesen.

Abschnitt 5.4

1 Aus $1 \leq \beta_n \leq n$ ($n \geq 0$) folgt $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\beta_n} = 1$. Folglich ist $\rho = 1$.

2 Sei $\max\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p\} =: \alpha > 0$. Wegen $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\alpha_1^k + \alpha_2^k + \dots + \alpha_p^k} = \alpha$ besitzt die Reihe $\sum_{k \geq 0} (\alpha_1^k + \alpha_2^k + \dots + \alpha_p^k) z^k$ den Konvergenzradius $1/\alpha$. Die angeschriebene Reihe konvergiert daher für $|t| < 1/\sqrt{\alpha}$ und divergiert für $|t| > 1/\sqrt{\alpha}$; ihr Konvergenzradius beträgt somit $1/\sqrt{\alpha}$.

3 Es bezeichne b_k die Anzahl Arten, $3k$ Leute im Verhältnis $1 : 2$ in zwei Gruppen einzuteilen. Dann gilt

$$\frac{b_k}{b_{k+1}} = \binom{3k}{k} / \binom{3(k+1)}{k+1} = \frac{(k+1)(2k+1)(2k+2)}{(3k+1)(3k+2)(3k+3)} \rightarrow \frac{4}{27} \quad (k \rightarrow \infty).$$

Die Hilfsreihe $\sum_k b_k t^k$ besitzt daher den Konvergenzradius $\rho' := \frac{4}{27}$. Nun ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^{3k},$$

und hier ist die rechte Seite für $|z| < \sqrt[3]{\rho'}$ konvergent, für $|z| > \sqrt[3]{\rho'}$ divergent. Die Reihe $\sum_n a_n z^n$ besitzt daher den Konvergenzradius $\rho = \sqrt[3]{\rho'} = \sqrt[3]{4/3}$.

4 Nach Beispiel 3.5.⑥ gilt $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\frac{1 + \alpha^k}{1 + \beta^k}} = \frac{\max\{1, \alpha\}}{\max\{1, \beta\}}$. Hieraus schliesst man auf

$$\rho = \begin{cases} \beta/\alpha & (\alpha > 1, \beta > 1) \\ \beta & (\alpha \leq 1, \beta > 1) \\ 1/\alpha & (\alpha > 1, \beta \leq 1) \\ 1 & (\alpha \leq 1, \beta \leq 1) \end{cases}.$$

5a Es gilt $a_k < 2^k$: Dies trifft zu für $k \leq 1$ und sei richtig für alle $k \leq n-1$. Dann folgt $a_n < 2^{n-1} + 2^{n-2} < 2^n$. Somit ist $\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_k} \leq 2$ und folglich $\rho \geq \frac{1}{2}$.

b Man hat

$$\begin{aligned} (1 - z - z^2)f(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k - \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{k+1} - \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{k+2} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k - \sum_{k=1}^{\infty} a_{k-1} z^k - \sum_{k=2}^{\infty} a_{k-2} z^k \\ &= a_0 + a_1 z - a_0 + \sum_{k=2}^{\infty} (a_k - a_{k-1} - a_{k-2}) z^k = z, \end{aligned}$$

denn die letzte Summe ist $\equiv 0$.

c Wir müssen

$$\frac{A + B - (A\mu + B\lambda)z}{(1 - \lambda z)(1 - \mu z)} \equiv \frac{z}{1 - z - z^2} \quad (2)$$

erreichen. Die Bedingung $(1 - \lambda z)(1 - \mu z) \equiv 1 - z - z^2$ liefert $\lambda + \mu = 1$, $\lambda\mu = -1$; somit sind λ und μ die beiden Lösungen der quadratischen Gleichung $x^2 - x - 1 = 0$, also $\lambda = (1 + \sqrt{5})/2$, $\mu = (1 - \sqrt{5})/2$. Da nun die Nenner in (2) übereinstimmen, muss $A + B = 0$, also $B = -A$, und weiter $A(\lambda - \mu) = 1$ sein. Folglich ist $A = 1/\sqrt{5}$, und wir erhalten

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{1 - \lambda z} - \frac{1}{1 - \mu z} \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda^k - \mu^k) z^k .$$

Hieran liest man folgende explizite Darstellung von a_k ab:

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{(1 + \sqrt{5})^k - (1 - \sqrt{5})^k}{2^k} .$$

d Wegen $\lambda > |\mu|$ berechnet sich der Konvergenzradius der Reihe (*) folgendermassen: Aus

$$\sqrt[k]{a_k} = \lambda \sqrt[k]{\frac{1 - (\mu/\lambda)^k}{\sqrt{5}}} \rightarrow \lambda \quad (k \rightarrow \infty)$$

folgt $\rho = 1/\lambda = (\sqrt{5} - 1)/2 \doteq 0.618$.

6 Schreiben wir f in der Form

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1 + (-1)^k}{2} \frac{z^k}{k!} ,$$

so erhalten wir die "offizielle" Koeffizientenfolge $a_k := \frac{1 + (-1)^k}{2k!}$. Die Koeffizienten c_r ($r \geq 0$) der Funktion $(f(z))^2$ berechnen sich daher wie folgt:

$$\begin{aligned} c_r &= \sum_{k+l=r} a_k a_l = \frac{1}{4r!} \sum_{k+l=r} \frac{r!}{k! l!} (1 + (-1)^k) (1 + (-1)^l) \\ &= \frac{1}{4r!} \left((1+1)^r + 2(1-1)^r + (-1-1)^r \right) = \frac{2^r}{4r!} (1 + (-1)^r) + \frac{1}{2} \delta_{r0} . \end{aligned}$$

Der Zusatzterm ergibt sich wegen $(1-1)^0 = 1$. Damit haben wir

$$(f(z))^2 \equiv \frac{1}{2} f(2z) + \frac{1}{2} ,$$

wie behauptet.

Lösungen zu Kapitel 6

Abschnitt 6.1

1 Es kommt nur auf $|z| =: r$ an. Setzt man $a_k := \frac{r^k}{k!}$, so wird

$$q_k := \frac{a_k}{a_{k-1}} = \frac{r}{k} \quad (k \geq 1).$$

Es sei $n < r < n + 1$. Dann ist $q_k > 1$ für $1 \leq k \leq n$ und $q_k < 1$ für $k \geq n + 1$. Die a_k wachsen also streng monoton bis zum Maximalwert a_n und nehmen dann wieder streng monoton ab. Ist $r = n$, so ist $q_n = 1$, und man hat $a_n = a_{n-1}$; entsprechend ist natürlich $a_n = a_{n+1}$ im Fall $r = n + 1$.

2 Vorschlag: $f(t) := e^{\sqrt{t}}$. Die Substitution $t := y^2$ liefert

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^{\sqrt{t}}}{t^n} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{e^y}{y^{2n}} = \infty$$

für jedes feste $n \geq 0$, und andererseits ist

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\sqrt{t} - \lambda t} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

für jedes feste $\lambda > 0$.

3 Bei jedem Schritt wird der Bruchteil λ des vorhandenen Whiskys durch Wasser ersetzt, und der grössere Bruchteil $1 - \lambda$ bleibt erhalten. In anderen Worten: Die verbleibende Whiskymenge multipliziert sich bei jedem Schritt mit dem Verdünnungsfaktor $1 - \lambda =: e^{-\alpha}$; dabei ist $0 < \alpha \ll 1$. Die Stoppbedingung lautet

$$e^{-n\alpha} \leq \frac{1}{2} < e^{-(n-1)\alpha}. \quad (1)$$

Dies ist äquivalent mit

$$n - 1 < \frac{\log 2}{\alpha} \leq n; \quad (2)$$

die Anzahl n der Schritte berechnet sich daher zu $n = \lceil \log 2 / \alpha \rceil$.

Es sei $Y = 1 - e^{-n\alpha}$ die Menge des dabei getrunkenen Whiskys. Aus (1) folgt $1 - Y \leq \frac{1}{2} < e^\alpha(1 - Y)$ und somit

$$\frac{1}{2} \leq Y < \frac{1}{2} + \frac{1 - e^{-\alpha}}{2}.$$

Mithin ist $\lim_{\alpha \rightarrow 0} Y = \frac{1}{2}$, wie erwartet.

Während des ganzen Prozesses werden $n\lambda$ Liter Flüssigkeit getrunken, davon Y in Form von Whisky. Folglich hat Fritz insgesamt $H = n\lambda - Y$ Liter Wasser getrunken, und mit (2) ergibt sich für H die folgende Abschätzung:

$$\log 2 \frac{1 - e^{-\alpha}}{\alpha} - Y \leq H < \log 2 \frac{1 - e^{-\alpha}}{\alpha} + (1 - e^{-\alpha}) - Y .$$

Wegen $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z - 1}{z} = 1$ folgt hieraus $\lim_{\alpha \rightarrow 0} H = \log 2 - \frac{1}{2} \doteq 0.193$, eine überraschend kleine Menge!

Abschnitt 6.2

$$1 \quad \% = \log a \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \log a} - 1}{x \log a} = \log a \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} = \log a .$$

$$2a \quad \% = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{m}\right)^{m+4} = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{m}\right)^m \cdot \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{m}\right)^4 = e^2 \cdot 1 .$$

$$b \quad \% = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right)^{1/\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{1/\sqrt{n}} = 1 .$$

$$c \quad \% = \lim_{x \rightarrow \infty} \exp\left(\frac{\log x}{x}\right) = \lim_{y \rightarrow 0} e^y = 1 .$$

d Man vermutet natürlich $\% = e^\alpha$. Wir behandeln zunächst den einfachen, aber fundamentalen Grenzwert

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\log(1+y)}{y} = 1 .$$

□ Setze $\log(1+y) =: f(y)$. Dann ist $\lim_{y \rightarrow 0} f(y) = 0$ und folglich

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\log(1+y)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(y)}{e^{f(y)} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e^x - 1} = 1 .$$

Betrachte nun die Funktion $g(x) := \log\left(\left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)^x\right) = x \log\left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)$. Dann ist

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \alpha \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(1 + \alpha/x)}{\alpha/x} = \alpha \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\log(1+y)}{y} = \alpha .$$

Hieraus folgt $\% = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{g(x)} = e^\alpha$.

$$e \quad \text{Mit } a \text{ ergibt sich } \% = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{1/n} - 1}{1/n} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log a .$$

3 Der naheliegende Ansatz $f(t) := t^\alpha$ liefert

$$f(f(t)) = (t^\alpha)^\alpha = t^{\alpha^2} \stackrel{!}{=} t^{1/2} ,$$

was mit $\alpha = 1/\sqrt{2}$ befriedigt werden kann.

4 Man hat

$$\log f(t) = (\log t)^{3/2}, \quad \log g(t) = \log t \cdot \log \log t, \quad \log h(t) = \frac{\sqrt{t}}{\log t}.$$

Für grosse t ist $\log \log t < (\log t)^{1/2}$ und somit $\log g(t) < \log f(t)$. Für grosse t ist zweitens $\log t < t^{1/5}$ und somit $(\log t)^{5/2} < t^{1/2}$. Hieraus folgt $\log f(t) < \log h(t)$. Da \log streng monoton wächst, stehen die drei Ausgangsfunktionen in derselben Relation:

$$g(t) < f(t) < h(t) \quad (t \rightarrow \infty).$$

5a % ist nach Annahme absolut konvergent und somit konvergent.

b Die Reihe % braucht nicht zu konvergieren. Ist zum Beispiel $a_k = e^{-k}$, so erhält man $\frac{1}{\log a_k} = -\frac{1}{k}$, und $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k}$ ist bekanntlich divergent.

c Es gibt ein $\delta > 0$ mit $\frac{e^x - 1}{x} < 2$ für alle $x \in]0, \delta[$ und weiter ein k_0 mit $a_k < \delta$ für alle $k > k_0$. Somit gilt dann

$$0 < e^{a_k} - 1 = \frac{e^{a_k} - 1}{a_k} a_k < 2 a_k \quad (k > k_0),$$

und % erweist sich als konvergent.

d Ein einfacher Konvergenzbeweis ist nicht in Sicht; die Reihe könnte also divergieren. Wenn die a_k monoton fallend nach 0 gehen, gilt $\lim_{k \rightarrow \infty} k a_k = 0$ (siehe die Aufgabe 3 in Abschnitt 5.2) und folglich $|k a_k^2| \leq a_k$ für alle $k > k_0$. Divergenz von % wäre also nur bei "stark schwankenden" a_k möglich. Wir versuchen es folgendermassen:

$$a_k := \begin{cases} 1/\sqrt{k} & (k = 4^n \text{ für ein } n \in \mathbb{N}), \\ 2^{-k} & (\text{sonst}). \end{cases}$$

Dann ist $\sum_{k=0}^m a_k \leq \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} + \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} = 4$ für alle m ; die Reihe $\sum_{k \geq 0} a_k$ ist also konvergent. Die Reihe $\sum_{k \geq 0} k a_k^2$ enthält jedoch unendlich viele Glieder vom Wert 1 und ist damit divergent.

Abschnitt 6.3

1a Aus $\cosh(k\alpha) = e^{k\alpha} \frac{1 + e^{-2k\alpha}}{2}$ folgt $\rho = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\cosh(k\alpha)} = e^\alpha$; denn der angeschriebene Bruch nimmt nur Werte zwischen $\frac{1}{2}$ und 1 an.

$$b \quad f(e^\alpha z) + f(e^{-\alpha z}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{k\alpha} + e^{-k\alpha}}{\cosh(k\alpha)} z^k = \sum_{k=0}^{\infty} 2z^k = \frac{2}{1-z}.$$

2a Wie man leicht nachrechnet, gilt $1 - \tanh k = e^{-2k} \frac{2}{1 + e^{-2k}}$, und hieraus folgt $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{1 - \tanh k} = e^{-2}$. Hiernach ist $\rho = e^2$.

b Für $k \rightarrow \infty$ gilt $\sqrt[k]{a_k} = \sqrt[k]{k} \cdot \left(1 + \frac{3}{k}\right)^k \rightarrow e^3$, folglich ist $\rho = e^{-3}$.

Abschnitt 6.5

1a Gesucht sind die $z \in \mathbb{C}$ mit $\pi \frac{i+z}{1+iz} = 2k\pi$ für ein $k \in \mathbb{Z}$. Es folgt $i+z = 2k(1+iz)$ und damit weiter $z(1-2ki) = 2k-i$. Dies liefert folgende Parameterdarstellung der Lösungsmenge:

$$z = \frac{2k-i}{1-2ki} = \frac{4k}{4k^2+1} + \frac{4k^2-1}{4k^2+1} i \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

b Wir schreiben die gegebene Gleichung in der Form

$$z^4 = 16 \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 16 e^{2\pi i/3}.$$

Offenbar wird die Zahl $e^{2\pi i/12} = \text{cis } 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$ benötigt. Mit ihrer Hilfe ergeben sich die vier Wurzeln $\zeta_k = i^k(\sqrt{3} + i)$ ($0 \leq k \leq 3$), also

$$\zeta_0 = \sqrt{3} + i, \quad \zeta_1 = -1 + i\sqrt{3}, \quad \zeta_2 = -\sqrt{3} - i, \quad \zeta_3 = 1 - i\sqrt{3}.$$

2a Es ist $\frac{1+i\sqrt{2}}{\sqrt{2}+i} = \frac{2\sqrt{2}+i}{3}$ und folglich $\%_0 = e^{\sqrt{8}\pi/3} \cdot e^{\pi i/3}$. Damit ergibt sich

$$\%_0 = \frac{1}{2} e^{\sqrt{8}\pi/3} + \frac{\sqrt{3}}{2} e^{\sqrt{8}\pi/3} i.$$

b Es ist $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} = \text{cis } \frac{5\pi}{6}$ und somit

$$\% = \text{cis } \frac{1991 \cdot 5\pi}{6} = \text{cis } \left(829 \cdot 2\pi + \frac{7\pi}{6} \right) = \text{cis } \frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}.$$

c Es ist $z := \frac{24-7i}{20+15i} = \frac{3-4i}{5}$. Man berechnet nacheinander

$$z^2 = \frac{-7-24i}{5^2}, \quad z^4 = \frac{-527+336i}{5^4}, \quad z^8 = \dots, \quad z^{16} = \dots$$

und erhält zum Schluss $z^{17} = \frac{-761\,741\,108\,157 + 42\,744\,511\,676\,i}{5^{17}}$. Wer sich mit Taschenrechner-Genauigkeit zufrieden gibt, kommt schneller zum Ziel: Es ist $|z| = 1$ und $\arg z = -\arctan \frac{4}{3}$. Hieraus folgt

$$z^{17} = \text{cis}(-17 \arctan(4/3)) \doteq -0.99843 + 0.056026\,i .$$

3 Man hat $f(t) = 2^{t/(2\pi)} \cdot e^{it}$. Hiernach ist $\arg f(t) = [t]$ und $|f(t)| = 2^{t/(2\pi)}$. Die Bildpunkte liegen demnach auf der logarithmischen Spirale mit der Polardarstellung $r = 2^{\phi/(2\pi)}$, und man kann f als Parameterdarstellung dieser Spirale auffassen. Mit jedem Umlauf verdoppelt der laufende Punkt $z = f(t)$ seinen Abstand vom Ursprung. Die Fig. 6.1 zeigt das Bild des t -Intervalls $[-2\pi, 2\pi]$.

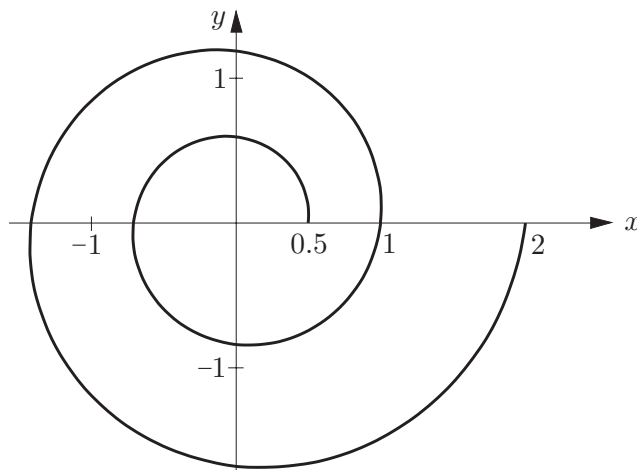


Fig. 6.1

4 Dem Hinweis folgend beginnen wir mit

$$z_h = i e^{-2\pi i t}, \quad z_m = i e^{-12 \cdot 2\pi i t}, \quad z_s = i e^{-720 \cdot 2\pi i t} .$$

Hieraus ergibt sich

$$\arg z_m - \arg z_h = [-12 \cdot 2\pi t + 2\pi t], \quad \arg z_s - \arg z_h = [-720 \cdot 2\pi t + 2\pi t] .$$

Die gemessenen Größen τ_m und τ_s sind daher wie folgt mit t verknüpft:

$$\left. \begin{array}{l} \tau_m = -11 t \\ \tau_s = -719 t \end{array} \right\} \quad (\text{modulo } 1) .$$

Um hieraus t zu bestimmen, lösen wir die Gleichung $(-11)j + (-719)k = 1$ in (möglichst kleinen) ganzen Zahlen j und k . Durch Probieren findet man $j = 196$, $k = -3$ und erhält damit

$$196\tau_m - 3\tau_s = (196 \cdot (-11) + (-3) \cdot (-719))t = t \quad (\text{modulo } 1) .$$

Abschnitt 6.6

1 Wir lösen beide Aufgaben in einem Zug. Ist $t \in 2\pi\mathbb{Z}$, so hat man trivialerweise $\%a = n + 1$ und $\%b = 0$. Im Weiteren sei also $e^{it} \neq 1$. Dann gilt

$$\sum_{k=0}^n e^{ikt} = \frac{e^{i(n+1)t} - 1}{e^{it} - 1} = \frac{e^{i(n+\frac{1}{2})t} - e^{-it/2}}{2i \sin \frac{t}{2}} .$$

Durch Trennung von Real- und Imaginärteil ergibt sich

$$\%a = \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right) + \sin \frac{t}{2}}{2 \sin \frac{t}{2}} , \quad \%b = \frac{\cos \frac{t}{2} - \cos\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right)}{2 \sin \frac{t}{2}} .$$

(Diese Ausdrücke lassen sich natürlich auch anders schreiben.)

