

14

Vektoranalysis

14.1 Vektorfelder, Linienintegrale

In diesem Kapitel geht es um Wechselbeziehungen zwischen *geometrischen* Objekten und Operationen einerseits, und *analytischen* Objekten und Operationen andererseits. Die *geometrischen* Objekte sind Kurven oder Flächen im \mathbb{R}^n , allgemeiner: sogenannte Ketten (s.u.); die wesentliche geometrische Operation ist die Randbildung, die zum Beispiel der Kreisscheibe $B_{2,1}$ die im Gegenuhrzeigersinn durchlaufene Kreislinie S^1 als Randzyklus zuweist. Die *analytischen* Objekte sind sogenannte Felder. Ein **Feld** ist eine skalar- oder vektorwertige Funktion im \mathbb{R}^n , die aber nicht als Abbildung irgendwohin, geschweige denn als Graph interpretiert wird. Vielmehr stellt man sich vor, dass der Funktionswert $f(\mathbf{x})$ oder $\mathbf{K}(\mathbf{x})$ direkt am jeweiligen Punkt \mathbf{x} angeschrieben oder angeheftet ist. Die wesentliche analytische Operation ist die (räumliche) Ableitung; je nach Art des betrachteten Feldes kann sie verschiedene Gestalten (Gradient, Rotation, Divergenz) annehmen.

Zum Teil bleiben wir in der Ebene oder im \mathbb{R}^3 . Diese Beschränkung kommt der Anschauung entgegen und ermöglicht einige Konstruktionen, die vor allem im Hinblick auf physikalische Anwendungen erdacht worden sind. Vom mathematischen Standpunkt aus hat aber die hier vorgestellte Theorie nur vorläufigen Charakter. Die zentralen Ergebnisse dieses Kapitels sind die klassischen Integralsätze von Green, Gauss und Stokes. Diese Sätze lassen sich in Wirklichkeit auf einen einzigen und für Ketten beliebiger Dimension gültigen Satz, die sogenannte allgemeine Formel von Stokes

$$\int_A d\omega = \int_{\partial A} \omega, \quad (1)$$

zurückführen. Hier bezeichnet A eine Kette und ∂A ihren Rand. Das Feld erscheint als Differentialform ω (s.u.) und seine Ableitung als $d\omega$. Diese

Formel bringt eine tiefliegende Dualität zwischen Randbildung und Ableitung zum Ausdruck. Der Prototyp von (1) ist die vertraute Formel

$$\int_a^b f'(t) dt = f(b) - f(a) .$$

Hier steht links das Integral von f' über die 1-Kette $\sigma := [a, b]$, rechts das "Integral" von f über $\partial\sigma$. Der "Rand" von σ ist hiernach die aus dem positiv gezählten Endpunkt b und dem negativ gezählten Anfangspunkt a bestehende nulldimensionale Kette.

Vereinbarungen und Definitionen

Um die Buchstaben $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ für einen allgemeineren Zweck freizubekommen, bezeichnen wir die Standardbasis des \mathbb{R}^n für einen Augenblick mit $(\mathbf{e}_1^{\text{st}}, \dots, \mathbf{e}_n^{\text{st}})$, die Standardkoordinaten mit $(x_1^{\text{st}}, \dots, x_n^{\text{st}})$. Dies vorausgeschickt nennen wir eine beliebige Basis $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ und die zugehörigen Koordinaten (x_1, \dots, x_n) **zulässig**, wenn die \mathbf{e}_i orthonormiert sind:

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k = \delta_{ik} \quad \forall i, k ,$$

und zusätzlich gilt: $\varepsilon(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) = +1$. Es gibt dann eine orthogonale Matrix $[S] = [s_{ik}]$ mit $\det[S] = 1$ derart, dass die Basis $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ mit der Standardbasis verknüpft ist durch

$$(a) \quad \mathbf{e}_k = \sum_{i=1}^n s_{ik} \mathbf{e}_i^{\text{st}} \quad (1 \leq k \leq n), \quad (b) \quad \mathbf{e}_i^{\text{st}} = \sum_{k=1}^n s_{ik} \mathbf{e}_k \quad (1 \leq i \leq n) .$$

Als Merkregel diene: In den Kolonnen von $[S]$ stehen die "neuen" Basisvektoren \mathbf{e}_k , ausgedrückt mit Hilfe der "alten" Basisvektoren \mathbf{e}_i^{st} . Für die Umrechnung der Koordinaten gelten dann folgende Formeln:

$$(a) \quad x_i^{\text{st}} = \sum_{k=1}^n s_{ik} x_k \quad (1 \leq i \leq n), \quad (b) \quad x_k = \sum_{i=1}^n s_{ik} x_i^{\text{st}} \quad (1 \leq k \leq n) .$$

Das Symbol \mathbf{x} (analog: \mathbf{y} , \mathbf{p} usw.) bezeichnet in diesem Kapitel nicht nur das n -Tupel $(x_1^{\text{st}}, \dots, x_n^{\text{st}}) \in \mathbb{R}^n$, sondern in erster Linie den Vektor \mathbf{x} als "geometrisches Objekt", das bezüglich jeder zulässigen Basis bestimmte Koordinaten (x_1, \dots, x_n) annimmt. Dabei gelten die folgenden Rechenregeln, deren Verifikation wir dem Leser überlassen:

$$(a) \quad \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{k=1}^n x_k y_k ;$$

$$(b) \quad x_k = \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{x} \quad (1 \leq k \leq n);$$

$$(c) \quad \varepsilon(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & & & \vdots \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & \cdots & & a_{nn} \end{bmatrix} .$$

(d) Für die partiellen Ableitungen einer Funktion $\mathbf{f}: \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^m$ gilt

$$f_{i,k}(\mathbf{p}) = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{f}_{,k} = \mathbf{e}_i \cdot (d\mathbf{f}(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{e}_k) .$$

Hiernach sind alle zulässigen Koordinatensysteme formal gleichwertig. Von nun an bezeichnen daher $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ eine beliebige zulässige Basis des \mathbb{R}^n und (x_1, \dots, x_n) die zugehörigen Koordinaten der Vektoren \mathbf{x} . Im Fall $n = 2$ werden wir auch (x, y) schreiben anstelle von (x_1, x_2) , analog im dreidimensionalen Fall (x, y, z) anstelle von (x_1, x_2, x_3) . Der Buchstabe \mathbf{u} bezeichnet ein Paar (u_1, u_2) bzw. (u, v) und dient als Parameter für die Darstellung von (zweidimensionalen) Flächen.

In der Differentialgeometrie bezeichnet man die Familie $TM := (\mathcal{T}_{\mathbf{x}} \mid \mathbf{x} \in M)$ der Tangentialräume einer Mannigfaltigkeit M als Tangentialbündel von M . Für uns genügt hier die folgende Definition: Das **Tangentialbündel** einer offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ist die Menge

$$T\Omega := \{(\mathbf{x}, \mathbf{X}) \mid \mathbf{x} \in \Omega, \mathbf{X} \in \mathcal{T}_{\mathbf{x}}\} .$$

In diesem einfachen Fall ist also das Tangentialbündel “kanonisch isomorph” zum kartesischen Produkt $\Omega \times \mathbb{R}^n$.

Begriff des Vektorfelds

Eine Funktion $\mathbf{K}(\cdot)$, genau:

$$(\text{id}, \mathbf{K}) : \Omega \rightarrow T\Omega, \quad \mathbf{x} \mapsto (\mathbf{x}, \mathbf{K}(\mathbf{x})) ,$$

die in jedem Punkt $\mathbf{x} \in \Omega$ einen Vektor $\mathbf{K}(\mathbf{x})$ “anheftet”, heisst ein **Vektorfeld** auf Ω . Typische Beispiele für Vektorfelder sind die Felder der Elektrostatik und -dynamik, das Gravitationsfeld eines Himmelskörpers, das Geschwindigkeitsfeld einer strömenden Flüssigkeit, die Massenstromdichte eines Gases (Bewegungen der Atmosphäre!), das Gradientenfeld eines Skalarfelds (s.u.). Für Vektorfelder verwenden wir im allgemeinen grosse halbfette lateinische

Buchstaben, zum Beispiel \mathbf{K} , wenn wir eher an ein Kraftfeld denken, und kleine halbfette Buchstaben, zum Beispiel \mathbf{v} , wenn wir eher an ein Strömungsfeld denken. In Wirklichkeit besteht zwischen diesen beiden Arten von Feldern ein subtiler mathematischer Unterschied: Kraftfelder werden längs Kurven integriert; das Resultat stellt geleistete Arbeit, eventuell eine Potentialdifferenz dar. Strömungsfelder werden über orientierte Hyperflächen integriert; der Wert des Integrals ist die Flüssigkeitsmenge, die pro Zeiteinheit durch die betreffende Fläche strömt.