Lösungen zu Kapitel 7

Abschnitt 7.1

1 Die Funktion $t \mapsto t^\alpha$ ist im Intervall $I' :=]0, 1]$ für $\alpha < 0$ unbeschränkt, für $\alpha = 0$ konstant $=1$, und für $\alpha > 0$ gilt $\lim_{t \rightarrow 0+} t^\alpha = 0$. Die Funktion $t \mapsto \sin(1/t)$ ist auf dem angegebenen Intervall stetig und beschränkt, aber der $\lim_{t \rightarrow 0+} \sin(1/t)$ existiert nicht.

a Die Funktion f_α ist für $\alpha < 0$ unbeschränkt und für $\alpha \geq 0$ beschränkt.

b Die Funktion f_α ist für $\alpha \leq 0$ im Punkt 0 unstetig, für $\alpha > 0$ aber auf ganz $I := [0, 1]$ stetig; denn dann ist $\lim_{t \rightarrow 0+} t^\alpha \sin(1/t) = 0$.

c Die Funktion f_α ist auf I' differenzierbar nach den üblichen Rechenregeln. Für die Differenzierbarkeit an der Stelle 0 muss der

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{f_\alpha(t) - f_\alpha(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0+} t^{\alpha-1} \sin(1/t)$$

existieren, und das ist nur für $\alpha > 1$ der Fall. Für diese α ist $f'_\alpha(0) = 0$.

d Die Rechenregeln liefern

$$f'_\alpha(t) = \alpha t^{\alpha-1} \sin(1/t) - t^{\alpha-2} \cos(1/t) \quad (t \in I'), \quad (1)$$

und hier steht rechter Hand eine stetige Funktion. Um die Stetigkeit von f'_α an der Stelle 0 zu garantieren, muss $\lim_{t \rightarrow 0+} f'_\alpha(t) = f'_\alpha(0) = 0$ sein, und das ist nur für $\alpha > 2$ der Fall.

e Inspektion der Formel (1) zeigt folgendes: f'_α ist für $\alpha < 2$ auf I' unbeschränkt, für $\alpha \geq 2$ auf I beschränkt.

2a Es sei zum Beispiel $f(c) > g(c)$. Da f und g an der Stelle c stetig sind, gibt es dann eine ganze Umgebung U des Punktes c mit

$$h(t) = f(t) > g(t) \quad (t \in U).$$

Hieraus folgt $h'(c) = f'(c)$. Es sei jetzt $f(c) = g(c) =: a$. Im Sinn von Satz (7.2) gilt dann

$$f(t) = a + m_f(t)(t - c), \quad g(t) = a + m_g(t)(t - c) \quad (t \in I).$$

Hieraus folgt

$$h(t) = a + \max\{m_f(t), m_g(t)\}(t - c) \quad (t > c).$$

Für $t > c$ ist daher $m_h(t) = \max\{m_f(t), m_g(t)\}$, und daraus ergibt sich wegen der Stetigkeit von \max der rechtsseitige Grenzwert $\lim_{t \rightarrow c+} m_h(t) =$

$\max\{f'(c), g'(c)\}$. Analog erhält man $\lim_{t \rightarrow c-} m_h(t) = \min\{f'(c), g'(c)\}$. Die beiden Grenzwerte stimmen genau dann überein (und machen h an der Stelle c differenzierbar), wenn $f'(c) = g'(c)$ ist.

b Die Funktion $t \mapsto |f(t)| = \max\{f(t), -f(t)\}$ ist an allen Stellen c mit $f(c) \neq 0$ differenzierbar, an Stellen c mit $f(c) = 0$ nur dann, wenn $f'(c) = 0$ ist.

3 Ist $x_0 \neq y_0$, so gibt es eine Umgebung U des Punktes (x_0, y_0) mit $x \neq y$ für alle $(x, y) \in U$. Innerhalb U ist durchwegs die obere Alternative der Definition von ϕ anwendbar, und die ist offensichtlich stetig in U , insbesondere an der Stelle (x_0, y_0) .

Betrachte jetzt einen Punkt (x_0, x_0) . Es sei ein $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Da f' stetig ist, gibt es eine Umgebung V von x_0 mit $|f'(x) - f'(x_0)| < \varepsilon$ für alle $x \in V$. Dann ist $U := V \times V$ eine Umgebung des Punktes (x_0, x_0) . Es sei (x, y) ein beliebiger Punkt in U . Ist $x = y \in V$, so gilt $|\phi(x, x) - \phi(x_0, x_0)| = |f'(x) - f'(x_0)| < \varepsilon$. Ist aber $x < y$, so appellieren wir an den Mittelwertsatz **(7.16)**: Es gibt ein $\xi \in]x, y[\subset V$ mit $\phi(x, y) = f'(\xi)$. Somit ist auch in diesem Fall $|\phi(x, y) - \phi(x_0, x_0)| = |f'(\xi) - f'(x_0)| < \varepsilon$.

4 Betrachte an Stelle von f die Funktion $g(t) := f(t) - \sigma t$. Aus $m_g(a) = g'(a) < 0$ folgt die Relation

$$g(t) - g(a) = m_g(t)(t - a) < 0 \quad (a < t < t + h)$$

für ein geeignetes $h > 0$. Die Funktion g ist daher an der Stelle a nicht lokal minimal. Analog zeigt man, dass g auch am rechten Ende b nicht lokal minimal ist. Die stetige Funktion g nimmt daher ihr globales Minimum auf $[a, b]$ in einem inneren Punkt $\xi \in]a, b[$ an, und nach Satz **(7.13)** ist dann $g'(\xi) = 0$, mithin $f'(\xi) = \sigma$.

5 Zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$|f'(t) - \alpha| < \varepsilon \quad (a < t < a + \delta).$$

Betrachte ein beliebiges h mit $0 < h < \delta$. Nach dem Mittelwertsatz **(7.16)**, angewandt auf das Intervall $[a, a + h]$, gibt es ein $\tau \in]a, a + h[$ mit

$$\frac{f(a + h) - f(a)}{h} = f'(\tau),$$

somit gilt dann

$$\left| \frac{f(a + h) - f(a)}{h} - \alpha \right| < \varepsilon$$

für dieses h . Da $h \in]0, \delta[$ beliebig war, folgt die Behauptung.

Abschnitt 7.2

$$1a \quad \%'(t) = \frac{t}{1 + \sqrt{1-t^2}} \frac{-t^2/\sqrt{1-t^2} - 1 - \sqrt{1-t^2}}{t^2} = -\frac{1}{t\sqrt{1-t^2}};$$

$D =]0, 1], \quad D' =]0, 1[.$

$$b \quad \%'(t) = \frac{\beta}{2}(\alpha + \beta t)^{-1/2}(\alpha - \beta t)^{-1/2} + \frac{\beta}{2}(\alpha + \beta t)^{1/2}(\alpha - \beta t)^{-3/2}$$

$$= \alpha\beta(\alpha + \beta t)^{-1/2}(\alpha - \beta t)^{-3/2}.$$

$$D = \left[-\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\alpha}{\beta} \right], \quad D' = \left[-\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\alpha}{\beta} \right[.$$

$$c \quad \%'(t) = \left(\frac{1-t^2}{3} - \frac{2(t+t^2)}{3} + \frac{t-t^2}{2} \right) t^{-2/3}(1-t)^{-1/3}(1+t)^{-1/2}$$

$$= \frac{2-t-9t^2}{6} t^{-2/3}(1-t)^{-1/3}(1+t)^{-1/2}.$$

$$D = [0, 1], \quad D' =]0, 1[.$$

d Aus $\%(t) = \exp(t \log t)$ folgt $\%'(t) = \%(t) \cdot (\log t + 1) = t^t (\log t + 1)$; dabei ist $D = D' = \mathbb{R}_{>0}$.

e Es ist $\frac{d}{dt} \log \tan t = \frac{1}{\tan t} \cdot \frac{1}{\cos^2 t} = \frac{1}{\cos t \sin t}$. Hieraus ergibt sich

$$\%'(t) = -\frac{1}{3 \cos t \sin t} (\log \tan t)^{-4/3}.$$

Die Funktion $\%$ ist nur dort definiert, wo $\tan t > 1$ ist, und dort ist sie auch differenzierbar. Man hat also $D = D' = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left] \frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right[$.

2 Es sei $u(t) := \sin(2t)$ und $v(t) := t^2$. Nach der Leibnizschen Formel ist

$$f^{(100)} = \binom{100}{0} u^{(100)} v + \binom{100}{1} u^{(99)} v' + \binom{100}{2} u^{(98)} v'';$$

alle weiteren Terme verschwinden. Weiter ist

$$u^{(100)}(t) = 2^{100} \sin(2t), \quad u^{(99)}(t) = -2^{99} \cos(2t), \quad u^{(98)}(t) = -2^{98} \sin(2t).$$

Damit erhalten wir

$$f^{(100)}(t) = 1 \cdot 2^{100} \sin(2t) \cdot t^2 - 100 \cdot 2^{99} \cos(2t) \cdot 2t - 4950 \cdot 2^{98} \sin(2t) \cdot 2$$

$$= 2^{98} ((4t^2 - 9900) \sin(2t) - 400t \cos(2t)).$$

Abschnitt 7.3

1 Wie man der Fig. 7.1 entnimmt, besitzt ein der Einheitskugel umschriebener Kegel vom halben Öffnungswinkel α das Volumen

$$V = \frac{\pi}{3} \left(1 + \frac{1}{\sin \alpha}\right)^3 \tan^2 \alpha .$$

Wir setzen $\sin \alpha =: t$ und haben dann die Funktion

$$f(t) := \frac{(1+t)^3}{t(1-t^2)} = \frac{(1+t)^2}{t(1-t)} \quad (0 < t < 1)$$

zu diskutieren. Es ist $\lim_{t \rightarrow 0+} f(t) = \lim_{t \rightarrow 1-} f(t) = \infty$; die Funktion f muss daher in $]0, 1[$ ein globales Minimum annehmen. Die Ableitung $f'(t)$ besitzt das Zählerpolynom

$$Z(t) = (2 + 2t)(t - t^2) - (1 + 2t + t^2)(1 - 2t) = -(1 + t)(1 - 3t) ;$$

im Intervall $]0, 1[$ gibt es daher nur einen kritischen Punkt: $t = \frac{1}{3}$. Der optimale halbe Öffnungswinkel ist somit gegeben durch $\alpha = \arcsin \frac{1}{3}$.

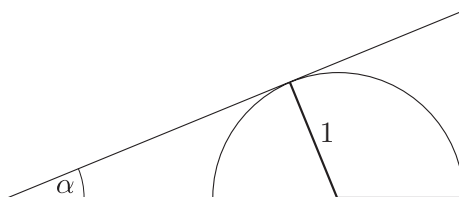


Fig. 7.1

2 Betrachte die Funktion $g(t) := \sqrt{t} - t$. Ihre Ableitung $g'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} - 1$ verschwindet an der Stelle $\tau := \frac{1}{4} \in]0, 1[$, und man berechnet $g(\tau) = \frac{1}{4}$. Hiernach ist

$$\min_{0 \leq t \leq 1} g(t) = \min\{g(0), g(1), g(\tau)\} = \min\left\{0, 0, \frac{1}{4}\right\} = 0$$

und analog

$$\max_{0 \leq t \leq 1} g(t) = \max\left\{0, 0, \frac{1}{4}\right\} = \frac{1}{4} .$$

Unter den Funktionen $g(t) - c$ nimmt daher $g(t) - \frac{1}{8}$ das kleinste Betragsmaximum, nämlich $\frac{1}{8}$, an. Die Antwort auf die ursprüngliche Frage lautet also $l(t) = t + \frac{1}{8}$.

3 Wir müssen die Funktion

$$f(x) := (x - c)^2 + \left(1 - \frac{x^2}{4}\right) = \frac{3}{4}\left(x - \frac{4c}{3}\right)^2 + 1 - \frac{c^2}{3}$$

auf dem x -Intervall $I := [0, 2]$ untersuchen. Der Graph von f ist eine nach oben geöffnete Parabel. Liegt deren Scheitelpunkt $\xi := 4c/3$ in I , so wird das Minimum von f im Punkt ξ angenommen. Dies ist für $c \leq \frac{3}{2}$ der Fall. Ist $c > \frac{3}{2}$, so fällt $\xi > 2$ aus, und f ist auf I streng monoton fallend. Das Minimum von f wird dann an der Stelle $x = 2$ angenommen. In diesem Fall ist also der rechte Scheitelpunkt der $(c, 0)$ am nächsten gelegene Punkt der Ellipse. Die Fig. 7.2 zeigt die beiden Fälle $c = \frac{3}{4}$ und $c = \frac{9}{5}$.

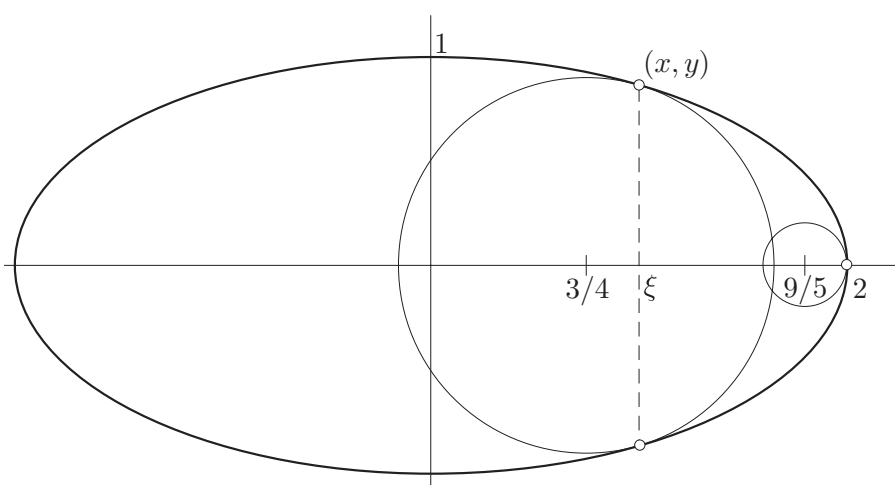


Fig. 7.2

4 Die Ableitung der Funktion $\phi(t) := (a/t)^t = \exp(-t \log(t/a))$ beträgt

$$\phi'(t) = -\phi(t) \left(1 + \log \frac{t}{a}\right).$$

Hiernach ist ϕ streng monoton wachsend für $t < a/e$ und streng monoton fallend für $t > a/e$. Da es im allgemeinen unmöglich ist, genau a/e Teile der Grösse e herzustellen, ist die optimale Anzahl n der Teile eine der beiden Zahlen $\lfloor a/e \rfloor$ und $\lceil a/e \rceil$. Welche der beiden, ist durch Wertvergleich *at runtime* zu ermitteln.

5 Die Funktion $t \mapsto \cos t$ nimmt beliebige Werte x im Intervall $I := [-1, 1]$ an. Die Funktion

$$g(x) := 2x^2 + \alpha x - 1 \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

besitzt daher die gleichen Extremalwerte wie f . Sie besitzt den kritischen Punkt $\xi = -\alpha/4$, der allerdings nur für $|\alpha| < 4$ im Innern von I liegt. Der kritische Wert (falls überhaupt zu berücksichtigen) ist $g(\xi) = -1 - \alpha^2/8$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \max_{t \in \mathbb{R}} f(t) &= \max_{x \in I} g(x) = \max\{g(-1), g(1), g(\xi)\} \\ &= \max\{1 - \alpha, 1 + \alpha, -1 - \alpha^2/8\} \geq 1 \end{aligned}$$

und dasselbe mit \min anstelle von \max :

$$\min_{t \in \mathbb{R}} f(t) = \min\{1 - \alpha, 1 + \alpha, -1 - \alpha^2/8\} \leq -1 .$$

Die angegebenen Schranken ± 1 sind nur mit $\alpha = 0$ realisierbar.

6 Ist $n \geq 5$, so ist $3(n-3) > n$; es lohnt sich also nicht, Teile > 4 herzustellen. Wegen $4 = 2 \cdot 2$ brauchen wir also nur Teile der Grösse 2 und 3 ins Auge zu fassen, und wegen $2^3 < 3^2$ sollte es höchstens zwei Teile der Grösse 2 geben. Ausserdem ist $2 \cdot 2$ besser als $3 \cdot 1$.

Damit ergibt sich die folgende Strategie: Ist die vorgegebene Summe von der Form $N = 3k$, so ist das maximale Produkt $P = 3^k$. Ist $N = 3k + 1$, so wird $P = 2 \cdot 2 \cdot 3^{k-1}$, und im Fall $N = 3k + 2$ wird $P = 2 \cdot 3^k$. Für das vorgegebene $N := 2003$ erhält man so $P = 2 \cdot 3^{667}$, eine 319-stellige Zahl.

7a Besitzt ein dem Kreis eingeschriebenes Dreieck zwei ungleich lange Seiten a und b , so kann man auf der Grundlinie c ein eingeschriebenes gleichschenkeliges Dreieck errichten, das grösseren Flächeninhalt besitzt. Das flächengrösste eingeschriebene Dreieck muss daher lauter gleiche Seiten haben.

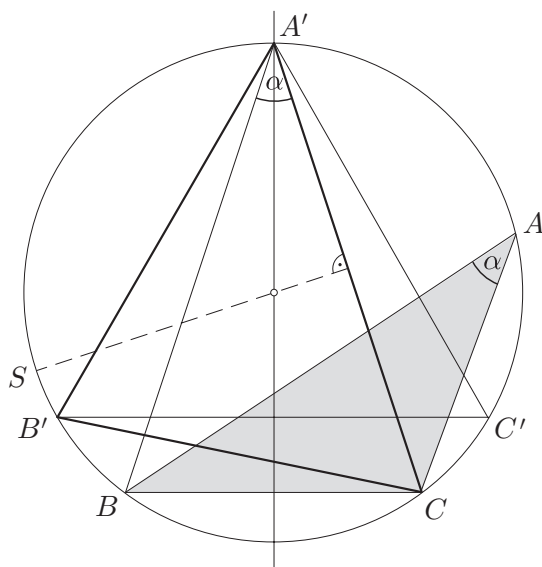


Fig. 7.3

b Das ist überraschend schwierig! Hier ein Vorschlag:

Es sei $\Delta = ABC$ ein beliebiges dem Einheitskreis einbeschriebenes Dreieck. Ist Δ nicht gleichseitig, so ist sein kleinster Winkel $\alpha < \pi/3$. Auf der Gegenseite BC dieses Winkels lässt sich ein einbeschriebenes gleichschenkeliges Dreieck Δ' errichten, das an der Spitze A' gleichfalls den Winkel α aufweist und eher grösseren Flächeninhalt hat als Δ . Damit sind wir in der Situation der Fig. 7.3, in der zusätzlich das gleichseitige Dreieck $A'B'C'$ eingezeichnet ist.

Der Punkt B' liegt zwischen B und dem Scheitelpunkt S zur Seite $A'C$ des Dreiecks Δ' . Folglich hat das Dreieck $\Delta'' := A'CB'$ grösseren Flächeninhalt als Δ' , und weiter hat das gleichschenklige Dreieck $A'B'C'$ über $A'B'$ grösseren Flächeninhalt als Δ'' .

8 Es ist $f'_\lambda(t) = e^t - \lambda$. Hieraus ergibt sich der eine kritische Punkt $\tau = \log \lambda$, der aber nur für $1 < \lambda < e$ im Innern des t -Intervalls $I := [0, 1]$ liegt. In der Fig. 7.4 sind die Graphen der drei Kandidatenfunktionen

$$\begin{aligned} \phi_1(\lambda) &:= f_\lambda(0) = 1 & (\lambda \in \mathbb{R}), \\ \phi_2(\lambda) &:= f_\lambda(1) = e - \lambda & (\lambda \in \mathbb{R}), \\ \phi_3(\lambda) &:= f_\lambda(\tau) = \lambda(1 - \log \lambda) & (1 < \lambda < e) \end{aligned}$$

eingezeichnet. Man entnimmt ihr ohne weiteres

$$m(\lambda) = \begin{cases} 1 & (\lambda \leq 1) \\ \lambda(1 - \log \lambda) & (1 < \lambda < e) \\ e - \lambda & (\lambda \geq e) \end{cases}, \quad M(\lambda) = \begin{cases} e - \lambda & (\lambda \leq e - 1) \\ 1 & (\lambda \geq e - 1) \end{cases}.$$

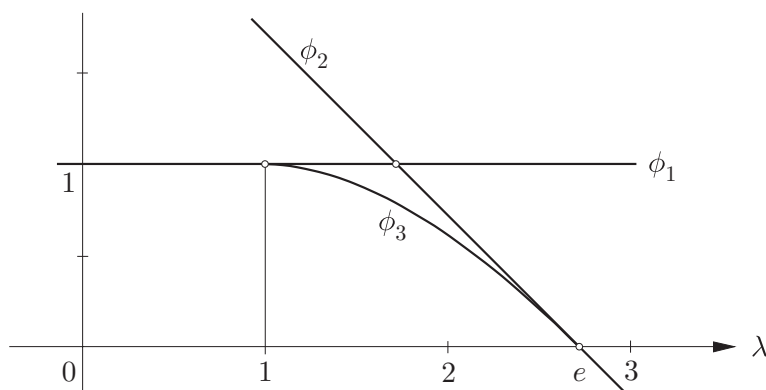


Fig. 7.4

9a Wir setzen noch zur Abkürzung $(1 - q)/(1 + q) =: \rho \in]0, 1[$. Damit ergibt

sich nacheinander

$$\begin{aligned}\tan \phi(t) &= \frac{q \tan t - \tan t}{1 + q \tan^2 t} = \frac{2(q-1) \cos t \sin t}{2 \cos^2 t + 2q \sin^2 t} \\ &= \frac{(q-1) \sin(2t)}{1 + \cos(2t) + q(1 - \cos(2t))} \\ &= -\frac{\rho \sin(2t)}{1 + \rho \cos(2t)} =: g(t),\end{aligned}$$

und zwar trifft das zunächst zu für $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$. Wegen $\phi(0) = 0 = \arctan g(0)$ folgt hieraus $\phi(t) = \arctan g(t)$ und somit

$$f(t) = t + \phi(t) = t + \arctan g(t) \quad \left(-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}\right).$$

Nun ist aber $g(t)$ eine auf ganz \mathbb{R} definierte π -periodische Funktion, und wir können sie für die Fortsetzung von f heranziehen. Damit erhalten wir

$$f^\sim(t) = t - \arctan \frac{\rho \sin(2t)}{1 + \rho \cos(2t)}.$$

b Es geht zunächst um die Extrema der periodischen Funktion $g(t)$, und hierfür müssen wir nur deren kritischen Werte bestimmen. Es ergibt sich $g'(t) = Z(t)/N(t)$ mit

$$Z(t) = -2\rho \cos(2t)(1 + \rho \cos(2t)) + \rho \sin(2t)(-2\rho \sin(2t)) = -2\rho(\cos(2t) + \rho).$$

In den kritischen Punkten von g gilt also $\cos(2t) = -\rho$ und folglich $\sin(2t) = \pm\sqrt{1 - \rho^2}$. Die kritischen Werte von g sind daher die beiden Zahlen

$$\mp \frac{\rho\sqrt{1 - \rho^2}}{1 - \rho^2} = \mp \frac{\rho}{\sqrt{1 - \rho^2}}.$$

Hieraus folgt

$$\max_{t \in \mathbb{R}} |f^\sim(t) - t| = \arctan \frac{\rho}{\sqrt{1 - \rho^2}} = \arcsin \rho = \arcsin \frac{1 - q}{1 + q}.$$

Abschnitt 7.4

1 a, c Nur die Differenzierbarkeit an der Stelle $t = 0$ ist fragwürdig. Hierzu berechnen wir

$$\frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = \frac{t + 2t^2 \sin(1/t)}{t} = 1 + 2t \sin \frac{1}{t} \rightarrow 1 \quad (t \rightarrow 0);$$

somit ist $f'(0) = 1$.

b Für $t \neq 0$ ist $f'(t) = 1 + 4t \sin(1/t) - 2 \cos(1/t)$, und dies ist offensichtlich für $0 < |t| < 1$ beschränkt. Die Behauptung ergibt sich daher im Verein mit **a**.

d Betrachte die Folge $t_k := \frac{1}{2k\pi}$ ($k \geq 1$). Diese Folge konvergiert gegen 0, und es gilt $f'(t_k) = -1$ für alle k . Wähle ein $t_k \in]0, h[$. Im Sinn von Satz (7.2) ist dann

$$f(t) - f(t_k) = m_f(t)(t - t_k) > 0$$

für alle hinreichend nahe bei t_k gelegenen $t < t_k$.

2 Im folgenden bedeutet \lim stets "Grenzwert des angegebenen Ausdrucks, falls dieser Grenzwert existiert".

$$\mathbf{a} \quad \% = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos(\sqrt{1+t}-1) \cdot 1/(2\sqrt{1+t})}{1} = \cos 0 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

$$\mathbf{b} \quad \% = \frac{1+(-1)}{-1} = 0.$$

$$\mathbf{c} \quad \% = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\log a \cdot a^t}{\log b \cdot b^t} = \frac{\log a}{\log b}.$$

d $\% = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2 \sin^2(t/2)}}{t} = \frac{\sqrt{2}}{2} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{|\sin(t/2)|}{t/2}$ existiert nicht; hingegen existieren die einseitigen Grenzwerte

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \lim_{t \rightarrow 0^\pm} \frac{|\sin(t/2)|}{t/2} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\mathbf{e} \quad \% = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{\alpha t^{\alpha-1} - \beta t^{\beta-1}}{\frac{1}{\beta} t^{1/\beta-1} - \frac{1}{\alpha} t^{1/\alpha-1}} = \frac{\alpha - \beta}{1/\beta - 1/\alpha} = \alpha\beta.$$

f Wir setzen $(1 + 2 \sin t)^{\cot t} =: f(t)$. Dann ergibt sich mit Hilfe der Substitution $2 \sin t =: x$ der Grenzwert

$$\lim_{t \rightarrow 0} \log f(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\log(1 + 2 \sin t) \cos t}{\sin t} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} \lim_{t \rightarrow 0} \cos t = 2$$

(siehe Aufgabe 1d, Abschnitt 6.2), und hieraus folgt weiter $\% = e^2$.

Abschnitt 7.5

1a Das betrachtete n -Eck sei dem Einheitskreis einbeschrieben, und es seien $\alpha_k \in]0, \pi[$ ($1 \leq k \leq n$) die Zentriwinkel über dessen Seiten. Die Funktion

\sin ist auf dem Intervall $]0, \pi[$ streng konkav. Damit lässt sich für den Flächeninhalt A dieses n -Ecks die folgende Rechnung aufmachen:

$$A = \frac{n}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \sin \alpha_k \leq \frac{n}{2} \sin \left(\sum_{k=1}^n \alpha_k / n \right) = \frac{n}{2} \sin \frac{2\pi}{n},$$

und zwar gilt hier das Gleichheitszeichen nur, wenn alle $\alpha_k = \frac{2\pi}{n}$ sind.

b Es seien a, b, c mit $a + b + c = 2s$ die drei Seiten des Dreiecks. Nach **(7.30)** (bzw. dessen Spezialfall $p_k = 1/3$ ($1 \leq k \leq 3$)) gilt

$$(s - a)(s - b)(s - c) \leq \left(\frac{3s - a - b - c}{3} \right)^3 = \left(\frac{s}{3} \right)^3.$$

Auf Grund der Heronschen Formel berechnet sich damit der Flächeninhalt des betrachteten Dreiecks wie folgt:

$$A = \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)} \leq \sqrt{\frac{s^4}{27}} = \frac{s^2}{3\sqrt{3}},$$

und zwar gilt hier das Gleichheitszeichen nur, wenn $a = b = c$ ist.

2 Die Funktion $f(x) := -x \log x$ ist für $x > 0$ konkav: Man berechnet nacheinander $f'(x) = -\log x - 1$, $f''(x) = -1/x < 0$. Hieraus folgt

$$H = n \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} f(p_k) \leq n \cdot f \left(\sum_{k=1}^n p_k / n \right) = -n \frac{1}{n} \log \frac{1}{n} = \log n,$$

und zwar gilt hier das Gleichheitszeichen nur, wenn alle p_k den Wert $\frac{1}{n}$ haben.

3a Die Funktion $x \mapsto x^3$ ist für $x \geq 0$ konvex; die behauptete Ungleichung folgt daher unmittelbar aus der Jensenschen Ungleichung **(7.28)**.

b Wir lassen beliebige Exponenten α (anstelle von 3) und n Summanden (anstelle von 3) zu, bleiben aber bei Gewichten $p_k = 1/n$. Die Funktion $x \rightarrow x^\alpha$ ($x > 0$) ist streng konvex für $\alpha < 0$ und $\alpha > 1$ und ist streng konkav für $0 < \alpha < 1$. Damit lässt sich folgendes sagen: Für beliebige $x_k > 0$ ($1 \leq k \leq n$) gilt

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \right)^\alpha \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k^\alpha \quad (\alpha < 0 \text{ oder } \alpha > 1),$$

bzw. dasselbe mit \geq , wenn $0 < \alpha < 1$. Das Gleichheitszeichen gilt jeweils nur, wenn alle x_k übereinstimmen.

Abschnitt 7.6

1 Man erhält nacheinander

$$\begin{aligned}\tan &= \tan, & \tan(0) &= 0, \\ \tan' &= 1 + \tan^2, & \tan'(0) &= 1, \\ \tan'' &= 2 \tan(1 + \tan^2), & \tan''(0) &= 0, \\ \tan''' &= (2 + 6 \tan^2)(1 + \tan^2).\end{aligned}$$

Da \tan ungerade ist und auf $[0, \frac{\pi}{6}]$ monoton wächst, gilt

$$|\tan'''(\tau)| \leq \tan''' \frac{\pi}{6} = \left(2 + \frac{6}{3}\right) \left(1 + \frac{1}{3}\right) = \frac{16}{3} \quad \left(|\tau| \leq \frac{\pi}{6}\right).$$

Damit erhalten wir $j_0^2 \tan(t) = t$ und vor allem die Fehlerabschätzung

$$|\tan t - j_0^2 \tan(t)| = \left| \frac{t^3 \tan'''(\tau)}{3!} \right| \leq \frac{16}{6 \cdot 3} |t|^3 \leq |t|^3 \quad \left(|t| \leq \frac{\pi}{6}\right).$$

2 Man hat

$$\tan\left(\arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3}\right) = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} = \frac{3 + 2}{6 - 1} = 1,$$

folglich trifft die angeschriebene Formel zu. Wir schreiben $\arctan =: f$; dann ist

$$f'(t) = \frac{1}{1+t^2} = \operatorname{Re} \frac{1}{1+it},$$

und mit vollständiger Induktion beweist man

$$f^{(r)}(t) = \operatorname{Re} \frac{(-i)^{r-1} (r-1)!}{(1+it)^r} \quad (r \geq 1). \quad (2)$$

Hieraus folgt

$$\left| \frac{f^{(r)}(t)}{r!} \right| \leq \frac{1}{r} \quad (t \in \mathbb{R}, r \geq 1).$$

Eine Übersichtsrechnung zeigt, dass die Genauigkeit von $j_0^{10} f$ für unsere Zwecke genügt. In der Tat: Die Abschätzung

$$\left| f\left(\frac{1}{2}\right) - j_0^{10} f\left(\frac{1}{2}\right) \right| = \left| \frac{f^{(11)}(\tau)}{11!} \right| \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{11} \leq \frac{1}{11 \cdot 2048}$$

und die analoge Abschätzung mit $\frac{1}{3}$ anstelle von $\frac{1}{2}$ garantieren einen Fehler $< (10)^{-4}$ bei der Anwendung jener Formel für $\frac{\pi}{4}$.

Die Werte $f^{(k)}(0)$ lassen sich an (2) ablesen. Es ergibt sich die folgende Tabelle:

$$\begin{array}{r} k : 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad 10 \\ \hline f^{(k)}(0) : 0 \quad 1 \quad 0 \quad -2! \quad 0 \quad 4! \quad 0 \quad -6! \quad 0 \quad 8! \quad 0 \end{array} .$$

Damit wird

$$j_0^{10} f(t) = t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + \frac{t^9}{9} ,$$

und man erhält den Näherungswert

$$\frac{\pi}{4} \doteq j_0^{10} f\left(\frac{1}{2}\right) + j_0^{10} f\left(\frac{1}{3}\right) = 0.7854353 .$$

Der Vergleich mit dem Tabellenwert $\frac{\pi}{4} = 0.7853982$ zeigt eine Abweichung von 0.0000371.

3 Für alle $k \geq 0$ und alle $\tau \in]0, 1[$ gilt

$$0 < \sinh^{(k)}(\tau) \leq \max\{\cosh \tau, \sinh \tau\} < \cosh \tau + \sinh \tau = e^\tau < e .$$

Hieraus folgt die Abschätzung

$$|\sinh 1 - j_0^n \sinh(1)| = \frac{\sinh^{(n+1)}(\tau)}{(n+1)!} < \frac{e}{(n+1)!} .$$

Um zu garantieren, dass hier die rechte Seite $< \frac{1}{2} \cdot 10^{-100}$ wird, muss $(n+1)! > 2e \cdot 10^{100}$ sein. Wegen $70! \doteq 1.2 \cdot 10^{100}$ ist dies zum ersten Mal für $n = 70$ der Fall. Da \sinh ungerade ist, besitzt $j_0^{70} \sinh$ nur 35 "tatsächlich vorhandene" Glieder.

4 Nach Konstruktion ist $g^{(k)}(0) = 0$ für $0 \leq k \leq 14$, ferner ist $g^{(15)}(0) = \sin 0 = 0$. Die erste an der Stelle 0 nicht verschwindende Ableitung von g ist $g^{(16)}(t) = \cos t$, und zwar ist $g^{(16)}(0) > 0$. Die Funktion g besitzt daher an der Stelle 0 ein lokales Minimum.

5 Gibt es ein $k \geq 1$ mit $a_k \neq 0$, so sei $n := \min\{k \mid k \geq 1, a_k \neq 0\}$. Ist n ungerade, so besitzt f an der Stelle 0 kein lokales Extremum. Ist n gerade, so besitzt f an der Stelle 0 ein lokales Minimum, falls $a_n > 0$, und ein lokales Maximum, falls $a_n < 0$.

Gilt aber $a_k = 0$ für alle $k \geq 1$, so lässt sich kein derartiger Entscheid treffen. Es sei f die in Beispiel 7.6.③ konstruierte Funktion. Die Funktion

$$g(t) := a_0 \pm f(t) \pm f(-t)$$

besitzt dann, je nach Wahl der beiden Vorzeichen, an der Stelle 0 ein lokales Maximum, ein lokales Minimum oder einen Wendepunkt.

6 Ein Lösungsvorschlag, siehe die Fig. 7.5: Es sei f die in Beispiel 7.6.③ konstruierte Funktion. Die Funktion $g : t \mapsto f(2 - t) + f(t - 1)$ ist überall positiv und stimmt für $0 \leq t \leq 1$ mit $t \mapsto f(2 - t)$ überein; ferner ist $t \mapsto f(2 - t)$ für $t \geq 2$ identisch 0. Folglich leistet

$$\phi(t) := \frac{f(2 - |t|)}{f(2 - |t|) + f(|t| - 1)}$$

das Verlangte.

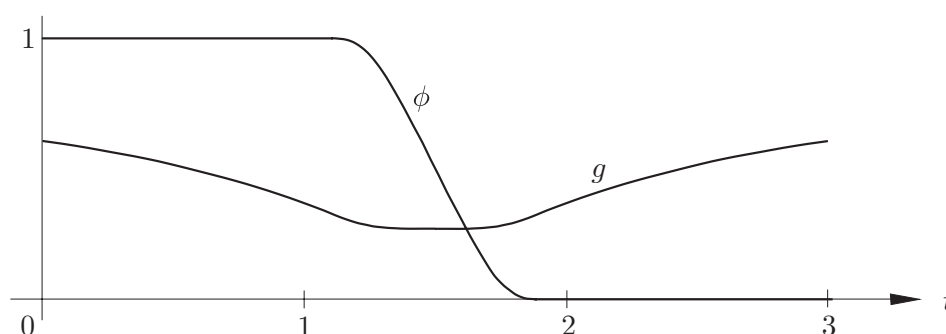


Fig. 7.5

Abschnitt 7.7

1 Wir vertrauen auf die Kraft des Kalküls und nehmen ohne Beweis an, dass auch Nullstellen im Komplexen mit Hilfe des Newtonschen Verfahrens approximiert werden können. Demgemäss lautet die Iterationsvorschrift in diesem Beispiel wie folgt:

$$z_{n+1} := z_n - \frac{z_n^2 - 3z_n + 27}{2z_n - 3} = \frac{z_n^2 - 27}{2z_n - 3}.$$

Damit erhält man

$$z_1 = \frac{(1 + 5i)^2 - 27}{-1 + 10i} = \frac{(-51 + 10i)(-1 - 10i)}{101} = \frac{151}{101} + \frac{500}{101}i$$

und weiter

$$z_2 = \frac{1\,500\,026}{1\,000\,001} + \frac{4\,975\,000}{1\,000\,001}i = 1.500024500 + 4.974995025i.$$

Die wahre Lösung lautet $\frac{3}{2}(1 + \sqrt{11}i) = 1.500000 + 4.974937i$.