Diese Dinge kommen noch besser heraus, wenn man die Vektoranalysis von vorne herein in der Sprache der Differentialformen ausdrückt. Ein Kraftfeld $\mathbf{K} = (P, Q, R)$ im \mathbb{R}^3 erscheint dann als 1-Form

$$\omega = Pdx + Qdy + Rdz$$

und wird über 1-Ketten integriert. Zu einem Strömungsfeld \mathbf{v} im \mathbb{R}^3 gehört eine 2-Form, die über 2-Ketten integriert wird. Solange man sich strikt an zulässige Koordinaten hält, sind beide Formulierungen der Theorie gleichwertig. Es lässt sich aber nicht leugnen, dass Differentialformen einen logischeren und einheitlicheren Aufbau der Theorie ermöglichen.

Ein Vektorfeld $\mathbf{K}: \Omega \rightarrow T\Omega$ im \mathbb{R}^n ist **stetig differenzierbar**, wenn die Funktion

$$\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{K}(\mathbf{x}) = (K_1(x_1, \dots, x_n), \dots, K_n(x_1, \dots, x_n))$$

stetig differenzierbar ist, und dies trifft genau dann zu, wenn die einzelnen Komponentenfunktionen $K_i(\cdot)$ stetig differenzierbar sind. Ein C^r -Vektorfeld ist sinngemäss erklärt.

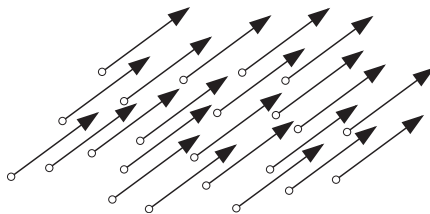


Fig. 14.1.1

Ist $\mathbf{K}(\mathbf{x}) = \text{const.}$, so heisst das Feld \mathbf{K} **homogen** (Fig. 14.1.1). — Ist \mathbf{K} von der Form

$$\mathbf{K}(\mathbf{x}) = K(r) \frac{\mathbf{x}}{r}, \quad r := |\mathbf{x}| \neq 0,$$

mit einer reellwertigen Funktion $K(\cdot)$, so spricht man von einem **Zentralfeld** (Fig. 14.1.2): In jedem Punkt \mathbf{x} zeigt der Feldvektor $\mathbf{K}(\mathbf{x})$ gegen den Ursprung oder in die dazu entgegengesetzte Richtung — je nachdem, ob $K(r) < 0$ oder $K(r) > 0$ ist; ferner hängt die **Feldstärke** $|\mathbf{K}(\mathbf{x})| = K(r)$ nur von $r = |\mathbf{x}|$ ab.

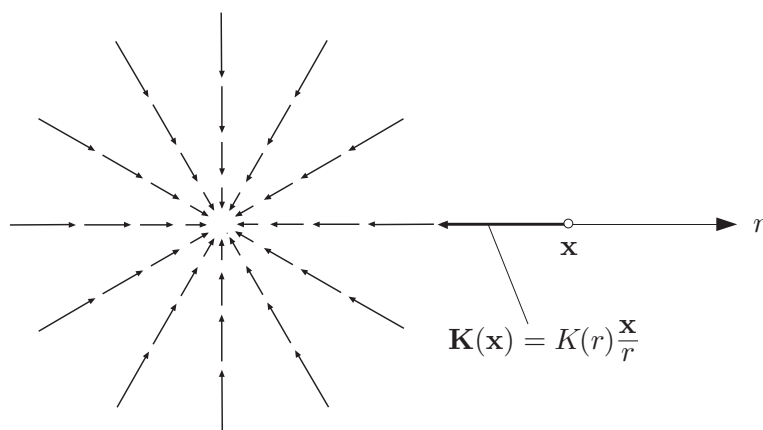


Fig. 14.1.2

① Das im punktierten Raum $\mathbf{R}^3 \setminus \{0\}$ definierte Feld

$$\mathbf{K}(\mathbf{x}) := \frac{C}{r^2} \frac{\mathbf{x}}{r} \quad (\mathbf{x} \neq \mathbf{0}),$$

C eine positive oder negative Konstante, heisst **Coulombfeld**. Die von Punktladungen im Ursprung erzeugten elektrischen Felder sowie das Gravitationsfeld einer Punktmasse sind von diesem Typ. ○

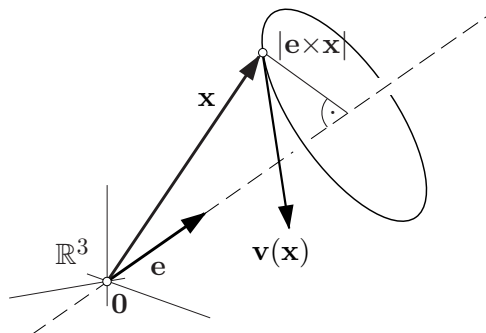


Fig. 14.1.3

② Es sei $\mathbf{e} \in T_0\mathbf{R}^3$ ein Einheitsvektor. Rotiert der “Weltäther” mit Winkelgeschwindigkeit ω um die Achse \mathbf{e} , so entsteht ein Strömungsfeld \mathbf{v} (siehe die Fig. 14.1.3), und zwar ist $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ nach den Regeln der Vektorrechnung gegeben durch

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \omega \mathbf{e} \times \mathbf{x} = \vec{\omega} \times \mathbf{x},$$

wobei $\vec{\omega} := \omega \mathbf{e}$ den sogenannten **Winkelgeschwindigkeitsvektor** bezeichnet. In Koordinaten ausgeschrieben sieht das folgendermassen aus:

$$\mathbf{v}(x_1, x_2, x_3) = (\omega_2 x_3 - \omega_3 x_2, \omega_3 x_1 - \omega_1 x_3, \omega_1 x_2 - \omega_2 x_1). \quad \circ$$

Zu jeder differenzierbaren Funktion $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, in dem vorliegenden Zusammenhang als **Skalarfeld** bezeichnet, gehört ihr **Gradientenfeld**

$$\nabla f: \mathbf{x} \mapsto (\mathbf{x}, \nabla f(\mathbf{x}))$$

mit der Komponentendarstellung $\nabla f = (f_{,1}, \dots, f_{,n})$. Die Feldvektoren stehen überall senkrecht auf den Niveaulächen von f . Viele Vektorfelder \mathbf{K} lassen sich als Gradientenfeld eines geeigneten f auffassen, aber nicht alle.

① (Forts.) Das Coulombfeld kann als Gradientenfeld der Funktion

$$f(\mathbf{x}) := -\frac{C}{r} \quad (\mathbf{x} \neq \mathbf{0})$$

aufgefasst werden. (Wie man darauf kommt, werden wir später sehen.) Zum Beweis setzen wir $-C/r =: \phi(r)$; ferner benutzen wir die bequemen Formeln

$$\frac{\partial r}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} = \frac{2x_k}{2\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}} = \frac{x_k}{r}.$$

Damit ergibt sich nach der Kettenregel

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = \phi'(r) \frac{\partial r}{\partial x_k} = \frac{C}{r^2} \cdot \frac{x_k}{r}$$

und folglich

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3} \right) = \frac{C}{r^2} \frac{\mathbf{x}}{r} = \mathbf{K}(\mathbf{x}),$$

wie behauptet. — Man nennt f ein **Potential** des Feldes \mathbf{K} . ○

Die Nullstellen eines Vektorfeldes \mathbf{v} heissen **singuläre Punkte** von \mathbf{v} ; sie liegen im allgemeinen isoliert. Alle übrigen Punkte heissen **regulär**.

③ In den Bereichen, wo $\mathbf{v}(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$ ist, liegen die Feldvektoren und damit auch die Feldlinien (s.u.) brav nebeneinander. Die geometrisch interessanten Dinge passieren in den singulären Punkten eines Feldes (Fig. 14.1.4).