2 Die Iterationsvorschrift lautet hier

$$x_{n+1} := x_n - \frac{x_n^2}{2x_n} = \frac{x_n}{2}.$$

Hieraus folgt natürlich $x_n = 2^{-n}$. Der Abstand von der wahren Lösung $\xi = 0$ halbiert sich also mit jedem Schritt; die Konvergenz ist *linear*. Das steht nicht in Widerspruch zu den Ausführungen in Abschnitt 7.7, denn eine entscheidende Voraussetzung ist nicht erfüllt: Im vorliegenden Beispiel ist $f'(\xi) = 0$.

3 Die Rekursionsvorschrift lautet hier

$$x_{n+1} = x_n - \frac{1/x_n - c}{-1/x_n^2} = x_n(2 - cx_n).$$

Für die Konvergenzdiskussion betrachten wir die Hilfsgrößen $y_n := 1 - cx_n$. Sie genügen der Rekursion

$$y_{n+1} = 1 - cx_{n+1} = 1 - cx_n(2 - cx_n) = y_n^2 \quad (n \geq 0).$$

Hieraus folgt $|y_n| = |y_0|^{2^n} = |1 - c|^{2^n}$, und dies konvergiert wegen $|1 - c| < 1$ "quadratisch" gegen 0. Wegen

$$\left| \frac{1}{c} - x_n \right| = \frac{1}{c} |y_n|$$

ist die Konvergenz der x_n gegen $\frac{1}{c}$ von derselben Rasananz.

Lösungen zu Kapitel 8

Abschnitt 8.1

1 Die Bewegung erfolgt längs der z -Achse mit Nullpunkt im Erdmittelpunkt.

a Ist $|z - R| \ll R$, so hat man die Differentialgleichung $\ddot{z} = -g$ mit den Lösungen $z(t) = z_0 + v_0 t - \frac{g}{2} t^2$.

b Die Gravitationskraft und damit die Beschleunigung eines Probekörpers nimmt für $z \geq R$ mit dem Quadrat des Abstands vom Erdmittelpunkt ab. Ist $z = R$, so beträgt diese Beschleunigung $-g$. Damit erhalten wir die folgende Differentialgleichung:

$$\ddot{z} = -\frac{gR^2}{z^2} \quad (z \geq R) .$$

c Befindet sich der Probekörper im Erdinnern, so wirkt nur die weiter innen gelegene Erdmasse, und zwar so, als ob sie im Erdmittelpunkt konzentriert wäre. Die gegen den Erdmittelpunkt gerichtete Beschleunigung eines Probekörpers ist dann proportional zu $\frac{4\pi}{3} r^3 / r^2$, also proportional zu $r = |z|$. Damit erhalten wir eine Differentialgleichung der Form $\ddot{z} = -cz$ für ein gewisses $c > 0$, und Eichung an der Erdoberfläche liefert definitiv

$$\ddot{z} = -\frac{g}{R} z \quad (z \leq R) .$$

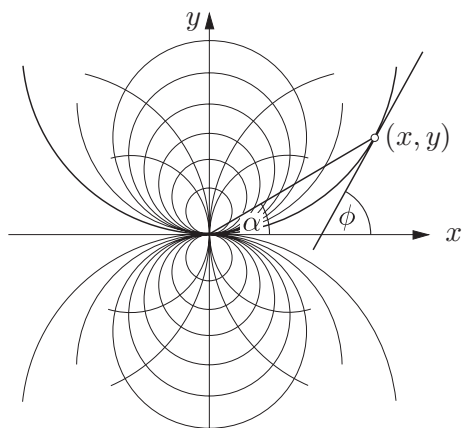


Fig. 8.1

2 Wir beziehen uns auf die Fig. 8.1. Die erhaltenen Gleichungen gelten in den Punkten $x = \pm y$ "sinngemäss".

a Betrachte einen Punkt (x, y) im Innern des ersten Quadranten. Die Steigung des Kreises $\gamma \in \Gamma$ durch den Punkt (x, y) ist gegeben durch

$$y' = \tan \phi = \tan(2\alpha) = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{2y/x}{1 - y^2/x^2} .$$

Die Differentialgleichung der Schar Γ lautet daher

$$y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2} .$$

b Die Steigung der Orthogonaltrajektorie zu Γ im Punkt (x, y) ist das negativ Reziproke zur Steigung der Scharcurve im Punkt (x, y) . Die Differentialgleichung der Orthogonaltrajektorien lautet demnach:

$$y' = \frac{y^2 - x^2}{2xy} .$$

c Vermutung: Γ^\perp ist die Schar Γ' der Kreise, die die y -Achse im Ursprung berühren. Beweis:

□ Es sei (x, y) ein beliebiger Punkt im Innern des ersten Quadranten. Es gibt genau einen Kreis $\gamma \in \Gamma$ durch (x, y) und genau einen Kreis $\gamma' \in \Gamma'$ durch (x, y) . Diese beiden Kreise schneiden sich im Ursprung in einem rechten Winkel, also auch im Punkt (x, y) . Die Schar Γ' hat daher die von Γ^\perp verlangten Eigenschaften. ┘

d Die Schar Γ' wird beschrieben durch die Gleichung

$$(x - c)^2 + y^2 = c^2 \tag{1}$$

bzw.

$$2x(x - c) = x^2 - y^2 \tag{2}$$

Ist $\gamma' : y = y(x)$ ein Mitglied dieser Schar, so folgt durch Ableitung von (1) nach x die Beziehung

$$2(x - c) + 2y(x)y'(x) = 0 ,$$

und mit (2) ergibt sich

$$y'(x) = -\frac{x - c}{y(x)} = -\frac{x^2 - y^2(x)}{2xy(x)} .$$

Die Kurven γ' der Schar $\Gamma' = \Gamma^\perp$ genügen daher tatsächlich der in **b** ermittelten Differentialgleichung.

3a (Fig. 8.2, links) Durch jeden Punkt (x, y) mit $0 < y < s$ gehen zwei Scharkurven. Ist $0 < \phi < \frac{\pi}{2}$, so gilt

$$y' = \tan \phi = \frac{y}{\sqrt{s^2 - y^2}} .$$

Aus Symmetriegründen erhält man daher folgende Differentialgleichung der beiden Scharen:

$$y' = \pm \frac{y}{\sqrt{s^2 - y^2}} \quad (0 < y < s) .$$

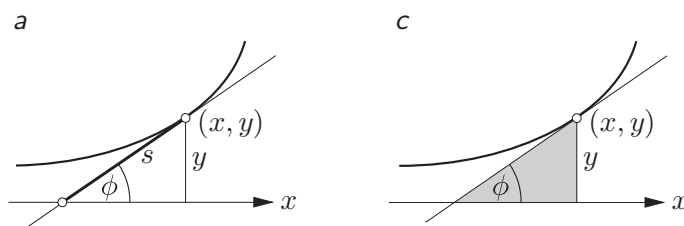


Fig. 8.2

b (Fig. 8.3) Kurven der beschriebenen Art sind erstens die “angestellten Leitern” der Länge s ; sie erfüllen die Tangentenbedingung trivialer Weise. Zusätzlich gibt es aber noch die sogenannte **Enveloppe** ε dieser Geradenschar, eine Kurve, die in jedem ihrer Punkte eine Schargerade berührt und damit die Tangentenbedingung ebenfalls erfüllt.

Liegt der Punkt (x, y) auf der Schargeraden mit Anstellwinkel ϕ , so gilt

$$\frac{x}{\cos \phi} + \frac{y}{\sin \phi} = s, \quad 0 < \phi < \frac{\pi}{2} .$$

Drücken wir hier $\cos \phi$ und $\sin \phi$ durch $\tan \phi = -y'$ aus, so ergibt sich, dass x , y und y' wie folgt miteinander verknüpft sind:

$$x\sqrt{1 + y'^2} - y\frac{\sqrt{1 + y'^2}}{y'} = s .$$

Dies ist die gesuchte Differentialgleichung; sie wird von den Schargeraden, aber auch von der Enveloppe ε erfüllt. Leider lässt sie sich nicht in einfacher Weise nach y' auflösen. Man schreibt sie dann gern in der folgenden Form:

$$y = y' x - \frac{s y'}{\sqrt{1 + y'^2}} .$$

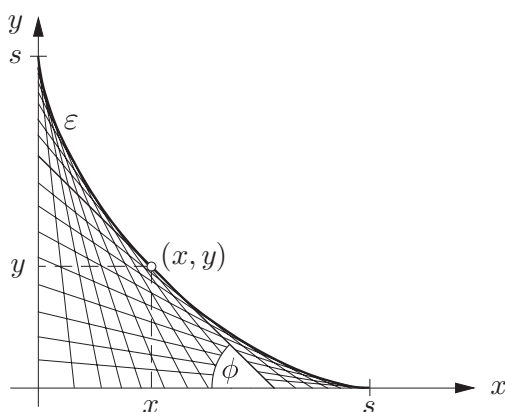


Fig. 8.3

c (Fig. 8.2, rechts) Durch jeden Punkt (x, y) mit $y > 0$ gehen zwei Scharkurven. Ist $0 < \phi < \frac{\pi}{2}$, so lautet die angegebene geometrische Bedingung:

$$\frac{1}{2}y^2 \cot \phi = s^2 .$$

Hier ist $\cot \phi = 1/y'$. Aus Symmetriegründen erhält man daher die folgende Differentialgleichung der beiden Scharen:

$$y' = \pm \frac{y^2}{2s^2}$$

4 Die Formeln und Ergebnisse von Beispiel ② können direkt übernommen werden. Nach (7) hat man die charakteristische Gleichung

$$2\lambda^2 + 60\lambda + 300 = 0$$

mit den Wurzeln $\lambda_1 = -5(3 - \sqrt{3})$ und $\lambda_2 = -5(3 + \sqrt{3})$. Die Lösung mit den Anfangsbedingungen $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = v_0$ ist gemäss der letzten Formel jenes Beispiels gegeben durch

$$y(t) = \frac{e^{\lambda_1 t}}{\lambda_1 - \lambda_2} g(t), \quad g(t) = (v_0 - \lambda_2 y_0 + (\lambda_1 y_0 - v_0) e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t}) .$$

Die Funktion g hat den Anfangswert $g(0) = (\lambda_1 - \lambda_2)y_0 > 0$ und den Endwert $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = v_0 - \lambda_2 y_0$. Ein Nulldurchgang von g und damit von $y(\cdot)$ findet genau dann statt, wenn dieser Endwert negativ ist. Um $v_0 - \lambda_2 y_0 \geq 0$ mit negativem v_0 sicherzustellen, muss

$$|v_0| = -v_0 \leq -\lambda_2 y_0 = \frac{5(3 + \sqrt{3})}{2} = 11.830 \dots$$

sein. Die nach unten gerichtete Anfangsgeschwindigkeit darf also höchstens 11.830 m/s betragen, wenn kein Nulldurchgang eintreten soll.

5 Aus $(y'^2 - y)(y'^2 + y) = 0$ folgt

$$y' = \begin{cases} \pm\sqrt{y} & (y > 0) \\ 0 & (y = 0) \\ \pm\sqrt{-y} & (y < 0) \end{cases} .$$

Für einen Anfangspunkt (t_0, y_0) mit $y_0 > 0$ erfüllt die Differentialgleichung $y' = \sqrt{y}$ die Voraussetzungen des Existenz- und Eindeutigkeitsatzes und besitzt damit genau eine Lösung durch diesen Punkt. In der Folge gehen durch jeden Punkt (t_0, y_0) mit $y_0 \neq 0$ genau zwei Lösungen der ursprünglichen Differentialgleichung. In den Punkten $(t_0, 0)$ sind jene Voraussetzungen allerdings nicht erfüllt, wie sich gleich herausstellen wird.

Die Lösungen der Differentialgleichung $y'^2 = \pm y$ lassen sich nämlich mit Hilfe des naheliegenden Ansatzes $y(t) = A(t - c)^\beta$ explizit bestimmen. Man erhält die Bedingung

$$A^2\beta^2(t - c)^{2\beta-2} \equiv \pm A(t - c)^\beta ,$$

die durch $A = 0$ sowie durch $\beta = 2$, $A = \pm\frac{1}{4}$ und beliebiges c befriedigt wird. Alles in allem ergibt sich: Die sämtlichen Lösungen der Differentialgleichung $(y')^4 - y^2 = 0$ sind die Parabeln $y(t) = \pm\frac{1}{4}(t - c)^2$, $c \in \mathbb{R}$, sowie die Gerade $y = 0$.

Durch einen Anfangspunkt $(t_0, 0)$ gehen demnach zwei dieser Parabeln sowie die spezielle Lösung $y = 0$. Hieraus lassen sich insgesamt 9 verschiedene Lösungen des betreffenden Anfangswertproblems fabrizieren; denn man kann für $t < t_0$ und für $t > t_0$ unabhängig voneinander die obere oder die untere Parabel oder aber die spezielle Lösung wählen.

6a Siehe die Fig. 8.4. Oberhalb der Linie $y = 1$ hat das Richtungsfeld die konstante Steigung 1.

b Die Lösung durch den Anfangspunkt P_1 ist

$$y(t) = -e^t \quad (-\infty < t < \infty) ,$$

und die Lösung durch den Anfangspunkt P_2 ist (siehe die Fig. 8.4)

$$y(t) = \begin{cases} e^{t-1} & (t \leq 1) \\ t & (t \geq 1) \end{cases} .$$

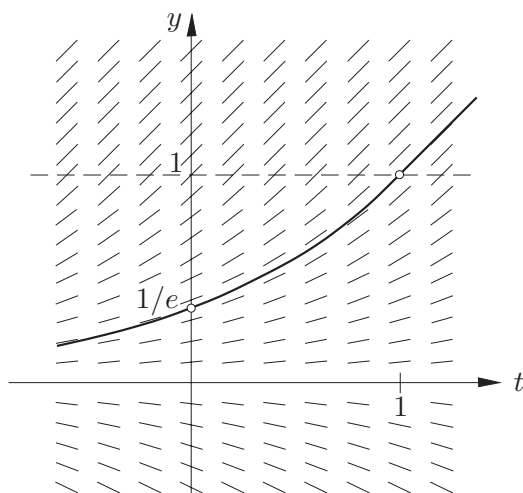


Fig. 8.4

Abschnitt 8.2

1 Das charakteristische Polynom q_L besitzt die beiden Nullstellen $-2 \pm i$, je mit Vielfachheit 2. Das einfachste Polynom mit dieser Eigenschaft ist

$$\begin{aligned} q_L(\lambda) &= (\lambda + 2 - i)^2(\lambda + 2 + i)^2 = (\lambda^2 + 4\lambda + 5)^2 \\ &= \lambda^4 + 8\lambda^3 + 26\lambda^2 + 40\lambda + 25 \end{aligned}$$

und die hierzu gehörige Differentialgleichung lautet:

$$y'''' + 8y''' + 26y'' + 40y' + 25y = 0 .$$

2a $y'' - y = 0$.

b Diese Funktion ist nicht Lösung einer derartigen Differentialgleichung.

c Die Funktion ϕ_3 ist eine Linearkombination von \cos und \sin , mithin eine Lösung der Differentialgleichung $y'' + y = 0$.

d Das charakteristische Polynom hat die doppelte Nullstelle 0 sowie die beiden Nullstellen $\pm i$. Das Polynom niedrigsten Grades mit dieser Eigenschaft ist $q(\lambda) = \lambda^2(\lambda^2 + 1)$; die zugehörige Differentialgleichung lautet

$$y'''' + y'' = 0 .$$

e Man hat $\phi_5(t) = \exp(\log t / \log t) \equiv e$; folglich ist ϕ_5 Lösung der Differentialgleichung $y' = 0$.

3a Die charakteristische Gleichung $\lambda^2 - 4 = 0$ besitzt die beiden Lösungen 2 und -2 . Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung lautet demnach $y_{\text{hom}}(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t}$. Da -1 nicht Eigenwert ist, können wir für

eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung den folgenden Ansatz machen:

$$y_p(t) = (A + Bt)e^{-t} .$$

Man berechnet $\dot{y}_p(t) = (B - A - Bt)e^{-t}$, $\ddot{y}_p(t) = (-2B + A + Bt)e^{-t}$ und muss nun

$$\ddot{y}_p(t) - 4y_p(t) = (-2B - 3A - 3Bt)e^{-t} \equiv te^{-t}$$

sicherstellen. Koeffizientenvergleich liefert nacheinander $B = -\frac{1}{3}$, $A = \frac{2}{9}$. Die allgemeine Lösung von % lautet demnach

$$y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t} + \left(\frac{2}{9} - \frac{t}{3}\right) e^{-t} .$$

b Das charakteristische Polynom $q(\lambda) = \lambda^3 + \omega^2 \lambda$ besitzt die Nullstellen 0 und $\pm i\omega$. Die allgemeine reelle Lösung der homogenen Gleichung $\ddot{y} + \omega^2 \dot{y} = 0$ lautet demnach $y_{\text{hom}}(t) = c_1 + c_2 \cos(\omega t) + c_3 \sin(\omega t)$. Auf der rechten Seite von % sind ebenfalls die Frequenzen 0 und $\pm i\omega$ angeregt. Auf Grund von Satz (8.8) (mit $m = 1$) gibt es daher eine partikuläre Lösung von % der folgenden Form:

$$y_p(t) = A_1 t + A_2 t^2 + A_3 t^3 \\ + (B_1 t + B_2 t^2 + B_3 t^3) \cos(\omega t) + (C_1 t + C_2 t^2 + C_3 t^3) \sin(\omega t) .$$

Das charakteristische Polynom von % ist ungerade. Der zugehörige Differentialoperator L verwandelt daher gerade Funktionen in ungerade, und umgekehrt. Da nun die rechte Seite vom % eine gerade Funktion ist, muss y_p von vorneherein ungerade sein. Der obige Ansatz vereinfacht sich damit zu

$$y_p(t) = A_1 t + A_3 t^3 + (B_1 t + B_3 t^3) \cos(\omega t) + C_2 t^2 \sin(\omega t) .$$

Nach längerer Rechnung ergibt sich

$$\ddot{y}_p(t) + \omega^2 \dot{y}_p(t) = 6A_3 + A_1 \omega^2 + 3A_3 \omega^2 t^2 \\ - (2B_1 \omega^2 - 6C_2 \omega - 6B_3 + 6B_3 \omega^2 t^2) \cos(\omega t) \\ - (4C_2 \omega^2 + 18B_3 \omega) t \sin(\omega t) ,$$

und dies soll $\equiv t^2 + t^2 \cos(\omega t)$ sein. Durch Koeffizientenvergleich erhält man nacheinander die Gleichungen

$$A_3 = \frac{1}{3\omega^2}, \quad A_1 = -\frac{2}{\omega^4}; \quad B_3 = -\frac{1}{6\omega^2}, \quad C_2 = \frac{3}{4\omega^3} ,$$

$$B_1 = \frac{1}{2\omega^2}(6C_2 \omega + 6B_3) = \frac{7}{4\omega^4} .$$

Damit erhalten wir als allgemeine Lösung von % die Funktionenschar

$$y(t) = c_1 + c_2 \cos t + c_3 \sin t - \frac{2}{\omega^4}t + \frac{1}{3\omega^2}t^3 + \left(\frac{7}{4\omega^4}t - \frac{1}{6\omega^2}t^3\right) \cos(\omega t) + \frac{3}{4\omega^3}t^2 \sin(\omega t).$$

Merke: Ein Ansatz ist eine "Kandidatenliste". Die nachfolgende Rechnung bringt heraus, welche Kandidaten sämtliche Bedingungen erfüllen. Wenn kein Kandidat passt, war der Ansatz für die Katz.