Auf einer offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ lässt sich leicht ein singularitätenfreies Feld konstruieren: Man nehme ein homogenes Feld $\neq \mathbf{0}$. Dem gegenüber steht der folgende tiefliegende und schwer zu beweisende Satz: *Jedes stetige Tangentialfeld auf der 2-Sphäre S^2 besitzt wenigstens eine Nullstelle.* “Ein Igel lässt sich nicht bürsten, ohne dass es Probleme gibt.” ○

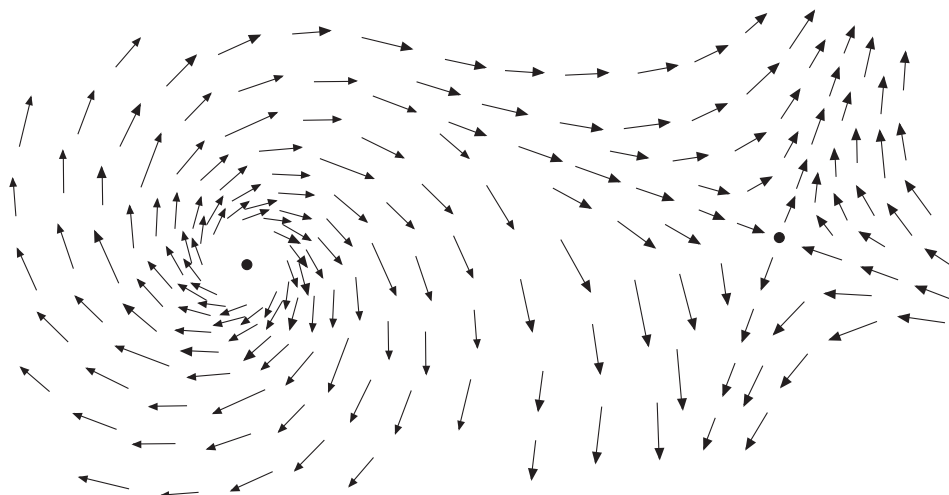


Fig. 14.1.4

Feldlinien

Es sei \mathbf{v} ein Vektorfeld in einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Eine Kurve γ in Ω , deren Tangente in jedem Punkt zum dort angehefteten Feldvektor parallel ist (Fig. 14.1.5), heisst eine **Feldlinie** von \mathbf{v} . Wie wir gleich sehen werden, geht durch jeden regulären Punkt \mathbf{a} von \mathbf{v} genau eine Feldlinie. In den Beispielen ① und ② sowie bei einem homogenen Feld ist unmittelbar evident, welches die Feldlinien sind. Die Feldlinien eines Gradientenfeldes ∇f sind die Orthogonaltrajektorien der Niveaulinien (Niveaflächen) von f .

Die Feldlinien γ eines Vektorfeldes \mathbf{v} besitzen eine natürliche Parameterdarstellung

$$\gamma: t \mapsto \mathbf{x}(t). \quad (2)$$

Wir verlangen dabei, dass der Geschwindigkeitsvektor $\dot{\mathbf{x}}(t)$ jederzeit *gleich* dem (und nicht nur parallel zum) Feldvektor an der Stelle $\mathbf{x}(t)$ ist, in Formeln:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) \equiv \mathbf{v}(\mathbf{x}(t)).$$

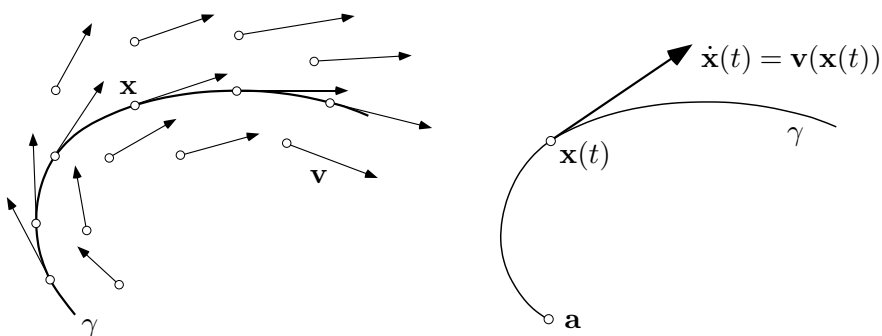


Fig. 14.1.5

Diese Identität lässt sich folgendermassen interpretieren: Die Funktion (2) ist Lösung der (t -freien) Differentialgleichung

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x}) . \quad (3)$$

In Koordinaten ausgeschrieben wird daraus ein System

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x}_1 = v_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \dot{x}_n = v_n(x_1, \dots, x_n) \end{array} \right\}$$

von n Differentialgleichungen für die n unbekannt Funktionen $t \mapsto x_i(t)$. Der Satz (11.26) über die Existenz von Lösungen eines derartigen Systems garantiert, dass zu einer vorgegebenen Anfangsbedingung

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{a} \quad (4)$$

genau eine Lösung $\mathbf{x}(\cdot)$ von (3) existiert, und zwar ist $t \mapsto \mathbf{x}(t)$ tatsächlich eine Kurve, falls \mathbf{a} ein regulärer Punkt von \mathbf{v} ist. Ist $\mathbf{v}(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$, so lautet die Lösung des Anfangswertproblems (3)^(4) einfach $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{a}$.

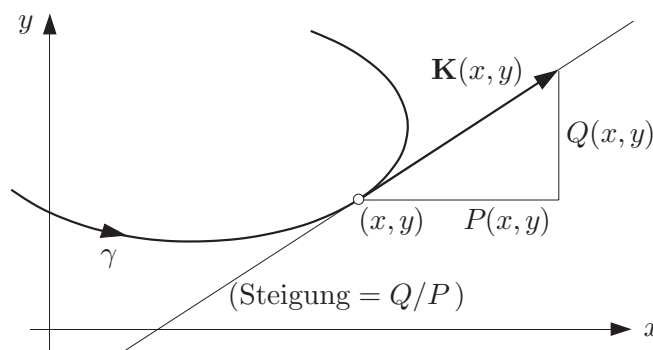


Fig. 14.1.6

Die Feldlinien eines Vektorfeldes $\mathbf{K} = (P, Q)$ in der (x, y) -Ebene lassen sich schon mit Hilfe einer einzigen Differentialgleichung bestimmen, wobei allerdings der "natürliche" Parameter t gar nicht ins Spiel kommt. Wie man der Figur 14.1.6 entnimmt, ist nämlich die Steigung y' der durch den Punkt (x, y) gehenden Feldlinie gegeben durch

$$y' = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)} .$$

Das ist auch schon die angesagte Differentialgleichung.

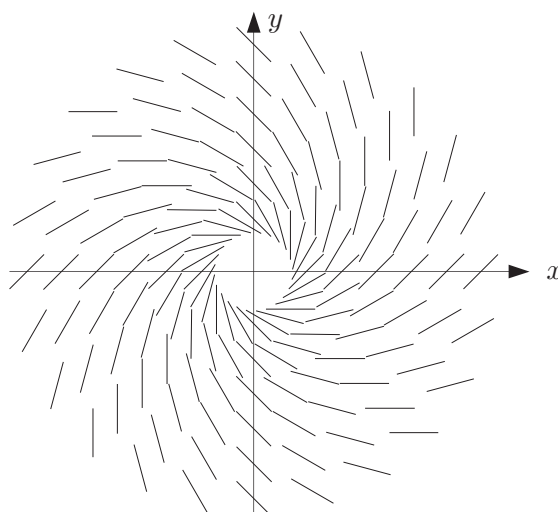


Fig. 14.1.7

④ Die Feldlinien des Vektorfeldes

$$\mathbf{v}(x, y) := \left(\frac{x - y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{x + y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \quad ((x, y) \neq (0, 0))$$

(Fig. 14.1.7) vom konstanten Betrag $|\mathbf{v}(x, y)| \equiv \sqrt{2}$ genügen der homogenen Differentialgleichung

$$y' = \frac{x + y}{x - y},$$

jedenfalls abseits der Geraden $x = y$. Wie wir in Beispiel 10.1.⑧ gesehen haben, sind die Lösungskurven dieser Differentialgleichung die logarithmischen Spiralen

$$r(\phi) = C e^{\phi} \quad (-\infty < \phi < \infty)$$

(Polarkoordinaten). Die “natürliche” Parameterdarstellung würde diese Spiralen mit konstanter Absolutgeschwindigkeit $\sqrt{2}$ abfahren. \bigcirc

Linienintegrale

Wie bereits angedeutet, handelt die Vektoranalysis von den Möglichkeiten und Wirkungen des Differenzierens und Integrierens im Zusammenhang mit Skalar- und Vektorfeldern. Ein Beispiel dafür haben wir schon kennengelernt: Der “Operator” ∇ liefert zu jedem Skalarfeld f ein Vektorfeld ∇f , das mit f in einem bestimmten geometrisch oder physikalisch interpretierbaren Zusammenhang steht. Weitere derartige **Differentialoperatoren** (div, rot, Δ), werden wir in den folgenden Abschnitten einführen und beschreiben.

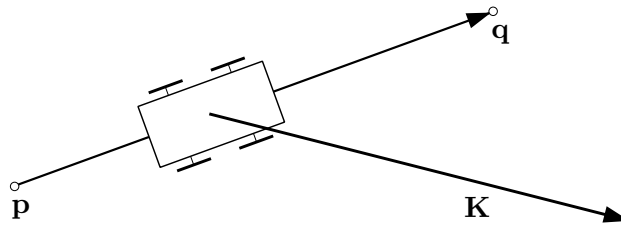


Fig. 14.1.8

An dieser Stelle behandeln wir eine Weise zu integrieren, die in gewissem Sinn die Gradientenbildung rückgängig macht. Es geht um den Begriff des Linienintegrals.

Schiebt ein homogenes Kraftfeld \mathbf{K} ein Wägelchen auf gerader Bahn von \mathbf{p} nach \mathbf{q} (Fig. 14.1.8), so leistet es dabei bekanntlich die Arbeit

$$W = \mathbf{K} \cdot (\mathbf{q} - \mathbf{p}) . \quad (5)$$

Diese Arbeit verwandelt sich — je nach Versuchsanordnung — zum Beispiel in Wärme oder in potentielle Energie des Gefährts. Ist das Kraftfeld \mathbf{K} variabel und anstelle der geraden Bahn eine stetig differenzierbare Kurve

$$\gamma : t \mapsto \mathbf{x}(t) \quad (a \leq t \leq b) \quad (6)$$

gegeben, so liegt es nahe, eine hinreichend feine Teilung

$$T : a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b$$

des Intervalls $[a, b]$ zu betrachten. Setzt man $\mathbf{x}(t_k) =: \mathbf{x}_k$ ($0 \leq k \leq N$), so lässt sich die längs γ geleistete Arbeit W nach (5) wie folgt approximieren (siehe die Fig. 14.1.9):

$$W \doteq \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{K}(\mathbf{x}_k) \cdot (\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k) \doteq \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{K}(\mathbf{x}_k) \cdot \mathbf{x}'(t_k) (t_{k+1} - t_k) .$$

Wir werden offenbar dazu geführt, die Arbeit in dem betrachteten Fall mit

$$W = \int_a^b \mathbf{K}(\mathbf{x}(t)) \cdot \mathbf{x}'(t) dt$$

zu veranschlagen; das angeschriebene Integral wird daher auch als **Arbeitsintegral** bezeichnet.

Diese physikalischen Überlegungen motivieren die folgende Definition: Es seien $\mathbf{K} = (K_1, \dots, K_n)$ ein stetiges Vektorfeld auf der offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und (6) eine stetig differenzierbare Kurve in Ω . Dann heisst

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{x} &:= \int_a^b \mathbf{K}(\mathbf{x}(t)) \cdot \mathbf{x}'(t) dt \\ &= \int_a^b \left(K_1(\mathbf{x}(t))x'_1(t) + \dots + K_n(\mathbf{x}(t))x'_n(t) \right) dt \end{aligned} \quad (7)$$

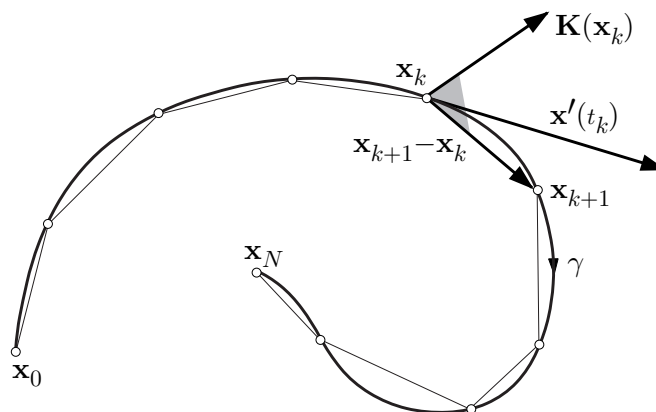


Fig. 14.1.9

das **Linienintegral von \mathbf{K} längs γ** . Das formale Objekt

$$d\mathbf{x} := \mathbf{x}'(t) dt$$

wird als **vektorielles Linienelement** bezeichnet; in ähnlicher Weise schreibt man

$$dx_k := x'_k(t) dt, \quad dx := x'(t) dt, \quad dy := y'(t) dt \quad \text{usw.}$$

Die suggestiven Schreibweisen

$$\int_{\gamma} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{x}, \quad \int_{\gamma} (P dx + Q dy)$$

— die zweite bezieht sich auf den Fall $n = 2$, $\mathbf{K} = (P, Q)$ — vermitteln alle zur Festlegung eines bestimmten Linienintegrals nötige Information, denn der Wert der rechten Seite von (7) ist gegenüber Parametertransformationen invariant.

□ Ist eine weitere Parameterdarstellung

$$\gamma: \bar{t} \mapsto \bar{\mathbf{x}}(\bar{t}) \quad (\bar{a} \leq \bar{t} \leq \bar{b})$$

mit (6) verknüpft durch die Parametertransformation $t = \psi(\bar{t})$, so gilt

$$\bar{\mathbf{x}}(\bar{t}) = \mathbf{x}(\psi(\bar{t})) \quad (\bar{a} \leq \bar{t} \leq \bar{b})$$

und folglich

$$\begin{aligned} \int_{\bar{a}}^{\bar{b}} \mathbf{K}(\bar{\mathbf{x}}(\bar{t})) \cdot \bar{\mathbf{x}}'(\bar{t}) d\bar{t} &= \int_{\bar{a}}^{\bar{b}} \mathbf{K}(\mathbf{x}(\psi(\bar{t}))) \cdot \mathbf{x}'(\psi(\bar{t})) \psi'(\bar{t}) d\bar{t} \\ &= \int_a^b \mathbf{K}(\mathbf{x}(t)) \cdot \mathbf{x}'(t) dt; \end{aligned}$$

dabei wurde zuerst die Kettenregel, dann die Substitutionsregel (9.26)(b) benutzt. □

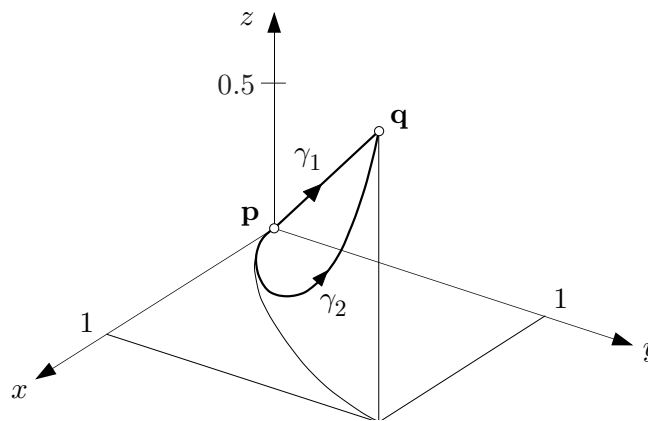


Fig. 14.1.10

⑤ Wir betrachten im (x, y, z) -Raum das Feld

$$\mathbf{K}(x, y, z) := (y^2, xz, 1),$$

ferner die zwei Kurven

$$\gamma_1 : t \mapsto (t, t, t) \quad (0 \leq t \leq 1),$$

$$\gamma_2 : t \mapsto (t, t^2, t^3) \quad (0 \leq t \leq 1),$$

die beide den Punkt $\mathbf{p} := (0, 0, 0)$ mit dem Punkt $\mathbf{q} := (1, 1, 1)$ verbinden (siehe die Fig. 14.1.10). Für das Linienintegral von \mathbf{K} längs γ_i ($i = 1, 2$) erhalten wir aufgrund von (7):

$$\int_{\gamma_i} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{x} = \int_0^1 (y^2(t)x'(t) + x(t)z(t)y'(t) + 1 \cdot z'(t)) dt;$$

dabei sind rechter Hand die Parameterdarstellungen der γ_i einzusetzen. Es ergibt sich

$$\int_{\gamma_1} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{x} = \int_0^1 (t^2 \cdot 1 + t^2 \cdot 1 + 1 \cdot 1) dt = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + 1 = \frac{5}{3},$$

$$\int_{\gamma_2} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{x} = \int_0^1 (t^4 \cdot 1 + t^4 \cdot 2t + 1 \cdot 3t^2) dt = \frac{1}{5} + \frac{2}{6} + \frac{3}{3} = \frac{23}{15}.$$

Wir sehen: Der Wert eines Linienintegrals hängt nicht nur von den beiden Endpunkten der betrachteten Kurve ab, sondern von dem genauen Weg, der dabei zurückgelegt wurde. \bigcirc

Der Betrag eines Linienintegrals genügt der folgenden einfachen Abschätzung:

(14.1) Die Kurve γ besitze die Länge $L(\gamma)$, und für alle Punkte \mathbf{x} auf der Kurve gelte $|\mathbf{K}(\mathbf{x})| \leq M$. Dann ist

$$\left| \int_{\gamma} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{x} \right| \leq M \cdot L(\gamma) .$$

□ Mit Hilfe der Schwarzischen Ungleichung ergibt sich nacheinander

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b \mathbf{K}(\mathbf{x}(t)) \cdot \mathbf{x}'(t) dt \right| &\leq \int_a^b \left| \mathbf{K}(\mathbf{x}(t)) \cdot \mathbf{x}'(t) \right| dt \leq \int_a^b |\mathbf{K}(\mathbf{x}(t))| \cdot |\mathbf{x}'(t)| dt \\ &\leq M \int_a^b |\mathbf{x}'(t)| dt = M \cdot L(\gamma) . \end{aligned} \quad \square$$