4 Als nichttriviale 2π -periodische Lösungen kommen nur Funktionen der Form $t \mapsto e^{ikt}$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, und Linearkombinationen davon in Frage. Hieraus zieht man den folgenden Schluss: Damit die Differentialgleichung $\ddot{y} + \alpha y = 0$ derartige Lösungen besitzt, muss die charakteristische Gleichung $\lambda^3 + \alpha = 0$ eine Lösung der Form ik mit $k \neq 0$ haben. Dies ist genau dann der Fall, wenn $\alpha = ik^3$ ist für ein $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

5 Alle drei Funktionen genügen der Differentialgleichung $y''' - y = 0$ mit dem charakteristischen Polynom $\lambda^3 - 1 = 0$. Deren allgemeine reelle Lösung ist

$$y(t) = c_1 e^t + e^{-t/2} \left(c_2 \cos \frac{\sqrt{3}t}{2} + c_3 \sin \frac{\sqrt{3}t}{2} \right).$$

Wir probieren es mit

$$y_0(t) := e^t + e^{-t/2} \cos \frac{\sqrt{3}t}{2}.$$

Man berechnet

$$y_1(t) := y_0'(t) = e^t - e^{-t/2} \left(\frac{1}{2} \cos \frac{\sqrt{3}t}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \frac{\sqrt{3}t}{2} \right),$$

$$y_2(t) := y_1'(t) = e^t - e^{-t/2} \left(\frac{1}{2} \cos \frac{\sqrt{3}t}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \frac{\sqrt{3}t}{2} \right).$$

Dann gilt von selbst auch $y_2' = y_0$. Wir behaupten: Die drei angegebenen Funktionen y_0, y_1, y_2 sind linear unabhängig.

□ Damit eine Linearkombination $A_0 y_0 + A_1 y_1 + A_2 y_2$ identisch verschwindet, muss wegen der e^t -Terme $A_0 + A_1 + A_2 = 0$ sein. Die Punktprobe bei $t = 0$ liefert die weitere Bedingung $2A_0 + \frac{1}{2}(A_1 + A_2) = 0$. Damit gilt schon $A_0 = 0$ und $A_1 + A_2 = 0$, d.h. $A_2 = -A_1$. Es folgt

$$A_0 y_0(t) + A_1(t) + A_2 y_2(t) = -A_1 e^{-t/2} \sqrt{3} \sin \frac{\sqrt{3}t}{2},$$

und dies ist nur dann $\equiv 0$, wenn $A_1 = 0$ (und damit auch $A_2 = 0$) ist. □

6a Vorweg ist $\cos \alpha + \sin \alpha = \sqrt{2} \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$. Wir setzen daher zur Abkürzung $\alpha + \frac{\pi}{4} =: \beta$. Die charakteristische Gleichung der angegebenen Differentialgleichung lautet dann wie folgt:

$$\lambda^2 + (2 + \sqrt{2} \sin \beta)\lambda + 3 = 0,$$

und ihre Lösungen sind die beiden Zahlen

$$\frac{1}{2} \left(-2 - \sqrt{2} \sin \beta \pm \sqrt{4\sqrt{2} \sin \beta + 2 \sin^2 \beta - 8} \right).$$

Nun ist $4\sqrt{2} \sin \beta + 2 \sin^2 \beta \leq 4\sqrt{2} + 2 < 8$; folglich sind die beiden Eigenwerte in jedem Fall komplex. Es kommt also zu (gedämpften oder anschwellenden) Schwingungen. Der Realteil der beiden Eigenwerte ist wegen

$$-2 - \sqrt{2} \sin \beta \leq -2 + \sqrt{2} < 0$$

für alle β negativ; die resultierenden Schwingungen sind daher in der Tat gedämpft.

b Der Realteil der beiden Eigenwerte ist am kleinsten, nämlich $= -1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$, wenn $\sin \beta = 1$ ist, und dies ist für $\alpha = \frac{\pi}{4}$ der Fall.

7 Die drei Nullstellen der charakteristischen Gleichung $\lambda^3 + i = 0$ sind

$$\lambda_0 = i, \quad \lambda_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}.$$

Die Funktionen $t \mapsto e^{it}$ sind ungedämpfte harmonische Schwingungen, und die Funktionen $t \mapsto e^{\sqrt{3}t/2} \cdot e^{-it/2}$ sind anschwellende Schwingungen. Die für $t \rightarrow \infty$ exponentiell gedämpften Lösungen dieser Differentialgleichung sind somit genau die zu λ_1 gehörenden Funktionen $y(t) = C e^{-\sqrt{3}t/2} \cdot e^{-it/2}$.

8 Die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung $\ddot{y} + \omega^2 y = 0$ ist $y_{\text{hom}}(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$. Um eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung zu erhalten, machen wir den Ansatz $y_p(t) = C e^{-\delta t}$. Es folgt $y_p''(t) = \delta^2 C e^{-\delta t}$, so dass wir nun durch geeignete Wahl von C die Identität

$$\delta^2 C e^{-\delta t} + \omega^2 C e^{-\delta t} \equiv e^{-\delta t}$$

sicherstellen müssen. Dies wird durch $C = 1/(\delta^2 + \omega^2)$ erreicht. Die allgemeine Lösung der gegebenen Differentialgleichung lautet also folgendermassen:

$$y(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) + \frac{e^{-\delta t}}{\delta^2 + \omega^2}.$$

Wir benötigen noch

$$y'(t) = -A\omega \sin(\omega t) + B\omega \cos(\omega t) - \frac{\delta e^{-\delta t}}{\delta^2 + \omega^2}$$

und haben nun mit Hilfe der Anfangsbedingungen die Konstanten A und B zu bestimmen. Es ergeben sich die Gleichungen

$$A + \frac{1}{\delta^2 + \omega^2} = 0, \quad B\omega - \frac{\delta}{\delta^2 + \omega^2} = 0$$

mit den Lösungen

$$A = -\frac{1}{\delta^2 + \omega^2}, \quad B = \frac{\delta/\omega}{\delta^2 + \omega^2}.$$

Die Amplitude der verbleibenden stationären harmonischen Schwingung berechnet sich somit zu

$$\sqrt{A^2 + B^2} = \frac{1}{\omega\sqrt{\delta^2 + \omega^2}}.$$

Abschnitt 8.3

1 Das Indexpolynom lässt sich wie folgt zerlegen:

$$q_{\text{ind}}(\alpha) = \alpha(\alpha - 1) - 4\alpha + 6 = \alpha^2 - 5\alpha + 6 = (\alpha - 2)(\alpha - 3).$$

Hiernach ist die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung gegeben durch $y_{\text{hom}}(r) = c_1 r^2 + c_2 r^3$. Der in % rechter Hand auftretende Exponent 5 legt nahe, für eine partikuläre Lösung von % den Ansatz $y_p(r) = A r^7$ zu machen. Durch Einsetzen in % ergibt sich die Bedingung

$$42Ar^5 - 28Ar^5 + 6Ar^5 \equiv r^5;$$

sie liefert $A = \frac{1}{20}$. Die allgemeine Lösung von % lautet demnach

$$y(r) = c_1 r^2 + c_2 r^3 + \frac{1}{20} r^7.$$

Lösungen zu Kapitel 9

Abschnitt 9.1

1 Wir schreiben zur Abkürzung $\sup(f|B) := \sup\{f(x) \mid x \in B\}$ und analog $\inf_B f := \inf\{f(x) \mid x \in B\}$. Für eine beliebige Teilung T des Intervalls $[a, b]$ sind dann die Riemannsche Obersumme und die Riemannsche Untersumme von f definiert durch

$$\bar{R}_T(f) := \sum_{k=1}^n \sup(f|Q_k) \mu(Q_k), \quad \underline{R}_T(f) := \sum_{k=1}^n \inf(f|Q_k) \mu(Q_k).$$

a Dies folgt unmittelbar aus der für beliebige $M \subset \mathbb{R}$ gültigen Beziehung $\text{diam}(M) = \sup M - \inf M$, deren Beweis wir hier nachholen:

□ Es sei $\inf M =: \alpha$, $\sup M =: \beta$ und $\text{diam}(M) =: d$. Es gilt $-y \leq -\alpha$ für alle $y \in M$ und folglich

$$d := \sup\{|x - y| \mid x, y \in M\} = \sup\{x - y \mid x, y \in M\} \leq \beta - \alpha.$$

Umgekehrt gilt $x - y \leq d$, bzw. $x \leq d + y$, für alle $x, y \in M$. Folglich gilt dann auch noch $\beta \leq d + y$, bzw. $y \geq \beta - d$ für jedes feste $y \in M$. Hiernach ist $\beta - d$ eine untere Schranke für M , und hieraus folgt $\alpha \geq \beta - d$ oder eben $d \geq \beta - \alpha$. □

b Ist Q_k eine disjunkte Vereinigung von Teilintervallen Q'_j ($r \leq j \leq s$), so gilt

$$\sup(f|Q'_j) \leq \sup(f|Q_k) \quad (r \leq j \leq s), \quad \mu(Q_k) = \sum_{j=r}^s \mu(Q'_j).$$

Hieraus folgt

$$\sum_{j=r}^s \sup(f|Q'_j) \mu(Q'_j) \leq \sum_{j=r}^s \sup(f|Q_k) \mu(Q'_j) = \sup(f|Q_k) \mu(Q_k),$$

und durch Summation über alle k ergibt sich die Behauptung.

c Es seien T' eine beliebige Teilung, die feiner ist als T , und τ ein zugehöriger Satz von Messpunkten. Dann gilt nach **b** die Ungleichung

$$R_{T'}(f) \leq \bar{R}_{T'}(f) \leq \bar{R}_T(f).$$

Es sei ein $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Ist T' hinreichend fein, so trifft auch die Ungleichung

$$R_{T'}(f) \geq \int_{[a,b]} f d\mu - \varepsilon$$

zu. Folglich ist $\int_{[a,b]} f d\mu \leq \overline{R}_T(f) + \varepsilon$, und da $\varepsilon > 0$ beliebig war, gilt in Wirklichkeit sogar $\int_{[a,b]} f d\mu \leq \overline{R}_T(f)$. Analog schliesst man bezüglich $\underline{R}_T(f)$.

2 Da die Funktion $f(x) := e^{-x^2/2}$ auf dem Intervall $[0, 2]$ monoton fällt, lässt sich folgendes sagen: Wählt man als Messpunkt in jedem Q_k den Punkt $\tau_k := t_{k-1}$, so erhält man einen zu grossen Näherungswert

$$S_1 := \frac{1}{10} \sum_{k=0}^{19} f\left(\frac{k}{10}\right) = 1.2393 \dots ;$$

setzt man stattdessen $\tau_k := t_k$, so erhält man einen zu kleinen Näherungswert

$$S_2 := \frac{1}{10} \sum_{k=1}^{20} f\left(\frac{k}{10}\right) = 1.1528 \dots .$$

Der Tabellenwert ist $\int_0^2 e^{-x^2/2} dx = 1.19629 \dots$

3 Die Funktion f genügt auf $[0, 1]$ der Abschätzung $0 \leq f(t) < 1$, und die Menge $N := \{\frac{1}{n} \mid n \geq 1\}$ der Unstetigkeitsstellen von f ist eine Nullmenge. Auf Grund von Satz (9.15) ist somit f über $[0, 1]$ integrierbar.

Ist

$$\frac{1}{n+1} < t \leq \frac{1}{n}$$

für ein $n \geq 1$, so folgt $n \leq 1/t < n+1$ und somit $[1/t] = n$. Die Funktion f lässt sich daher folgendermassen schreiben:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{t} - n & \left(\frac{1}{n+1} < t \leq \frac{1}{n}, n \geq 1 \right), \\ 0 & (t = 0). \end{cases}$$

Damit ergibt sich für beliebiges $N \geq 2$ die Beziehung

$$\begin{aligned} \int_{1/N}^1 f(t) d\mu(t) &= \int_{1/N}^1 \frac{1}{t} d\mu(t) - \sum_{n=1}^{N-1} \int_{1/(n+1)}^{1/n} n d\mu(t) \\ &= \log 1 - \log \frac{1}{N} - \sum_{n=1}^{N-1} n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= \log N - \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n+1} = \log N - \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} + 1, \end{aligned}$$

und hieraus folgt wegen $0 \leq f(t) < 1$ leicht das Endresultat

$$\int_0^1 f(t) d\mu(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{1/N}^1 f(t) d\mu(t) = 1 - \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - \log N \right).$$

Der rechter Hand erschienene Grenzwert

$$\gamma := \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{N} - \log N \right) = 0.5772157\dots$$

ist die berühmte **Eulersche Konstante**, die in vielen Formeln der höheren Analysis auftritt.

4a Wir dürfen ohne Beschränkung der Allgemeinheit $a = f(a) = 0$ und $b = f(b) = 1$ annehmen. Wir teilen das Intervall $[0, 1]$ wie vorgeschlagen in N^2 gleiche Teile Q_k . Dann gilt wegen der Monotonie $|\Delta f|_{Q_k} = f(t_k) - f(t_{k-1})$ und folglich

$$\sum_{k=1}^{N^2} |\Delta f|_{Q_k} = f(1) - f(0) = 1. \tag{1}$$

Ein k bzw. Q_k ist *schlecht*, falls $|\Delta f|_{Q_k} \geq \frac{1}{N}$ ist. Alle andern k bzw. Q_k sind *gut*. Wegen (1) kann es höchstens N schlechte k geben, und für jedes von ihnen ist $|\Delta f|_{Q_k} \leq 1$. Die Menge der schlechten k bezeichnen wir mit S , diejenige der guten k mit G . Wir können dann folgende Rechnung aufmachen:

$$D_T(f) = \sum_{k \in S} |\Delta f|_{Q_k} \frac{1}{N^2} + \sum_{k \in G} |\Delta f|_{Q_k} \frac{1}{N^2} \leq N \cdot 1 \cdot \frac{1}{N^2} + N^2 \cdot \frac{1}{N} \cdot \frac{1}{N^2} = \frac{2}{N},$$

und hier kann die rechte Seite durch geeignete Wahl von N beliebig klein gemacht werden.

b Vorschlag:

$$f(t) := \begin{cases} \frac{1}{n} & \left(\frac{1}{n+1} < t \leq \frac{1}{n}, n \geq 1 \right), \\ 0 & (t = 0). \end{cases}$$

c Es sei $k \mapsto r_k$ ($k \geq 1$) eine Aufzählung der rationalen Zahlen im Intervall $]0, 1[$. Wir definieren die Sprungfunktionen $h_k: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$h_k(t) := \begin{cases} 0 & (t < r_k) \\ 2^{-k} & (t \geq r_k). \end{cases}$$

Dann ist die Funktion $f(t) := \sum_{k=1}^{\infty} h_k(t)$ wohldefiniert, monoton wachsend und in allen rationalen Punkten $r_j \in]0, 1[$ unstetig. Das Letztere lässt sich wie folgt einsehen:

□ Betrachte den Punkt r_j . Die Funktion $g(t) := \sum_{k \neq j} h_k(t)$ ist ebenfalls monoton und besitzt an der Stelle r_j einseitige Grenzwerte $g(r_j-) \leq g(r_j+)$. Wegen $f(t) = g(t) + h_j(t)$ folgt dann

$$f(r_j-) = g(r_j-) < g(r_j+) + 2^{-j} = f(r_j+),$$

somit besitzt f bei r_j eine Sprungstelle. □

5 Nach dem Additionstheorem für \tan gilt

$$\frac{t_k - t_{k-1}}{1 + t_k t_{k-1}} = \tan\left(\frac{k\alpha}{n} - \frac{(k-1)\alpha}{n}\right) = \tan \frac{\alpha}{n} \quad (1 \leq k \leq n).$$

Hieraus folgt zunächst einmal

$$t_k - t_{k-1} = (1 + t_k t_{k-1}) \tan \frac{\alpha}{n} < (1 + t_n^2) \tan \frac{\alpha}{n} = (1 + x^2) \tan \frac{\alpha}{n} \quad (1 \leq k \leq n)$$

und damit $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n\| = 0$.

Wir wählen nun Messpunkte $\tau_k := \sqrt{t_k t_{k-1}} \in [t_{k-1}, t_k]$. Dann wird

$$R_{T_n}(f) = \sum_{k=1}^n \frac{t_k - t_{k-1}}{1 + \tau_k^2} = \sum_{k=1}^n \frac{t_k - t_{k-1}}{1 + t_k t_{k-1}} = n \tan \frac{\alpha}{n},$$

und hieraus ergibt sich

$$\int_{[0,x]} \frac{1}{1+t^2} d\mu(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} R_{T_n}(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha \frac{\tan(\alpha/n)}{\alpha/n} = \alpha = \arctan x.$$

Abschnitt 9.2

1 Die Funktion $F(x) := \int_0^x f(t) dt$ ist eine Stammfunktion von f . Wenn diese Funktion 2π -periodisch sein soll, muss jedenfalls $F(2\pi) = F(0)$, das heisst

$$\int_0^{2\pi} f(t) dt = 0 \quad (2)$$

sein. Die Bedingung (2) ist aber auch hinreichend.

□ Betrachte die Hilfsfunktion $h(x) := F(x + 2\pi) - F(x)$. Es ist $h'(x) = F'(x + 2\pi) - F'(x) = f(x + 2\pi) - f(x) \equiv 0$ und somit

$$h(x) \equiv h(0) = F(2\pi) - F(0) = 0.$$

□

2a Die Operation δ_a ist auf X nicht wohldefiniert.

b, c Wird F durch $F + c$, $c \neq 0$, ersetzt, so ändert sich $\sum_{k=1}^n \lambda_k F(t_k)$ um den Wert $c \cdot \sum_{k=1}^n \lambda_k$, und dies verschwindet genau dann, wenn $\sum_{k=1}^n \lambda_k = 0$ ist. Im Fall b ist also das ϕ nicht wohldefiniert, im Fall c schon, und dann ist es auch linear:

$$\phi(\langle F \rangle + \mu \langle G \rangle) = \sum_{k=1}^n \lambda_k (F(t_k) + \mu G(t_k)) = \phi(\langle F \rangle) + \mu \phi(\langle G \rangle).$$

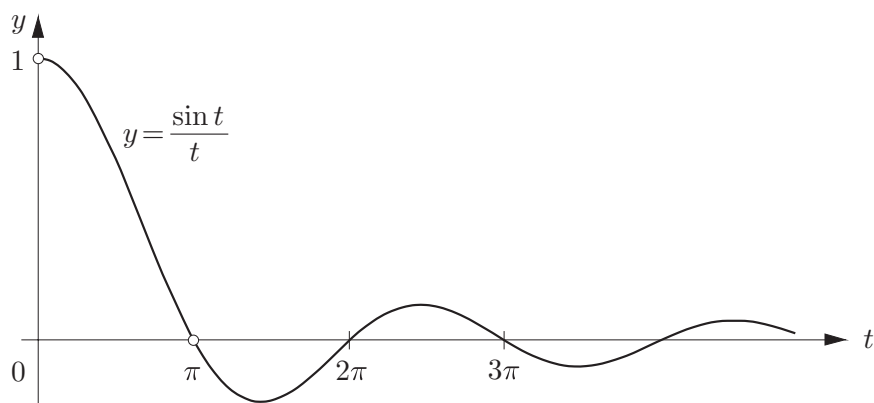


Fig. 9.1

d Die Operation ψ ist auf X wohldefiniert; denn alle Repräsentanten von $\langle F \rangle$ haben dieselbe Ableitung. Die Linearität von ψ folgt aus der Linearität der Operation $'$.

e Ist $a \neq b$, so ist die Operation χ nicht wohldefiniert: Wird F durch $F + c$, $c \neq 0$, ersetzt, so ändert sich der Wert des Integrals um $c \cdot (b - a) \neq 0$.

3 Aus Symmetriegründen genügt es, positive x zu betrachten. Inspektion der Fig. 9.1 bringt einen auf die Vermutung

$$M = f(\pi) = \int_0^\pi \frac{\sin t}{t} dt .$$

Die Folge

$$s_n := f(n\pi) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^\pi \frac{(-1)^k \sin t}{t+k} dt \quad (n \geq 0)$$

verhält sich wie die Folge der Partialsummen einer alternierenden Reihe: Die $c_k := \int_0^\pi \frac{\sin t}{t+k} dt$ bilden eine monoton fallende Folge von positiven Zahlen, und es ist

$$s_{2k+1} = s_{2k} + c_{2k}, \quad s_{2k+2} = s_{2k+1} - c_{2k+1} = s_{2k} + (c_{2k} - c_{2k+1}) .$$

Die s_{2k} bilden daher eine monoton wachsende und die s_{2k+1} eine monoton fallende Folge. Im Intervall $I_{2k} := [2k\pi, (2k+1)\pi]$ ist $f'(x) = \sin x/x \geq 0$, somit ist f in diesem Intervall monoton wachsend, und man hat

$$0 = s_0 \leq s_{2k} \leq f(x) \leq s_{2k+1} \leq s_1 \quad (x \in I_{2k}) .$$

Im Intervall $I_{2k+1} := [(2k+1)\pi, (2k+2)\pi]$ ist $f'(x) \leq 0$, somit ist f in diesem Intervall monoton fallend, und man hat

$$s_1 \geq s_{2k+1} \geq f(x) \geq s_{2k+2} > s_0 = 0 \quad (x \in I_{2k+1}) .$$

Hiernach liegen alle Funktionswerte $f(x)$, $x \geq 0$, im Intervall $[0, s_1]$. Wegen $s_1 = f(\pi)$ ist damit die obige Vermutung bewiesen.

Für $0 < t < \pi$ ist $\sin \frac{t}{2} < \frac{t}{2}$, und durch Multiplikation mit $2 \cos \frac{t}{2} > 0$ folgt

$$\sin t < t \cos \frac{t}{2} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\sin t}{t} < \cos \frac{t}{2} \quad (0 < t < \pi),$$

wobei sich die Differenz der beiden Seiten auch im Integral auswirkt. Es ergibt sich daher

$$f(\pi) = \int_0^\pi \frac{\sin t}{t} dt < \int_0^\pi \cos \frac{t}{2} dt = 2.$$

Abschnitt 9.3

1 Man hat

$$L(uv) = \int_1^{uv} \frac{1}{t} dt = \int_1^u \frac{1}{t} dt + \int_u^{uv} \frac{1}{t} dt.$$

Im letzten Integral substituieren wir

$$t := u t' \quad (1 \leq t' \leq v), \quad dt := u dt'$$

und erhalten

$$L(uv) = \int_1^u \frac{1}{t} dt + \int_1^v \frac{1}{t'} dt' = L(u) + L(v).$$

2 Wähle z.B. $\varepsilon := \frac{1}{n}$. Wegen $|\sin x/x| < 1$ ($x \neq 0$) gilt

$$\left| \int_0^{1/n} \frac{\sin(nt)}{nt} dt \right| \leq \frac{1}{n}.$$

Mit Hilfe der Substitution $t := \tau/n$ erhält man zweitens

$$\int_{1/n}^{\pi/2} \frac{\sin(nt)}{nt} dt = \frac{1}{n} \int_1^{n\pi/2} \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau = \frac{1}{n} (f(n\pi/2) - f(1)),$$

wobei f die in Aufgabe 9.2.3 betrachtete Funktion darstellt. Damit erhalten wir insgesamt

$$\left| \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(nt)}{nt} dt \right| \leq \frac{1}{n} (1 + 2M),$$

und es folgt $s_0 = 0$.

3 Wir argumentieren über die komplexen Größen

$$e_n := \int_0^{\pi/2} t^n e^{it} dt = c_n + i s_n .$$

Vorweg ist

$$e_0 = \frac{1}{i} e^{it} \Big|_0^{\pi/2} = 1 + i , \quad \text{d.h.} \quad c_0 = s_0 = 1 .$$

Partielle Integration ergibt

$$e_n = \int_0^{\pi/2} \underset{\downarrow}{t^n} \underset{\uparrow}{e^{it}} dt = \frac{1}{i} t^n e^{it} \Big|_0^{\pi/2} - \frac{n}{i} \int_0^{\pi/2} t^{n-1} e^{it} dt \quad (n \geq 1) ;$$

die e_n genügen daher der Rekursionsformel

$$e_n = \left(\frac{\pi}{2}\right)^n - \frac{n}{i} e_{n-1} \quad (n \geq 1) ,$$

und durch Trennung von Real- und Imaginärteil ergibt sich definitiv

$$c_n = \left(\frac{\pi}{2}\right)^n - n s_{n-1} , \quad s_n = n c_{n-1} \quad (n \geq 1) .$$

Hiermit ergibt sich nacheinander

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{\pi}{2} - 1, & s_1 &= 1; & c_2 &= \frac{\pi^2}{4} - 2, & s_2 &= \pi - 2; \\ c_3 &= \frac{\pi^3}{8} - 3\pi + 6, & s_3 &= \frac{3\pi^2}{4} - 6; & c_4 &= \frac{\pi^4}{16} - 3\pi^2 + 24, & s_4 &= \frac{\pi^3}{2} - 12\pi + 24 . \end{aligned}$$

4 Man berechnet $C_0 = \log 2$, $C_1 = \sinh t \Big|_0^{\log 2} = (2 - \frac{1}{2})/2 = \frac{3}{4}$. Es sei jetzt $n \geq 2$. Dann gilt

$$\begin{aligned} C_n &= \int_0^{\log 2} \underset{\uparrow}{\cosh t} \underset{\downarrow}{\cosh^{n-1} t} dt \\ &= \sinh t \cosh^{n-1} t \Big|_0^{\log 2} - (n-1) \int_0^{\log 2} \sinh^2 t \cosh^{n-2} t dt \\ &= \frac{2 - \frac{1}{2}}{2} \left(\frac{2 + \frac{1}{2}}{2}\right)^{n-1} - (n-1) \int_0^{\log 2} (\cosh^2 t - 1) \cosh^{n-2} t dt \\ &= \frac{3 \cdot 5^{n-1}}{4^n} - (n-1)(C_n - C_{n-2}) . \end{aligned}$$

Löst man dies nach C_n auf, so ergibt sich

$$C_n = \frac{3 \cdot 5^{n-1}}{n 4^n} + \frac{n-1}{n} C_{n-2} .$$

Hiernach ist z.B. $C_2 = \frac{15}{32} + \frac{1}{2} \log 2$, $C_3 = \frac{57}{64}$.

5 Wir setzen zur Abkürzung $\frac{(p-1)!(q-1)!}{(p+q-1)!} =: B'(p, q)$ und beweisen

$$B(p, q) = B'(p, q) \quad (p \geq 1, q \geq 1) \quad (3)$$

durch vollständige Induktion nach q . Zunächst ist

$$B(p, 1) = \int_0^1 t^{p-1} dt = \frac{1}{p} t^p \Big|_0^1 = \frac{1}{p} = \frac{(p-1)!}{p!} = B'(p, 1) \quad (p \geq 1) .$$

Weiter gilt

$$B(p, q+1) = \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^q dt = \frac{1}{p} t^p (1-t)^q \Big|_0^1 + \frac{q}{p} \int_0^1 t^p (1-t)^{q-1} dt . \quad (4)$$

Hier verschwindet $t^p(1-t)^q$ an den Grenzen 0 und 1; somit hat man die Rekursionsformel

$$B(p, q+1) = \frac{q}{p} B(p+1, q) \quad (p \geq 1, q \geq 1) .$$

Die Behauptung (3) sei richtig für q und alle $p \geq 1$. Dann ergibt sich mit Hilfe der Rekursionsformel (4) die Gleichung

$$B(p, q+1) = \frac{q}{p} B'(p+1, q) = \frac{q}{p} \frac{p!((q-1)!)}{(p+q)!} = \frac{(p-1)!q!}{(p+q)!} = B'(p, q+1) ,$$

somit gilt (3) dann auch für $q+1$ und alle $p \geq 1$.

6a Um die zweimalige partielle Integration und anschließende Auflösung nach % zu vermeiden, rechnen wir komplex. Wegen

$$\sin^2 t = \frac{1}{2}(1 - \cos(2t)) = \frac{1}{2}(1 - \operatorname{Re} e^{2it})$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} \% &= \int \frac{1}{2} (e^{-t} - \operatorname{Re} e^{(-1+2i)t}) dt = \frac{1}{2} \left\langle -e^{-t} + \operatorname{Re} \frac{e^{(-1+2i)t}}{1-2i} \right\rangle \\ &= \frac{1}{2} \left\langle e^{-t} \left(-1 + \frac{1}{5} \operatorname{Re}((1+2i)e^{2it}) \right) \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{e^{-t}}{2} \left(-1 + \frac{1}{5} \cos(2t) - \frac{2}{5} \sin(2t) \right) \right\rangle . \end{aligned}$$

b Die vorgeschlagene Substitution besagt

$$t = 2 \arctan u, \quad dt = \frac{2}{1+u^2}, \quad \cos t = \frac{1-u^2}{1+u^2}, \quad \frac{1}{1+\cos t} = \frac{1+u^2}{2}.$$

Damit ergibt sich

$$\% = \int \frac{1+u^2}{2} \frac{2}{1+u^2} du \Big|_{u:=\tan(t/2)} = \langle u \rangle_{u:=\tan(t/2)} = \left\langle \tan \frac{t}{2} \right\rangle.$$

c

$$\begin{aligned} \% &= \int \frac{1}{2} \operatorname{Re} (e^{(1+i)t} - e^{(-1+i)t}) dt = \left\langle \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\frac{e^{(1+i)t}}{1+i} + \frac{e^{(-1+i)t}}{1-i} \right) \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{1}{4} \operatorname{Re} ((1-i)e^{(1+i)t} + (1+i)e^{(-1+i)t}) \right\rangle \\ &= \frac{1}{4} \langle e^t (\cos t + \sin t) + e^{-t} (\cos t - \sin t) \rangle = \frac{1}{2} \langle \cosh t \cos t + \sinh t \sin t \rangle. \end{aligned}$$

d Die vorgeschlagene Substitution besagt

$$2t dt = du, \quad t^2 = u - 1, \quad \sqrt{t^2 + 1} = u^{1/2}.$$

Damit ergibt sich

$$\% = \int \frac{u-1}{2u^{1/2}} du \Big|_{u:=t^2+1} = \left\langle \frac{1}{3} u^{3/2} - u^{1/2} \right\rangle_{u:=t^2+1} = \left\langle \frac{1}{3} (t^2 - 2) \sqrt{t^2 + 1} \right\rangle.$$

e Die vorgeschlagene Substitution besagt

$$dt = 2 \sin u \cos u du, \quad \sqrt{1-t} = \cos u, \quad \sqrt{t} = \sin u.$$

Damit ergibt sich nacheinander

$$\begin{aligned} \% &= \int \frac{2 \sin u \cos^2 u}{\sin u - \sin^2 u} du = \int 2(1 + \sin u) du = 2 \langle u - \cos u \rangle_{u:=\arcsin \sqrt{t}} \\ &= 2 \langle \arcsin \sqrt{t} - \sqrt{1-t} \rangle. \end{aligned}$$

f Substituiere die Wurzel! Das heisst:

$$\sqrt{1+e^t} := u, \quad t = \log(u^2 - 1), \quad dt = \frac{2u}{u^2 - 1} du.$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \% &= \int \frac{2}{u^2 - 1} du = \int \left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1} \right) du = \left\langle \log \frac{u-1}{u+1} \right\rangle_{u:=\sqrt{1+e^t}} \\ &= \left\langle \log \frac{\sqrt{1+e^t} - 1}{\sqrt{1+e^t} + 1} \right\rangle. \end{aligned}$$

7a $\% = \langle \frac{1}{2}(\log x)^2 \rangle$.

b Die Substitution $u := 2 \log x$ vermittelt folgende Beziehung:

$$\int \frac{e^u}{u} du = \int \frac{x^2}{2 \log x} \frac{2}{x} dx = \int \frac{x}{\log x} dx \Big|_{x:=e^{u/2}}.$$

Hieraus folgt: Wäre $\%$ elementar, so besäße auch e^u/u eine elementare Stammfunktion.

c $\% = \langle \log(\log x) \rangle$.

d Die Substitution

$$x^2 := \sinh u, \quad 2x dx = \cosh u du, \quad \sqrt{1+x^4} = \cosh u$$

liefert

$$\begin{aligned} \% &= \int \frac{\cosh^2 u}{2} du = \int \frac{\cosh(2u) + 1}{4} du = \left\langle \frac{\sinh(2u)}{8} + \frac{u}{4} \right\rangle_{u:=\operatorname{arsinh}(x^2)} \\ &= \left\langle \frac{x^2 \sqrt{1+x^4}}{4} + \frac{\operatorname{arsinh}(x^2)}{4} \right\rangle. \end{aligned}$$

e Substituiere die Wurzel! Das heisst:

$$\sqrt{1+e^{4t}} := u, \quad t = \frac{1}{4} \log(u^2 - 1), \quad dt = \frac{u}{2(u^2 - 1)} du.$$

Damit ergibt sich (vgl. Aufgabe 6f)

$$\begin{aligned} \% &= \int \frac{u^2}{2(u^2 - 1)} du = \frac{1}{4} \int \left(2 + \frac{2}{u^2 - 1} \right) du = \frac{1}{4} \left\langle 2u + \log \frac{u-1}{u+1} \right\rangle_{u:=\sqrt{1+e^{4t}}} \\ &= \left\langle \frac{1}{2} \sqrt{1+e^{4t}} + \frac{1}{4} \log \frac{\sqrt{1+e^{4t}} - 1}{\sqrt{1+e^{4t}} + 1} \right\rangle. \end{aligned}$$

Abschnitt 9.4

1a $\% = \frac{1}{t^2} + \frac{1}{2t} - \frac{t+2}{2(t^2+2)}$.

b $\% = \frac{1}{2(t+1)^2} - \frac{1}{4(t+1)} + \frac{1}{4(t-1)}$.

c $\% = 1 + \frac{2}{(t^2+1)^2} - \frac{2}{t^2+1}$.

d Wir setzen

$$\omega := e^{2\pi i/6} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Die Nullstellen des Polynoms $t^6 - 1$ sind die Zahlen ω^k ($0 \leq k \leq 5$). Damit besitzt die Funktion

$$f(t) := \frac{1}{t^6 - 1} = \frac{1}{(t-1)(t^5 + t^4 + \dots + 1)} \quad (5)$$

eine Partialbruchzerlegung der Form

$$f(t) = \sum_{k=0}^5 \frac{C_k}{t - \omega^k}.$$

Nun ist $f(t) \equiv f(\omega t)$; folglich gilt auch

$$f(t) = \sum_{k=0}^5 \frac{C_k}{\omega t - \omega^k} = \sum_{k=0}^5 \frac{C_k/\omega}{t - \omega^{k-1}} = \sum_{k=0}^5 \frac{C_{k+1}/\omega}{t - \omega^k}.$$

Da die Partialbruchzerlegung von f eindeutig bestimmt ist, muss hiernach $C_{k+1} = \omega C_k$ sein für alle k und damit weiter $C_k = \omega^k C_0$ ($1 \leq k \leq 5$). An (5) lässt sich noch $C_0 = \frac{1}{6}$ ablesen; somit haben wir definitiv

$$\frac{1}{t^6 - 1} = \frac{1}{6} \sum_{k=0}^5 \frac{\omega^k}{t - \omega^k}. \quad (6)$$

Hier ist $\omega^0 = 1$, $\omega^3 = -1$ und $\omega^4 = \overline{\omega^2}$, $\omega^5 = \overline{\omega^1}$. Man erhält daher eine reelle Zerlegung von f , indem man in (6) je die Terme $\{2, 4\}$ und $\{1, 5\}$ zusammenfasst.

$$\begin{aligned} 2a \quad \% &= \frac{t^{10}}{t^2(t-1)^2(t+1)^2(t^2+4)^2} \\ &= 1 + \frac{A_{12}}{t^2} + \frac{A_{11}}{t} + \frac{A_{22}}{(t-1)^2} + \frac{A_{21}}{t-1} + \frac{A_{32}}{(t+1)^2} + \frac{A_{31}}{t+1} \\ &\quad + \frac{B_2t + C_2}{(t^2+4)^2} + \frac{B_1t + C_1}{t^2+4}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b \quad \% &= \frac{(t^2 - 16)^4}{(t-2)^2(t+2)^2(t^2+4)^2} \\ &= 1 + \frac{A_{12}}{(t-2)^2} + \frac{A_{11}}{t-2} + \frac{A_{22}}{(t+2)^2} + \frac{A_{21}}{t+2} + \frac{B_2t + C_2}{(t^2+4)^2} + \frac{B_1t + C_1}{t^2+4}. \end{aligned}$$