Umkehrung des Richtungssinns

Betrachte wieder die Kurve (6) mit dem Parameterintervall $[a, b]$. Die Funktion

$$t' \mapsto \check{\mathbf{x}}(t') := \mathbf{x}(-t') \quad (-b \leq t' \leq -a)$$

repräsentiert die **zu γ inverse Kurve**. Anschaulich gesprochen ist das “die in umgekehrter Richtung durchlaufene Kurve γ ” (siehe die Fig. 14.1.11); wir bezeichnen sie mit $-\gamma$. Man verifiziert leicht, dass die Beziehung $\gamma \mapsto -\gamma$ parameterunabhängig ist. Vor allem gilt natürlich die von der physikalischen Interpretation her naheliegende Formel

$$(14.2) \quad \int_{-\gamma} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{x} = - \int_{\gamma} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{x} .$$

□ Man hat

$$\begin{aligned} \int_{-b}^{-a} \mathbf{K}(\check{\mathbf{x}}(t')) \cdot \check{\mathbf{x}}'(t') dt' &= \int_{-b}^{-a} \mathbf{K}(\mathbf{x}(-t')) \cdot \mathbf{x}'(-t') \cdot (-1) dt' \\ &= \int_b^a \mathbf{K}(\mathbf{x}(t)) \cdot \mathbf{x}'(t) dt = - \int_a^b \mathbf{K}(\mathbf{x}(t)) \cdot \mathbf{x}'(t) dt . \end{aligned} \quad \square$$

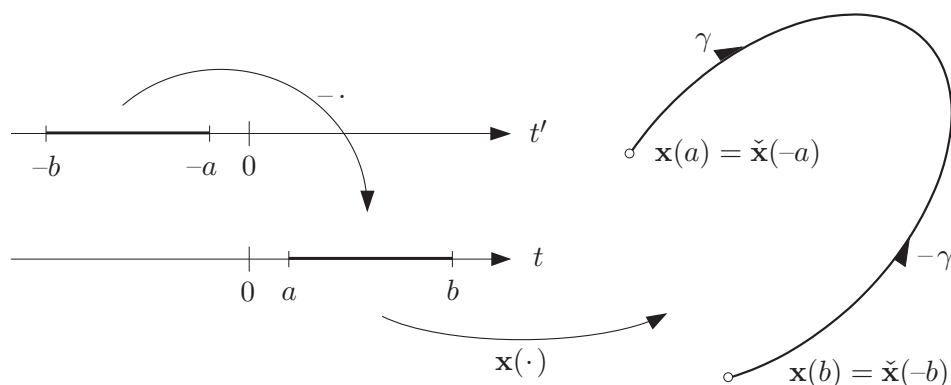


Fig. 14.1.11

Ketten

Das Linienintegral ist additiv bezüglich einer Zerlegung von γ in Teilkurven: Werden im Anschluss an (6) für ein $c \in [a, b]$ die beiden Kurven

$$\gamma_1 : t \mapsto \mathbf{x}(t) \quad (a \leq t \leq c), \quad \gamma_2 : t \mapsto \mathbf{x}(t) \quad (c \leq t \leq b)$$

eingeführt, so gilt

$$\int_{\gamma} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{x} = \int_{\gamma_1} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{x} + \int_{\gamma_2} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{x}. \quad (8)$$

Dies folgt unmittelbar aus der Definition (7).

Wir kommen damit zu einer wesentlichen Verallgemeinerung des Kurvenbegriffs, die sich aus der physikalischen Interpretation, der Zerlegungsadditivität (8) und der Regel (14.2) ergibt. Hierzu betrachten wir formale Summen

$$\sum_{j=1}^s \gamma_j \quad (9)$$

von endlich vielen stetig differenzierbaren Kurven γ_j . Zwei derartige Ausdrücke werden als **äquivalent** angesehen, wenn sie die gleichen Kurven gleich oft enthalten; gemeint ist: wenn sie sich durch endlich viele Operationen der folgenden Art ineinander überführen lassen:

- Permutation der γ_j ,
- Zerlegen eines γ_j in Teilkurven bzw. die umgekehrte Operation,
- Entfernen bzw. Hinzufügen zweier Summanden $\gamma, -\gamma$,
- Entfernen bzw. Hinzufügen einer konstanten Kurve.

Äquivalenzklassen derartiger Summen nennen wir **1-Ketten** oder einfach **Ketten**.

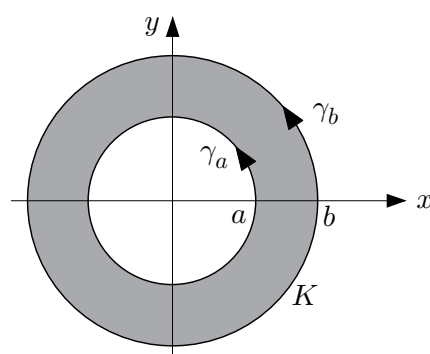


Fig. 14.1.12

Bsp: Der Kreisring K der Fig. 14.1.12 besitzt den *Randzyklus* (s.u.)

$$\partial K = \gamma_b - \gamma_a .$$

Der Einfachheit halber werden wir gelegentlich auch die repräsentierenden Summen (9) als **Ketten** bezeichnen und für Ketten ebenfalls kleine griechische Buchstaben verwenden. Die **Spur** einer Kette lässt sich am besten negativ definieren: Ein Punkt $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ gehört *nicht* zur Spur von γ , wenn γ eine Darstellung (9) besitzt, bei der alle γ_j an \mathbf{x} vorbeigehen. — Aufgrund dieser Definition bilden die in einer offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ gelegenen Ketten eine additive Gruppe.

Mit Rücksicht auf (8) und (14.2) ist nun das **Linienintegral eines Vektorfeldes \mathbf{K} längs einer Kette γ** durch folgende Vorschrift wohldefiniert: Man wählt eine beliebige Darstellung (9) von γ und setzt

$$\int_{\gamma} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{x} := \sum_{j=1}^s \int_{\gamma_j} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{x} .$$

Zwischen den stetig differenzierbaren Kurven (6) und den allgemeinsten Ketten (9) stehen die stückweise stetig differenzierbaren Kurven. Eine stetige Kurve

$$\gamma : t \mapsto \mathbf{x}(t) \quad (a \leq t \leq b)$$

heißt **stückweise stetig differenzierbar**, wenn es endlich viele Teilungspunkte t_j gibt mit

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_s = b ,$$

derart, dass die Teilkurven

$$\gamma_j : t \mapsto \mathbf{x}(t) \quad (t_{j-1} \leq t \leq t_j) \quad (1 \leq j \leq s)$$

stetig differenzierbar sind (siehe die Fig. 14.1.13). Die Teilkurven γ_j bilden zusammen die Kette $\sum_{j=1}^s \gamma_j$; es liegt nahe, diese Kette ebenfalls mit γ zu bezeichnen.

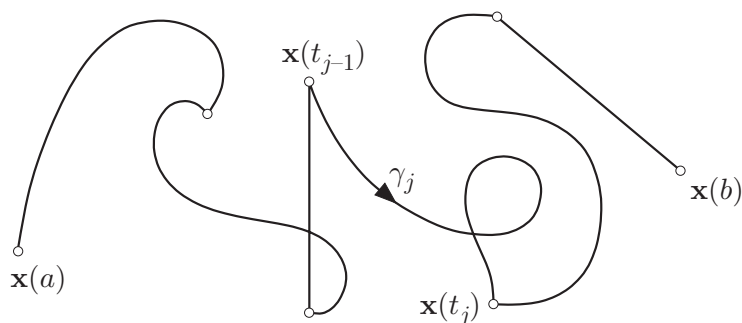


Fig. 14.1.13

Unter einer **Kurve** verstehen wir im folgenden, wenn nichts anderes gesagt ist, immer eine stückweise stetig differenzierbare Kurve. Eine Summe von geschlossenen Kurven heisst ein **Zyklus**. Man kann leicht folgendes zeigen: Eine Kette (9) ist genau dann ein Zyklus, wenn jeder Punkt $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ gleich oft als Anfangspunkt wie als Endpunkt eines γ_j auftritt.

Aufgaben

1. Produziere ein Vektorfeld $\mathbf{v}(x, y) := (P(x, y), Q(x, y))$ mit den folgenden Eigenschaften:
 - (1) Die Kreise, die die y -Achse im Ursprung berühren, sind Feldlinien.
 - (2) Das Feld ist in der ganzen Ebene definiert und stetig differenzierbar.
2. Produziere ein im ganzen Raum definiertes Vektorfeld \mathbf{v} , das die Schraubenlinien

$$\gamma_{r,h} : t \mapsto (r \cos t, r \sin t, t - h) \quad (r \geq 0, h \in \mathbb{R})$$

als Feldlinien besitzt.