3a Die reelle Faktorisierung $t^3 + 1 = (t+1)(t^2 - t + 1)$ führt auf den Ansatz

$$\frac{1}{t^3 + 1} = \frac{A}{t+1} + \frac{Bt + C}{t^2 - t + 1}.$$

Die Rechnung liefert

$$\frac{1}{t^3 + 1} = \frac{1}{3} \frac{1}{t+1} - \frac{1}{3} \frac{t-2}{t^2 - t + 1} = \frac{1}{3} \frac{1}{t+1} - \frac{1}{3} \frac{t - \frac{1}{2}}{(t - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} + \frac{1}{2} \frac{1}{(t - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}.$$

Auf Grund der im Text angegebenen Formeln ergibt sich damit

$$\% = \left\langle \frac{1}{3} \log |t+1| - \frac{1}{6} \log(t^2 - t + 1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2t-1}{\sqrt{3}} \right\rangle.$$

b Nach einmaliger partieller Integration verbleiben wir mit dem Integral einer rationalen Funktion:

$$\% = \int \underset{\uparrow}{t^3} \underset{\downarrow}{\arctan t} dt = \left\langle \frac{1}{4} t^4 \arctan t \right\rangle - \frac{1}{4} \int \frac{t^4}{t^2 + 1} dt.$$

Ausführung der Division ergibt

$$\frac{t^4}{t^2 + 1} = t^2 - 1 + \frac{1}{t^2 + 1},$$

so dass wir insgesamt das Folgende erhalten:

$$\% = \left\langle -\frac{t^3}{12} + \frac{t}{4} + \frac{t^4 - 1}{4} \arctan t \right\rangle.$$

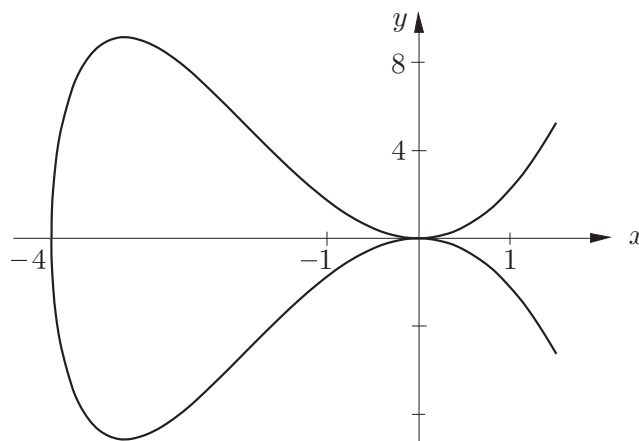


Fig. 9.2

4 Die Lösungsmenge der Gleichung $y^2 = x^4(4+x)$ ist in der Fig. 9.2 dargestellt. Man entnimmt ihr, dass sich der Flächeninhalt A besagter Blase folgendermassen berechnet:

$$A = 2 \int_{-4}^0 x^2 \sqrt{4+x} dx .$$

Mit Hilfe der Substitution

$$\sqrt{4+x} := u, \quad x = u^2 - 4 \quad (0 \leq u \leq 2), \quad dx = 2u du$$

wird daraus

$$\begin{aligned} A &= 4 \int_0^2 (u^2 - 4)^2 u^2 du = 4 \int_0^2 (u^6 - 8u^4 + 16u^2) du \\ &= \left(\frac{4}{7} u^7 - \frac{32}{5} u^5 + \frac{64}{3} u^3 \right) \Big|_0^2 = 512 \left(\frac{1}{7} - \frac{2}{5} + \frac{1}{3} \right) = \frac{4096}{105} . \end{aligned}$$

Abschnitt 9.5

Die Schreibweise $\dots \Big|_a^\infty$ ist stets als $\lim_{b \rightarrow \infty} \dots \Big|_a^b$ zu interpretieren.

1a Mit Hilfe der Substitution

$$t := u^6 \quad (1 \leq u \leq 2), \quad dt = 6u^5 du$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} \% &= 6 \int_1^2 \frac{u^3 - u^2}{u^2 - 1} u^5 du = 6 \int_1^2 \frac{u^7}{u + 1} du \\ &= 6 \int_1^2 \left(u^6 - u^5 + u^4 - u^3 + u^2 - u + 1 - \frac{1}{u + 1} \right) du \\ &= 6 \left(\frac{u^7}{7} - \frac{u^6}{6} + \frac{u^5}{5} - \frac{u^4}{4} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^2}{2} + u - \log(u + 1) \right) \Big|_1^2 \\ &= 6 \left(\frac{127}{7} - \frac{63}{6} + \frac{31}{5} - \frac{15}{4} + \frac{7}{3} - \frac{3}{2} + 1 - \log \frac{3}{2} \right) = \frac{5009}{70} + 6 \log \frac{2}{3} . \end{aligned}$$

b Mit Hilfe der Substitution

$$t := u^{12} \quad (0 \leq u \leq 1), \quad dt = 12u^{11} du$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} \% &= \int_0^1 \frac{12u^{11}}{u^8 + u^9} du = 12 \int_0^1 \frac{u^3}{u + 1} du = 12 \int_0^1 \left(u^2 - u + 1 - \frac{1}{u + 1} \right) du \\ &= 12 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 1 - \log 2 \right) = 10 - 12 \log 2 . \end{aligned}$$

c Der Wurzelausdruck legt die Substitution

$$t := 2 \sinh u (= e^u - e^{-u}), \quad dt = 2 \cosh u \, du, \quad \sqrt{t^2 + 4} = 2 \cosh u$$

nahe, wobei in einem zweiten Schritt $e^u := x$ zu substituieren wäre. Wir substituieren daher von Anfang an

$$t := x - \frac{1}{x} \quad (1 \leq x \leq \xi), \quad dt = \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) dx, \quad \sqrt{t^2 + 4} = x + \frac{1}{x}.$$

Die x -Obergrenze ξ bestimmt sich aus der Gleichung $x - \frac{1}{x} = \frac{3}{2}$; man findet $\xi = 2$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \% &= \int_1^2 \frac{x + 1/x + 1}{x + 1/x - 1} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) dx = \int_1^2 \frac{(x^2 + x + 1)(x^2 + 1)}{x^2(x^2 - x + 1)} dx \\ &= \int_1^2 \left(1 + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2 - x + 1}\right) dx, \end{aligned}$$

wobei wir die Partialbruchzerlegung gleich hingeschrieben haben. Hier ist

$$\int_1^2 \left(1 + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x}\right) dx = \left(x - \frac{1}{x} + 2 \log x\right) \Big|_1^2 = \frac{3}{2} + \log 4;$$

ferner hat man

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{2}{x^2 - x + 1} dx &= 2 \int_1^2 \frac{1}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} dx = \frac{4}{\sqrt{3}} \arctan \frac{x - \frac{1}{2}}{\sqrt{3}/2} \Big|_1^2 \\ &= \frac{4}{\sqrt{3}} \left(\arctan \sqrt{3} - \arctan \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Zusammen genommen erhalten wir daher $\% = \frac{3}{2} + \log 4 + \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$.

d Man hat $t^2 - 3t + 2 = \left(t - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}((2t - 3)^2 - 1)$. Wir sollten daher so substituieren, dass $2t - 3 = \cosh u$ wird. Dann ist

$$t = \frac{3 + \cosh u}{2} \quad (1 \leq u \leq \alpha), \quad dt = \frac{1}{2} \sinh u \, du, \quad \sqrt{t^2 - 3t + 2} = \frac{1}{2} \sinh u.$$

Die u -Obergrenze α bestimmt sich aus der Gleichung $2 \cdot 3 - 3 = \cosh \alpha$. Somit ist $\alpha = \operatorname{arccosh} 3 = \log(3 + 2\sqrt{2})$; ferner ist $\sinh \alpha = \sqrt{8}$. Damit vereinfacht sich alles zu

$$\% = \int_0^\alpha \frac{5 + \cosh u}{2} du = \frac{5}{2} \alpha + \frac{1}{2} \sinh \alpha = \frac{5}{2} \log(3 + 2\sqrt{2}) + \sqrt{2}.$$

e Mit Hilfe der Substitution

$$\sqrt{t-1} := u, \quad t = u^2 + 1 \quad (0 \leq u \leq 1), \quad dt = 2u \, du$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} \% &= \int_0^1 \frac{u^2 + 2}{u + 1} 2u \, du = \int_0^1 \left(2u^2 - 2u + 6 - \frac{6}{u + 1} \right) du \\ &= \frac{2}{3} - 1 + 6 - 6 \log 2 = \frac{17}{3} - \log 64. \end{aligned}$$

f Der vorliegende Radikand legt die Substitution

$$t := \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\tau \quad (-1 \leq \tau \leq 1), \quad dt = \frac{b-a}{2} d\tau$$

nahe. Man berechnet

$$\sqrt{(b-t)(t-a)} = \sqrt{\frac{b-a}{2}(1-\tau) \frac{b-a}{2}(1+\tau)} = \frac{b-a}{2} \sqrt{1-\tau^2}.$$

Damit ergibt sich

$$\% = \int_{-1}^1 \frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} = \arcsin \tau \Big|_{-1}^1 = \pi.$$

Der Wert des Integrals % ist also unabhängig von a und b .

$$g \quad \% = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{t - \frac{1}{2}}{\sqrt{3}/2} \Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

h Wir substituieren

$$e^t := u, \quad t = \log u \quad (0 < u < \infty), \quad dt = \frac{du}{u}.$$

Damit ergibt sich

$$\% = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2 \, dt}{e^t + e^{-t}} = \int_0^{\infty} \frac{2}{u + 1/u} \frac{du}{u} = 2 \int_0^{\infty} \frac{du}{u^2 + 1} = 2 \arctan u \Big|_0^{\infty} = \pi.$$

i Die Partialbruchzerlegung liefert

$$\frac{1}{t^4 - 1} = \frac{1}{4} \frac{1}{t-1} - \frac{1}{4} \frac{1}{t+1} - \frac{1}{2} \frac{1}{t^2 + 1}.$$

Damit folgt

$$\int_2^b \frac{dt}{t^4 - 1} = \left(\frac{1}{4} \log \frac{t-1}{t+1} - \frac{1}{2} \arctan t \right) \Big|_2^b,$$

und im Limes $b \rightarrow \infty$ ergibt sich

$$\%_0 = \frac{1}{4} \left(0 - \log \frac{1}{3} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan 2 \right) = \frac{1}{4} \log 3 - \frac{1}{2} \arctan \frac{1}{2}.$$

j Die naheliegende Substitution

$$e^t := u, \quad t = \log u \quad (0 < u < \infty), \quad dt = \frac{du}{u}$$

liefert

$$\%_0 = \int_0^\infty u^3 e^{-u} \frac{du}{u} = \int_0^\infty u^2 e^{-u} du = \Gamma(3) = 2! = 2.$$

2a Auf dem Intervall $]0, \pi[$ gilt $\int \cot t dt = \langle \log(\sin t) \rangle$. Damit wird

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1}{\tan t} dt = \log(\sin t) \Big|_{\pi/4}^{\pi/2} = \log 1 - \log \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \log 2.$$

b Für alle $t \geq 0$ gilt $\sin t = t - \frac{t^3}{6} \cos \tau$ für ein $\tau \in [0, t]$. Damit ergibt sich

$$\frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t} = \frac{1}{t} \left(\frac{6}{6 - t^2 \cos \tau} - 1 \right) = \frac{t \cos \tau}{6 - t^2 \cos \tau} \leq \frac{t}{5} \quad (0 \leq t \leq 1).$$

Der Integrand ist daher in Wirklichkeit stetig nach 0 fortsetzbar, und das Integral ist konvergent.

c Die Substitution

$$t := \frac{1}{u} \quad (\infty > u \geq \pi), \quad dt = -\frac{1}{u^2} du$$

liefert $\%_0 = \int_\pi^\infty \frac{\sin u}{u^2} du$. Dieses Integral ist sogar absolut konvergent.

d Die Substitution

$$t := \frac{1}{u} \quad (\pi \geq u > 0), \quad dt = -\frac{1}{u^2} du$$

liefert $\%_0 = \int_0^\pi \frac{\sin u}{u^2} du$. Auf dem Intervall $[0, \frac{\pi}{2}]$ gilt $\sin u \geq \frac{2}{\pi}u$, somit haben wir

$$\frac{\sin u}{u^2} \geq \frac{2}{\pi} \frac{1}{u} \quad \left(0 < u \leq \frac{\pi}{2} \right),$$

was das Integral % als divergent erweist.

e Ist $t \geq 2$, so gilt $\sqrt{t+1} - \sqrt{t-1} = \frac{2}{\sqrt{t+1} + \sqrt{t-1}} < \frac{1}{\sqrt{t-1}} \leq \frac{1}{\sqrt{t/2}}$; folglich hat man

$$\frac{\sqrt{t+1} - \sqrt{t-1}}{t} \leq \frac{\sqrt{2}}{t^{3/2}} \quad (t \geq 2),$$

womit % als konvergent erwiesen ist.

f Die Substitution

$$t := \sqrt{u} \quad (0 \leq u < \infty), \quad dt = \frac{1}{2\sqrt{u}} du$$

liefert

$$\% = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{\sin u}{\sqrt{u}} du,$$

wobei das Integral an der unteren Grenze nur scheinbar uneigentlich ist, da der Integrand stetig nach 0 fortgesetzt werden kann. Es sei $b = n\pi + \beta$, $0 \leq \beta < \pi$. Dann gilt

$$\int_0^b \frac{\sin u}{\sqrt{u}} du = \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^\pi \frac{(-1)^k \sin u}{\sqrt{u+k\pi}} du + \int_0^\beta \frac{(-1)^n \sin u}{\sqrt{u+n\pi}} du. \quad (7)$$

Die Zahlen $c_k := \int_0^\pi \frac{\sin u}{\sqrt{u+k\pi}} du$ bilden eine monoton abnehmende Nullfolge; die Summe rechter Hand in (7) besitzt somit für $b \rightarrow \infty$, d.h. $n \rightarrow \infty$, einen endlichen Grenzwert. Das letzte Integral besitzt einen Betrag $\leq \pi \frac{1}{\sqrt{n\pi}}$ und strebt daher mit $b \rightarrow \infty$ gegen 0.

Wir können daher den folgenden Schluss ziehen: Das Integral % ist zwar nicht absolut konvergent, aber immerhin bedingt konvergent.

3 Da f monoton ist, existiert der Grenzwert $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) =: \beta$; dabei muss natürlich $\beta = 0$ sein, wenn anders das Integral $\int_0^\infty f(t) dt$ existieren soll. Es gibt daher ein $a \geq 0$ mit $0 \leq f(t) \leq 1$ für alle $t \geq a$, und hieraus folgt $0 \leq (f(t))^2 \leq 1 \cdot f(t)$ für alle $t \geq a$. Nach dem Majorantenkriterium ist folglich das Integral $\int_0^\infty (f(t))^2 dt$ konvergent.

4a Für $x > 1$ ist $(\log x)^{\log x} = \exp(\log \log x \log x) = x^{\log \log x}$, und dies wächst offensichtlich monoton mit x . Ferner gibt es ein $a > 2$ mit $\log \log x \geq 2$ für alle $x \geq a$, und damit folgt

$$\frac{1}{(\log x)^{\log x}} \leq \frac{1}{x^2} \quad (x \geq a).$$

Hieraus schliesst man auf die Konvergenz des Integrals $\int_3^\infty \frac{1}{(\log x)^{\log x}} dx$ und damit auf die Konvergenz von $\%$.

b Es gibt ein $a > 0$ mit $\log u \leq \sqrt{u}$ für alle $u \geq a$. Hieraus folgt

$$\log \log x \leq \sqrt{\log x} \quad (x \geq b := e^a)$$

und somit

$$(\log x)^{\log \log x} = \exp((\log \log x)^2) \leq e^{\log x} = x \quad (x \geq b).$$

Dies zieht

$$\frac{1}{(\log x)^{\log \log x}} \geq \frac{1}{x} \quad (x \geq b)$$

nach sich und damit die Divergenz des Integrals $\int_3^\infty \frac{1}{(\log x)^{\log \log x}} dx$, womit auch $\%$ als divergent erwiesen ist.

c Es gibt ein $a > 1$ mit $\log x \leq \sqrt{x}$ und $\log \log x \geq 3$ für alle $x \geq a$. Hieraus folgt

$$0 \leq \frac{(\log x)^2}{x^{\log \log x}} \leq \frac{x}{x^3} = \frac{1}{x^2} \quad (x \geq a).$$

Dies beweist die Konvergenz des Integrals $\int_3^\infty \frac{(\log x)^2}{x^{\log \log x}} dx$ und damit die Konvergenz der Reihe $\%$.

d Es gibt ein k_0 mit $1 \leq \log \log k < \log k$ für alle $k \geq k_0$. Die Glieder der Reihe $\%$ sind somit für alle $k \geq k_0$ grösser als die Glieder der in *b* betrachteten und dort als divergent erwiesenen Reihe. Folglich ist $\%$ divergent.

5 Die Operation pv ist offensichtlich linear. Somit gilt

$$\% = \text{pv} \int_{-1/2}^{1/2} \left(\frac{1}{t} - \frac{2}{t+1} \right) dt = \text{pv} \int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{t} dt - \text{pv} \int_{-1/2}^{1/2} \frac{2}{t+1} dt.$$

Hier ist der erste Hauptwert rechter Hand = 0 aus Symmetriegründen, und der zweite ist

$$= 2 \int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{t+1} = 2 \log(t+1) \Big|_{-1/2}^{1/2} = \log 9;$$

denn der Integrand ist durchwegs regulär. Damit ergibt sich $\% = -\log 9$.

6a Auf Grund der Schwarzschen Ungleichung gilt für jedes $n \geq 1$ die Abschätzung

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} |a_k| \leq \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^{2\alpha}} \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^2 \right)^{1/2}.$$

Hier ist die rechte Seite für $n \rightarrow \infty$ beschränkt, also auch die linke Seite. Die

Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k^\alpha}$ ist daher absolut konvergent.

b Setze $a_k := \frac{1}{\sqrt{k} \log k}$ ($k \geq 2$). Dann ist

$$\sum_{k=2}^{\infty} a_k^2 = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\log k)^2}$$

konvergent, siehe das Beispiel ②; die Reihe

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} a_k = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \log k}$$

ist aber divergent.

Lösungen zu Kapitel 10

Abschnitt 10.1

1 Die Scharkurve $\gamma: x \mapsto y(x)$ durch den Punkt (x_0, y_0) hat die Gleichung $y^2(x) - x \equiv y_0^2 - x_0$, und hieraus folgt $2y(x)y'(x) - 1 \equiv 0$, insbesondere also $2y_0 y'(x_0) = 1$. Die Scharkurve durch den Punkt (x_0, y_0) hat also in diesem Punkt die Steigung $\frac{1}{2y_0}$, wobei wir stillschweigend $y_0 \neq 0$ voraussetzen. Da (x_0, y_0) im übrigen beliebig war, ziehen wir hieraus den folgenden Schluss: Die Schar Γ wird charakterisiert durch die Differentialgleichung

$$y' = \frac{1}{2y} \quad (y \neq 0).$$

Die Orthogonaltrajektorie zur Scharkurve γ hat im Punkt (x_0, y_0) die Steigung $-\frac{1}{1/2y_0} = -2y_0$, und hieraus folgt: Die Differentialgleichung der Schar Γ^\perp lautet

$$y' = -2y.$$

Ihre Lösungen sind die Exponentialkurven $y = Ce^{-2x}$, $C \in \mathbb{R}$.

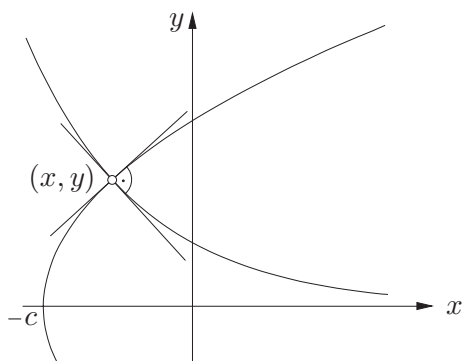


Fig. 10.1

2a Trennung der Variablen liefert nacheinander

$$\frac{dz}{z^2} = i dt, \quad \int_1^z \frac{1}{z^2} dz = \int_0^t i dt, \quad -\frac{1}{z} \Big|_1^z = i t.$$

Wir müssen nun die letzte Gleichung $1 - \frac{1}{z} = i t$ nach z auflösen und erhalten definitiv

$$z(t) = \frac{1}{1 - it} \quad (-\infty < t < \infty) \quad (1)$$

als Lösung des Anfangswertproblems %.

b Wird (1) in Real- und Imaginärteil zerlegt, so ergibt sich folgende reelle Parameterdarstellung von γ :

$$\gamma: t \mapsto \begin{cases} x(t) = \frac{1}{1+t^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ y(t) = \frac{t}{1+t^2} = \frac{1}{2} \frac{2t}{1+t^2} \end{cases} \quad (-\infty < t < \infty).$$

Die Parametertransformation $t := \tan \frac{\tau}{2}$ ($-\pi < \tau < \pi$) macht hieraus

$$\gamma: t \mapsto \begin{cases} x(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \tau \\ y(t) = \frac{1}{2} \sin \tau \end{cases} \quad (-\pi < \tau < \pi)$$

und erweist γ als Kreis vom Radius $\frac{1}{2}$ mit Zentrum $\frac{1}{2} \in \mathbb{C}$, aus dem ein Punkt, nämlich 0, entfernt wurde. Siehe dazu die Fig. 10.2.

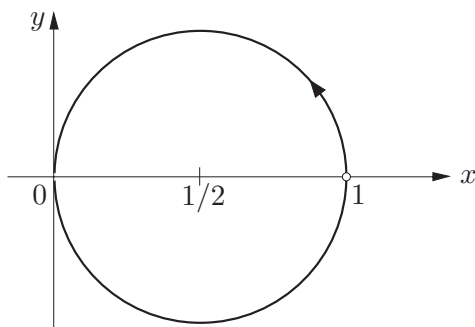


Fig. 10.2

3 Dem Hinweis folgend beginnen wir mit

$$\begin{aligned} \cos(x+y) + \sin(x-y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y + \sin x \cos y - \cos x \sin y \\ &= (\cos x + \sin x)(\cos y - \sin y) \\ &= 2 \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(y + \frac{\pi}{4}\right). \end{aligned}$$

Die Differentialgleichung $\%_0$ lässt sich daher in der Tat separieren:

$$\frac{dy}{\cos\left(y + \frac{\pi}{4}\right)} = 2 \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) dx,$$

und die Lösung durch den Anfangspunkt $(0,0)$ ist gegeben durch

$$\int_0^y \frac{dy}{\cos\left(y + \frac{\pi}{4}\right)} = \int_0^x 2 \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) dx =: t. \quad (2)$$

Hier haben wir auf der rechten Seite noch die längs der Kurve veränderliche Grösse t ("Zeit") eingeführt. Mit ihrer Hilfe werden wir nun eine Parameterdarstellung $t \mapsto (x(t), y(t))$ der Lösungskurve herleiten.

Vorweg eine Hilfsrechnung: Mit Hilfe der in Abschnitt 9.4 vorgeschlagenen Substitution $\tan \frac{u}{2} := \tau$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \int \frac{du}{\cos u} &= \int \frac{1+\tau^2}{1-\tau^2} \frac{2d\tau}{1+\tau^2} = \int \left(\frac{1}{1-\tau} - \frac{1}{1+\tau} \right) d\tau = \left\langle \log \frac{1+\tau}{1-\tau} \right\rangle \\ &= \left\langle \log \tan \left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right\rangle. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir aus (2) den folgenden Zusammenhang zwischen y und t :

$$t = \log \tan \left(\frac{y + \frac{\pi}{4}}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \Big|_0^y = \log \left(\tan \left(\frac{y}{2} + \frac{3\pi}{8} \right) / \tan \frac{3\pi}{8} \right).$$

Dies müssen wir nun nach y auflösen:

$$y(t) = 2 \arctan \left(\tan \frac{3\pi}{8} e^t \right) - \frac{3\pi}{4} = 2 \arctan \left((1 + \sqrt{2}) e^t \right) - \frac{3\pi}{4}. \quad (3)$$

Aus (2) ergibt sich ferner

$$t = 2 \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \Big|_0^x = 2 \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) + \sqrt{2},$$

oder aufgelöst nach x :

$$x(t) = \frac{\pi}{4} + \arcsin \frac{t - \sqrt{2}}{2}. \quad (4)$$

Die Fig. 10.3 zeigt die durch (3)^(4) beschriebene Lösungskurve.

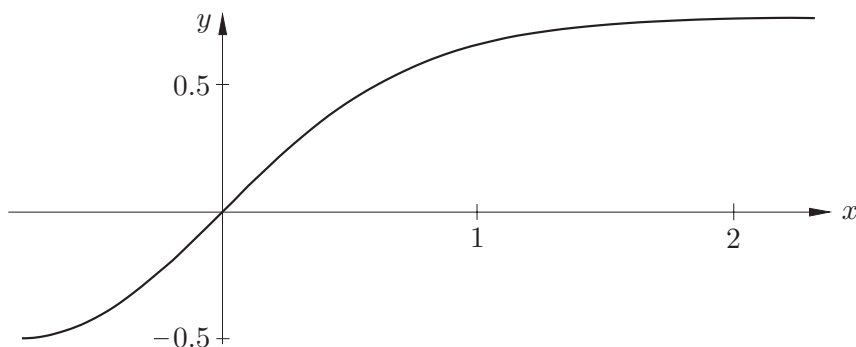


Fig. 10.3

4 Auf dem Einheitskreis stimmt die Bogenlänge mit dem Polarwinkel überein. Die Differentialgleichung der betrachteten Bewegung lautet daher, siehe die Fig. 10.4:

$$\dot{\phi} = 2 - \cos \phi ,$$

bzw. umgekehrt:

$$\frac{dt}{d\phi} = \frac{1}{\dot{\phi}} = \frac{1}{2 - \cos \phi} .$$

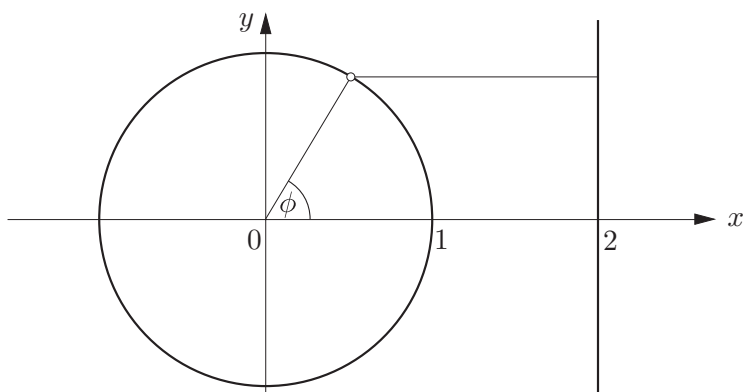


Fig. 10.4

Damit erhalten wir als Umlaufsdauer

$$T = 2 \int_0^\pi \frac{d\phi}{2 - \cos \phi} = 2 \int_0^\infty \frac{2}{1 + 3\tau^2} d\tau = \frac{4}{\sqrt{3}} \arctan(\sqrt{3}\tau) \Big|_0^\infty = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} .$$

Hier wurde wiederum die Substitution

$$\tan \frac{\phi}{2} := \tau , \quad \phi = 2 \arctan \tau \quad (0 \leq \tau < \infty), \quad d\phi = \frac{2}{1 + \tau^2}$$

benutzt.

5 Der Anfangspunkt des Seils befinde sich im Nullpunkt der x -Achse. Das Seil besitzt zur Zeit t die Länge $L(t) = 1 + t$. Die Gesamtgeschwindigkeit \dot{x} des Käfers setzt sich additiv zusammen aus seiner Relativgeschwindigkeit 0.01 bezüglich dem Seilstück, wo er sich gerade befindet, und der “Gratisbewegung” infolge der Ausdehnung des Seils. Insgesamt hat man daher die Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = 0.01 + \frac{x(t)}{L(t)} \cdot 1, \quad \text{d.h.} \quad \dot{x} = 0.01 + \frac{x}{1+t} . \quad (5)$$

Die Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung $\dot{x} = \frac{x}{1+t}$ ist $x_{\text{hom}}(t) = C(1+t)$, und die Methode der Variation der Konstanten liefert

für $C(t)$ die Differentialgleichung $\dot{C} = \frac{0.01}{1+t}$. Damit haben wir als allgemeine Lösung von (5) die Funktionen

$$x(t) = (0.01 \log(1+t) + C)(1+t), \quad C \in \mathbb{R}.$$

Die Anfangsbedingung $x(0) = 0$ liefert somit den folgenden Fahrplan unseres Marienkäfers:

$$x(t) = 0.01 \log(1+t)(1+t) \quad (t \geq 0).$$

Der Käfer hat das Ende des Seils erreicht, wenn $x(t) = L(t)$ ist. Dies bedeutet $0.01 \log(1+t) = 1$ oder $t = e^{100} - 1$. Das sind $8.5 \cdot 10^{35}$ Jahre.

6a Vorweg lässt sich folgendes sagen: Die rechte Seite von % verschwindet für $y = \pm 1$. Somit sind $y(t) \equiv -1$ und $y_1(t) \equiv 1$ Lösungen. Im Streifen $|y| < 1$ sind die Lösungskurven monoton wachsend, und für $|y| > 1$ sind sie monoton fallend. Da % t -frei ist, ist die Gesamtheit der Lösungskurven invariant gegenüber Translation in t -Richtung.

Separation von % liefert $dt = \frac{dy}{1-y^2}$. Die Lösung durch den Anfangspunkt $(0, 0)$ ergibt sich daher folgendermassen:

$$t = \int_0^t dt = \int_0^y \frac{dy}{1-y^2} = \frac{1}{2} \int_0^y \left(\frac{1}{1-y} + \frac{1}{1+y} \right) dy = \frac{1}{2} \log \frac{1+y}{1-y}.$$

Wird dies nach y aufgelöst, so erhält man $y_0(t) = \tanh t$. Für den Anfangspunkt $(0, 2)$ erhält man analog

$$\begin{aligned} t &= \int_2^y \frac{dy}{1-y^2} = \frac{1}{2} \int_2^y \left(\frac{1}{1-y} + \frac{1}{1+y} \right) dy = \frac{1}{2} \log \frac{1+y}{|1-y|} \Big|_2^y \\ &= \frac{1}{2} \log \frac{1+y}{y-1} \Big|_2^y = \frac{1}{2} \left(\log \frac{1+y}{y-1} - \log 3 \right). \end{aligned}$$

Auflösung nach y liefert schliesslich $y_2(t) = \coth(t + \log \sqrt{3})$.

b Siehe die Fig. 10.5.

7 In Analogie zu Beispiel ⑥ lautet die Differentialgleichung im vorliegenden Fall wie folgt:

$$\dot{y} = -\gamma y + \delta y^2.$$

Die konstanten Funktionen $y(t) \equiv 0$ und $y(t) \equiv \frac{\gamma}{\delta} =: y_*$ sind spezielle Lösungen. Für die allgemeine Lösung müssen wir separieren: $dt = \frac{dy}{\delta y^2 - \gamma y}$. Hieraus folgt

$$t = \int_0^t dt = \frac{1}{\gamma} \int_{y_0}^y \left(\frac{1}{y - \frac{\gamma}{\delta}} - \frac{1}{y} \right) dy = \frac{1}{\gamma} \log \frac{|y - y_*|}{y} \Big|_{y_0}^y. \quad (6)$$

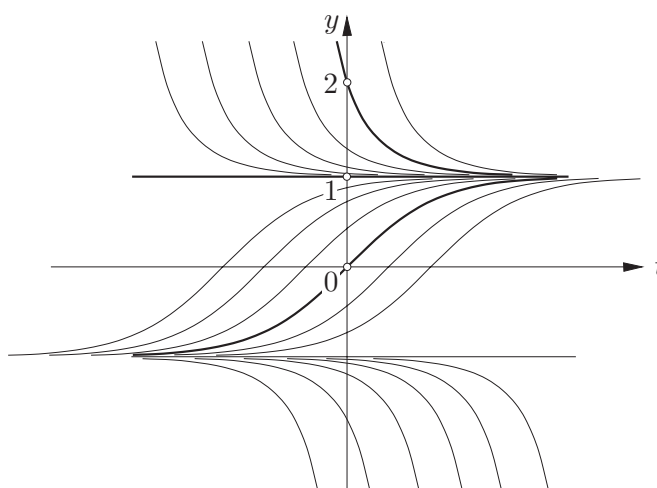


Fig. 10.5

Ist $0 < y_0 < y_*$, so bleibt $y(t)$ während des ganzen Prozesses in diesem Bereich, und (6) liest sich dann folgendermassen:

$$t = \frac{1}{\gamma} \log \left(\frac{y_* - y}{y} \bigg/ \frac{y_* - y_0}{y_0} \right) .$$

Für die Auflösung nach y setzen wir $\frac{y_* - y_0}{y_0} =: A > 0$ und erhalten dann

$$y(t) = y_* \frac{1}{1 + Ae^{\gamma t}} \quad (t \rightarrow \infty) .$$

Die Population stirbt also mit der Zeit aus.

Ist aber $y_0 > y_*$, so lautet (6) wie folgt:

$$t = \frac{1}{\gamma} \log \left(\frac{y - y_*}{y} \bigg/ \frac{y_0 - y_*}{y_0} \right) .$$

Für die Auflösung nach y setzen wir $\frac{y_0 - y_*}{y_0} =: B > 0$. Damit ergibt sich

$$y(t) = y_* \frac{1}{1 - Be^{\gamma t}} \quad \rightarrow \infty \quad (t \rightarrow T) .$$

Der Zeitpunkt T der Katastrophe ergibt sich aus der Gleichung $Be^{\gamma t} = 1$. Man findet

$$T = \frac{1}{\gamma} \log \frac{y_0}{y_0 - y_*} .$$

Im Gegensatz zur Lösung $y(t) \equiv \alpha/\beta$ in Beispiel ⑥ ist die Lösung $y(t) \equiv y_*$ der vorliegenden Aufgabe unstabil: Eine noch so geringfügige Änderung der

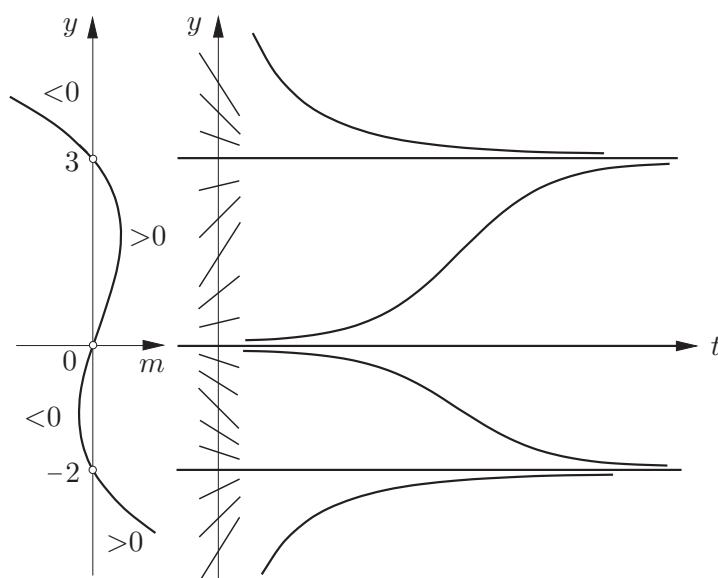


Fig. 10.6

Ausgangslage führt dazu, dass der Prozess $t \mapsto y(t)$ einen radikal anderen Verlauf nimmt.

8 Die Differentialgleichung % hat die Form $\dot{y} = m(y)$ mit

$$m(y) = -y(y^2 - y - 6) = -y(y + 2)(y - 3) .$$

In der Fig. 10.6 ist links der Graph der Funktion $y \mapsto m(y)$ längs der vertikalen y -Achse aufgetragen. Auf der y -Achse der Hauptfigur sind die sich ergebenden Tangentenrichtungen eingezeichnet: fallend für $-2 < y < 0$ und für $y > 3$, steigend für $y < -2$ und für $0 < y < 3$. In jedem dieser vier y -Streifen gehen die Lösungskurven durch Parallelverschiebung auseinander hervor, weshalb wir für jeden Streifen nur eine Lösungskurve skizziert haben. Der Figur entnimmt man

$$g(\eta) := \lim_{t \rightarrow \infty} y(t|\eta) = \begin{cases} 3 & (\eta > 0) \\ 0 & (\eta = 0) \\ -2 & (\eta < 0) \end{cases} .$$

Abschnitt 10.3

1 Die im Text vorgeschlagene Substitution

$$t := b \tan \theta \quad \left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right), \quad dt = \frac{b}{\cos^2 \theta}$$

liefert ohne weiteres

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{(a^2+t^2)(b^2+t^2)}} dt &= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{(a^2+b^2 \tan^2 \theta) b^2(1+\tan^2 \theta)}} \frac{b d\theta}{\cos^2 \theta} \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta}} d\theta;\end{aligned}$$

denn es gilt $(1 + \tan^2 \theta) \cos^2 \theta \equiv 1$.

2 Auf Grund von **(10.6)** ist

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1+3\sin^2 \theta}} = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos^2 \theta + 4\sin^2 \theta}} = \frac{\pi}{2M(1,2)}.$$

Beginnend mit $a_0 = 1$, $b_0 = 2$ berechnet man nun die AGM-Folge $(a_n, b_n)_{n \geq 0}$ mit Hilfe des Taschenrechners. Nach vier Schritten ist man bei

$$a_4 \doteq b_4 \doteq 1.456791031$$

angelangt, weshalb man diesen Wert als $M(1,2)$ akzeptiert. Damit ergibt sich der gewünschte Näherungswert zu $\% \doteq 1.078257824$.