3. Es sei $\partial D : t \mapsto e^{it}$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) der in positivem Sinn durchlaufene Einheitskreis in der z -Ebene, $z = x + iy$. Berechne, mit sinngemässer Interpretation der darin auftretenden Symbole, das Linienintegral

$$\int_{\partial D} \frac{1}{z} dz$$

bzw. allgemein die Integrale

$$\int_{\partial D} z^k dz \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

4. Produziere eine geschlossene, glatte (das heisst: reguläre C^1 -) Kurve

$$\gamma: t \mapsto (x(t), y(t)) \quad (a \leq t \leq b),$$

die, als Kette aufgefasst, gleich 0 ist.

5. Berechne das Linienintegral $\int_{\gamma} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{x}$ für

(a) $\mathbf{K}(x, y) := (x^2 + y, 2xy)$,

$\gamma :=$ Einheitskreis, positiver Umlaufssinn;

(b) $\mathbf{K}(x, y) := (x + y, 2x - y)$,

$\gamma :=$ Bogen der kubischen Parabel $y = x^3$ von $(-2, -8)$ bis $(1, 1)$;

(c) $\mathbf{K}(x, y, z) := (-y, x, z)$,

$\gamma :=$ Schnittkurve des Paraboloids $z = 7 - x^2 - y^2$ mit der Ebene $2x - 4y + z = 3$, positiver Umlaufssinn um die z -Achse.

14.2 Konservative Felder

Wir haben in Beispiel 14.1.⑤ gesehen, dass das Linienintegral eines Vektorfeldes längs verschiedenen Kurven von \mathbf{p} nach \mathbf{q} verschiedene Werte annehmen kann. Ein stetiges Vektorfeld \mathbf{K} auf der offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ heisst **konservativ** oder **exakt** (genau: **exakt modulo** Ω), wenn dieses Phänomen *nicht* auftritt, in anderen Worten, wenn die folgende Bedingung erfüllt ist:

- (a) Für je zwei Kurven γ_1, γ_2 in Ω mit denselben Anfangs- und Endpunkten gilt

$$\int_{\gamma_1} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{x} = \int_{\gamma_2} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{x} .$$

Der Name “konservativ” steht mit der physikalischen Interpretation in Zusammenhang: Für konservative Vektorfelder gilt der Satz von der Erhaltung der Energie. — Die Bedingung (a) ist äquivalent mit

- (b) Für alle in Ω gelegenen Zyklen γ ist

$$\int_{\gamma} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{x} = 0 .$$

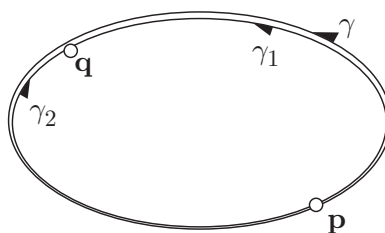


Fig. 14.2.1

□ (Siehe die Fig. 14.2.1.) Gilt (b) und sind γ_1, γ_2 zwei Kurven von \mathbf{p} nach \mathbf{q} , so ist $\gamma := \gamma_1 - \gamma_2$ ein Zyklus, und aus (b) folgt aufgrund der Rechenregeln

$$\int_{\gamma_1} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{x} - \int_{\gamma_2} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{x} = 0 ,$$

was zu beweisen war. — Umgekehrt: Gilt (a) und ist γ eine beliebige geschlossene Kurve in Ω , so lässt sich γ als Differenz $\gamma_1 - \gamma_2$ von zwei Verbindungskurven geeignet gewählter Punkte \mathbf{p} und \mathbf{q} auffassen, und mit (a) folgt

$$\int_{\gamma} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{x} = \int_{\gamma_1} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{x} - \int_{\gamma_2} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{x} = 0 .$$

Hiernach verschwindet das Integral auch längs beliebigen Zyklen in Ω ; somit gilt (b). □

Ein erster Integralsatz

Unser erster Integralsatz hat leider keinen Namen:

(14.3) *Es sei $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ein C^1 -Skalarfeld auf der offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, und es sei γ eine beliebige Kurve in Ω mit Anfangspunkt \mathbf{p} und Endpunkt \mathbf{q} . Dann gilt*

$$\int_{\gamma} \nabla f \cdot d\mathbf{x} = f(\mathbf{q}) - f(\mathbf{p}) .$$

In Worten: Das Linienintegral eines Gradientenfeldes längs einer beliebigen Kurve γ ist gleich der zugehörigen "Potentialdifferenz" zwischen Anfangspunkt und Endpunkt der Kurve.

□ Es sei zunächst

$$\gamma_1 : t \mapsto \mathbf{x}(t) \quad (t_0 \leq t \leq t_1)$$

eine stetig differenzierbare Kurve von \mathbf{p}_0 nach \mathbf{p}_1 . Der für das Linienintegral $\int_{\gamma_1} \nabla f \cdot d\mathbf{x}$ herzustellende Ausdruck $\nabla f(\mathbf{x}(t)) \cdot \mathbf{x}'(t)$ lässt sich auffassen als Ableitung der Hilfsfunktion $\phi(t) := f(\mathbf{x}(t))$. Man erhält daher

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1} \nabla f \cdot d\mathbf{x} &= \int_{t_0}^{t_1} \nabla f(\mathbf{x}(t)) \cdot \mathbf{x}'(t) dt = \int_{t_0}^{t_1} \phi'(t) dt = \phi(t_1) - \phi(t_0) \\ &= f(\mathbf{p}_1) - f(\mathbf{p}_0) , \end{aligned}$$

und durch Summation folgt für beliebige Kurven $\gamma = \sum_{j=1}^s \gamma_j$ mit Anfangspunkt $\mathbf{p} =: \mathbf{p}_0$ und Endpunkt $\mathbf{q} =: \mathbf{p}_s$ die behauptete Formel:

$$\int_{\gamma} \nabla f \cdot d\mathbf{x} = \sum_{j=1}^s (f(\mathbf{p}_j) - f(\mathbf{p}_{j-1})) = f(\mathbf{p}_s) - f(\mathbf{p}_0) = f(\mathbf{q}) - f(\mathbf{p}) . \quad \square$$

Hieraus ergibt sich unmittelbar das folgende Korollar:

(14.4) *Gradientenfelder von C^1 -Funktionen sind konservativ.*

Als Beispiel und Anwendung beweisen wir (Fig. 14.1.2):

(14.5) *Es sei*

$$\mathbf{K}(\mathbf{x}) := K(r) \frac{\mathbf{x}}{r} \quad (r := |\mathbf{x}| \neq 0)$$

ein stetiges Zentralfeld im \mathbb{R}^n . Dann ist \mathbf{K} konservativ.

□ Es sei $V(r)$ eine Stammfunktion von $K(r)$. Wir behaupten: Die Funktion

$$f(\mathbf{x}) := V(|\mathbf{x}|)$$

ist ein **Potential** von \mathbf{K} , das heisst: Es gilt $\mathbf{K} = \nabla f$. Man hat nämlich

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = V'(r) \frac{\partial r}{\partial x_k} = K(r) \frac{x_k}{r}$$

und somit

$$\nabla f(\mathbf{x}) = K(r) \frac{\mathbf{x}}{r} = \mathbf{K}(\mathbf{x}) . \quad \lrcorner$$

Von Satz (14.4) gilt nun auch die Umkehrung:

(14.6) *Ist \mathbf{K} ein stetiges konservatives Vektorfeld auf der offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, so besitzt \mathbf{K} ein Potential, das heisst: Es gibt eine C^1 -Funktion $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\mathbf{K} = \nabla f$.*

Wir werden nämlich folgendes beweisen:

(14.7) (a) *Es sei \mathbf{K} ein stetiges konservatives Vektorfeld auf der zusammenhängenden offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, und es sei \mathbf{p}_0 ein beliebiger, aber fester Punkt von Ω . Dann ist*

$$f(\mathbf{p}) := \int_{\mathbf{p}_0}^{\mathbf{p}} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{x} \quad (\mathbf{p} \in \Omega) \quad (1)$$

ein Potential von \mathbf{K} ; dabei bezeichnet $\int_{\mathbf{p}_0}^{\mathbf{p}}$ das Integral längs irgendeiner in Ω gelegenen Kurve von \mathbf{p}_0 nach \mathbf{p} .

(b) *Die sämtlichen Potentiale von \mathbf{K} auf Ω sind die Funktionen $f + \text{const}$.*

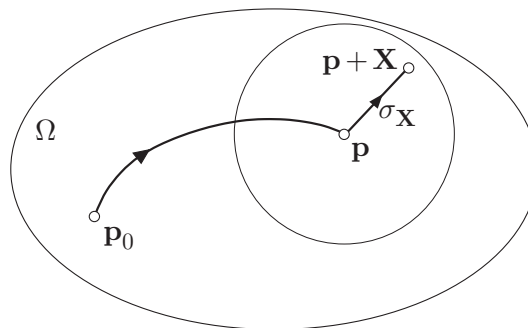


Fig. 14.2.2

□ Die Funktion f ist durch (1) wohldefiniert: Es gibt immer eine in Ω liegende Kurve (sogar einen Streckenzug) von \mathbf{p}_0 nach \mathbf{p} , und verschiedene solche Kurven liefern nach Voraussetzung über \mathbf{K} dasselbe Integral.

Wir betrachten jetzt einen festen Punkt $\mathbf{p} \in \Omega$. Es gibt ein $\delta > 0$ derart, dass für alle \mathbf{X} mit $|\mathbf{X}| < \delta$ die Verbindungsstrecke

$$\sigma_{\mathbf{X}} : t \mapsto \mathbf{p} + t\mathbf{X} \quad (0 \leq t \leq 1)$$

der Punkte \mathbf{p} und $\mathbf{p} + \mathbf{X}$ ganz in Ω liegt (Fig. 14.2.2). Für solche \mathbf{X} gilt nach Definition von f die Beziehung

$$f(\mathbf{p} + \mathbf{X}) = \int_{\mathbf{p}_0}^{\mathbf{p}} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{x} + \int_{\sigma_{\mathbf{X}}} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{x};$$

wir haben daher

$$f(\mathbf{p} + \mathbf{X}) = f(\mathbf{p}) + \int_{\sigma_{\mathbf{X}}} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{x} \quad (|\mathbf{X}| < \delta). \quad (2)$$

Die Behauptung (a) ergibt sich nun aus dem folgenden Lemma, und (b) ist eine unmittelbare Konsequenz von **(12.18)**. \square

(14.8) (Lemma) Gilt (2), so ist f an der Stelle \mathbf{p} differenzierbar, und es ist

$$\nabla f(\mathbf{p}) = \mathbf{K}(\mathbf{p}).$$

\square Wir schreiben

$$\int_{\sigma_{\mathbf{X}}} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{x} = \mathbf{K}(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{X} + R(\mathbf{X})$$

und haben nun die Restgrösse

$$R(\mathbf{X}) := \int_0^1 (\mathbf{K}(\mathbf{p} + t\mathbf{X}) - \mathbf{K}(\mathbf{p})) \cdot \mathbf{X} dt$$

zu betrachten. Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung gibt es ein (von \mathbf{X} abhängiges) $\tau \in [0, 1]$ mit

$$R(\mathbf{X}) = (\mathbf{K}(\mathbf{p} + \tau\mathbf{X}) - \mathbf{K}(\mathbf{p})) \cdot \mathbf{X},$$

und hieraus folgt nach der Schwarzschen Ungleichung

$$\frac{|R(\mathbf{X})|}{|\mathbf{X}|} \leq |\mathbf{K}(\mathbf{p} + \tau\mathbf{X}) - \mathbf{K}(\mathbf{p})| \quad (\mathbf{X} \neq \mathbf{0}).$$

Wegen der Stetigkeit von \mathbf{K} beweist dies

$$R(\mathbf{X}) = o(|\mathbf{X}|) \quad (\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{0});$$

wir haben daher

$$\int_{\sigma_{\mathbf{x}}} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{x} = \mathbf{K}(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{X} + o(|\mathbf{X}|) \quad (\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{0}).$$

Tragen wir dies in (2) ein, so ergibt sich

$$f(\mathbf{p} + \mathbf{X}) - f(\mathbf{p}) = \mathbf{K}(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{X} + o(|\mathbf{X}|) \quad (\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{0})$$

und damit nach Definition des Gradienten die Behauptung des Lemmas. \square

Für (14.6) müssen wir uns noch von der Voraussetzung befreien, dass Ω zusammenhängend ist. Es sei also $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine beliebige offene Menge. Durch die Festsetzung

$$\mathbf{p} \sim \mathbf{q} \quad :\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \text{Es gibt einen Streckenzug in } \Omega \text{ mit} \\ \text{Anfangspunkt } \mathbf{p} \text{ und Endpunkt } \mathbf{q} \end{cases}$$

wird auf Ω eine Äquivalenzrelation erklärt, die Ω in paarweise disjunkte **Zusammenhangskomponenten** zerlegt. Die Zusammenhangskomponenten sind zusammenhängende offene Mengen (ist \mathbf{p} mit \mathbf{q} verbindbar, so ist jeder Punkt einer ganzen Umgebung von \mathbf{p} via \mathbf{p} mit \mathbf{q} verbindbar), und zwar gibt es höchstens abzählbar viele davon, da jede offene Menge Punkte mit rationalen Koordinaten enthält.

Zu jeder Zusammenhangskomponente Ω_k von Ω gibt es jetzt nach (14.7) ein $f_k: \Omega_k \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\nabla f_k = \mathbf{K}|_{\Omega_k}$. Durch "Zusammenlegen" der f_k erhält man eine Funktion $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\nabla f = \mathbf{K}$. Damit ist (14.6) vollständig bewiesen.

Besteht Ω aus mehreren Komponenten, so gilt die Eindeutigkeitsaussage (b) von Satz (14.7) nicht mehr. Folgendes trifft hingegen zu und ist der Anfang einer langen Geschichte: Die Lösungen der homogenen ("partiellen") Differentialgleichung

$$\nabla f = 0$$

bilden einen Vektorraum \mathcal{L} von (lokal konstanten) Funktionen $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Die Dimension von \mathcal{L} ist gleich der Anzahl der Zusammenhangskomponenten von Ω .

14.3 Rotation

Zirkulation

Es sei $\mathbf{K}: \Omega \rightarrow T\Omega$ ein C^1 -Vektorfeld auf der offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Ist γ eine geschlossene Kurve in Ω , so nennt man das Linienintegral

$$\int_{\gamma} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{x}$$

auch **Zirkulation von \mathbf{K} längs γ** . Die Zirkulation ist besonders gross, wenn \mathbf{K} längs γ durchwegs fast dieselbe Richtung wie $\mathbf{x}'(t)$ hat, so dass sich die von den einzelnen "Kurvenelementen" $d\mathbf{x}$ herrührenden Beiträge laufend kumulieren (Fig. 14.3.1, links). Dies ist zum Beispiel der Fall bei dem Feld

$$\mathbf{A}(x, y) := \nabla \arg(x, y) = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$$

in der (x, y) -Ebene und einem Kreis um $(0, 0)$ herum (siehe Beispiel ②). Ist \mathbf{K} konservativ, so hat natürlich die Zirkulation für beliebige Zyklen γ den Wert 0.

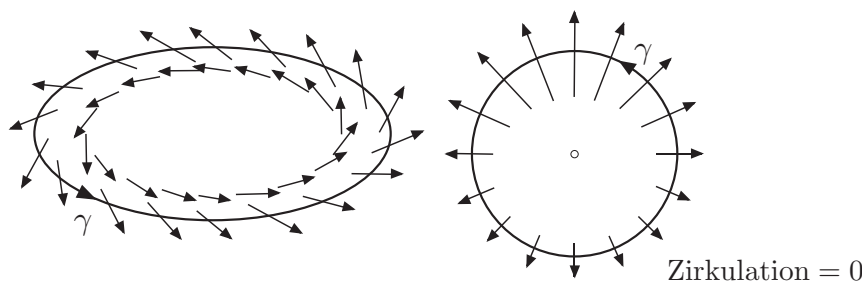


Fig. 14.3.1

Betrachte für einen Moment den Fall $n = 2$. Es sei $B \subset \Omega$ ein Rechtecksgebäude,

$$B = \bigcup_{j=1}^N Q_j,$$

die Q_j fast disjunkt. Der Fig. 14.3.2 entnimmt man

$$Z(B) := \int_{\partial B} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{x} = \sum_{j=1}^N \int_{\partial Q_j} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{x} =: \sum_{j=1}^N Z(Q_j); \quad (1)$$

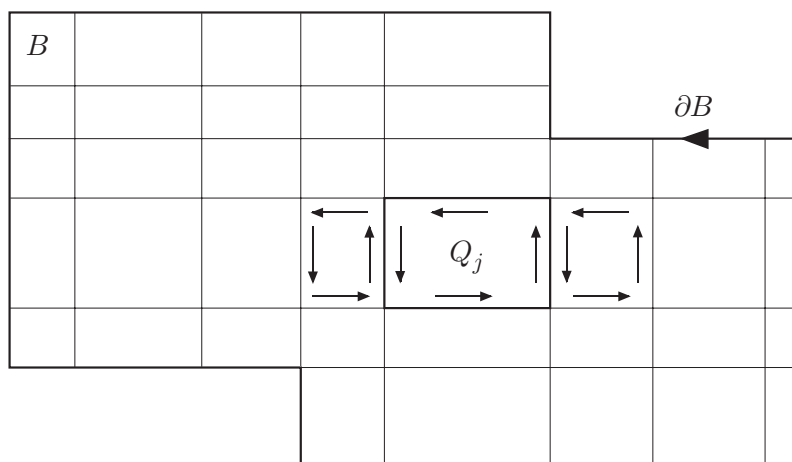


Fig. 14.3.2

denn die Beiträge der im Innern von B gelegenen Kanten der Q_j heben sich heraus. Die Beziehung (1) besagt offenbar, dass sich die Gesamtzirkulation um B herum additiv auf die Teilflächen Q_j verteilen lässt. Der Beitrag $Z(Q_j)$ hängt nur vom Verhalten von \mathbf{K} auf Q_j ab. Ist \mathbf{K} zum Beispiel homogen (das heißt: konstant) auf Q_j , so ist trivialerweise $Z(Q_j) = 0$. Hieraus folgt: $Z(Q_j)$ hängt mit der Inhomogenität von \mathbf{K} auf Q_j zusammen, und diese wiederum kommt in den "Ableitungen" von \mathbf{K} zum Vorschein. Alles in allem erwarten wir eine Formel der folgenden Art:

$$\int_{\partial B} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{x} = \int_B \text{"Wirbeldichte von } \mathbf{K} \text{" } d\mu . \quad (2)$$

Infinitesimale Zirkulation

Wir wenden uns zunächst der "Wirbeldichte" zu. Im folgenden ist wieder $n \geq 2$ beliebig.

Betrachte einen festen Punkt $\mathbf{p} \in \Omega$ und ein kleines, von den Vektoren \mathbf{X} und \mathbf{Y} aufgespanntes Parallelogramm $P \subset T_{\mathbf{p}}$ mit Mittelpunkt \mathbf{p} (Fig. 14.3.3). Um Vorstellungen zu fixieren, denken wir uns ein $\varepsilon > 0$ vorgegeben und wählen P so klein, dass für alle Punkte $\mathbf{x} \in P$ die Abschätzung

$$\|d\mathbf{K}(\mathbf{x}) - L\| \leq \varepsilon, \quad L := d\mathbf{K}(\mathbf{p}),$$

zutrifft. Nach dem Mittelwertsatz (12.19) gilt dann

$$\mathbf{K}(\mathbf{x} + \mathbf{X}) - \mathbf{K}(\mathbf{x}) = L \cdot \mathbf{X} + \varepsilon |\mathbf{X}| \Theta,$$

sobald die beiden Punkte \mathbf{x} und $\mathbf{x} + \mathbf{X}$ in P liegen; dabei berufen wir uns für den Rest der laufenden Überlegung auf die Θ -Vereinbarung: Θ bezeichnet immer ein Objekt vom Betrag ≤ 1 , allerdings nicht immer dasselbe.

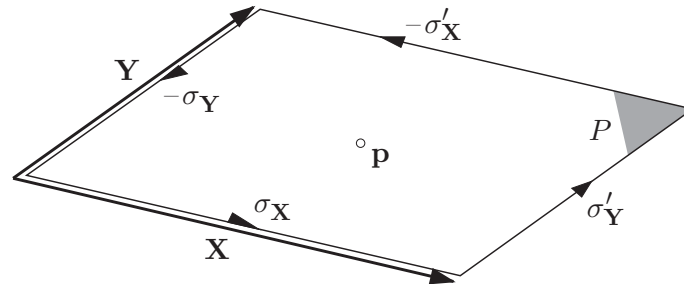


Fig. 14.3.3

Das Parallelogramm P besitzt den **Randzyklus**

$$\partial P := \sigma_{\mathbf{X}} + \sigma'_{\mathbf{Y}} - \sigma'_{\mathbf{X}} - \sigma_{\mathbf{Y}} . \quad (3)$$

Die Zirkulation von \mathbf{K} längs ∂P berechnet sich nun folgendermassen:

$$\begin{aligned} \int_{\partial P} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{x} &= \int_{\sigma'_{\mathbf{Y}}} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{x} - \int_{\sigma_{\mathbf{Y}}} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{x} - \int_{\sigma'_{\mathbf{X}}} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{x} + \int_{\sigma_{\mathbf{X}}} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{x} \\ &= \int_{\sigma_{\mathbf{Y}}} (\mathbf{K}(\mathbf{x} + \mathbf{X}) - \mathbf{K}(\mathbf{x})) \cdot d\mathbf{x} - \int_{\sigma_{\mathbf{X}}} (\mathbf{K}(\mathbf{x} + \mathbf{Y}) - \mathbf{K}(\mathbf{x})) \cdot d\mathbf{x} \\ &= \int_{\sigma_{\mathbf{Y}}} (L \cdot \mathbf{X} + \varepsilon |\mathbf{X}| \Theta) \cdot d\mathbf{x} - \int_{\sigma_{\mathbf{X}}} (L \cdot \mathbf{Y} + \varepsilon |\mathbf{Y}| \Theta) \cdot d\mathbf{x} \\ &= (L \cdot \mathbf{X}) \cdot \mathbf{Y} - (L \cdot \mathbf{Y}) \cdot \mathbf{X} + 2\varepsilon |\mathbf{X}| |\mathbf{Y}| \Theta . \end{aligned} \quad (4)$$

Die beiden Seitenlängen $|\mathbf{X}|$ und $|\mathbf{Y}|$ sind höchstens gleich dem Durchmesser $|P|$ des betrachteten Parallelogramms. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, können wir daher aus (4) den folgenden Schluss ziehen:

$$\int_{\partial P} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{x} = (L \cdot \mathbf{X}) \cdot \mathbf{Y} - (L \cdot \mathbf{Y}) \cdot \mathbf{X} + o(|P|^2) \quad (|P| \rightarrow 0) . \quad (5)$$

Hiernach ist die Zirkulation von \mathbf{K} um ein “kleines” Parallelogramm P mit Mittelpunkt \mathbf{p} “in erster Näherung” eine schiefe bilineare Funktion der beiden Vektoren \mathbf{X} und \mathbf{Y} , die das Parallelogramm aufspannen. Diese bilineare Funktion wird im folgenden noch eine wichtige Rolle spielen. Wir nennen sie die **infinitesimale Zirkulation** oder die **Rotation** von \mathbf{K} im Punkt \mathbf{p} und bezeichnen sie mit $\text{Rot } \mathbf{K}(\mathbf{p})$ oder einfach mit R , wenn \mathbf{K} und \mathbf{p} vereinbart sind:

$$\text{Rot } \mathbf{K}(\mathbf{p}) : \begin{cases} T_{\mathbf{p}} \times T_{\mathbf{p}} \rightarrow \mathbb{R} , \\ (\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \mapsto (d\mathbf{K}(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{X}) \cdot \mathbf{Y} - (d\mathbf{K}(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{Y}) \cdot \mathbf{X} . \end{cases}$$

Mit dieser neuen Bezeichnung haben wir anstelle von (5) die suggestive Formel

$$(14.9) \quad \int_{\partial P} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{x} = \text{Rot } \mathbf{K}(\mathbf{p}) \cdot (\mathbf{X}, \mathbf{Y}) + o(|P|^2) \quad (|P| \rightarrow 0) .$$

Die Bilinearform R besitzt eine Matrix $[R_{ik}]$, die folgendermassen erhalten wird:

$$\begin{aligned} R_{ik} &:= R(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_k) = (d\mathbf{K} \cdot \mathbf{e}_i) \cdot \mathbf{e}_k - (d\mathbf{K} \cdot \mathbf{e}_k) \cdot \mathbf{e}_i = \mathbf{K}_{,i} \cdot \mathbf{e}_k - \mathbf{K}_{,k} \cdot \mathbf{e}_i \\ &= K_{k,i} - K_{i,k} . \end{aligned} \quad (6)$$

Ist $\text{Rot } \mathbf{K}(\mathbf{p}) = 0$ für alle $\mathbf{p} \in \Omega$ — gemeint ist: Gilt

$$\text{Rot } \mathbf{K}(\mathbf{p}) \cdot (\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = 0 \quad \forall \mathbf{p} \in \text{dom}(\mathbf{K}), \forall \mathbf{X}, \forall \mathbf{Y} ,$$

so heisst das Feld \mathbf{K} **wirbelfrei** oder **geschlossen**.

(14.10) Ist \mathbf{K} ein konservatives C^1 -Feld auf Ω , so ist

$$\text{Rot } \mathbf{K}(\mathbf{p}) \equiv 0$$

auf Ω . In anderen Worten: Konservative Felder (= Gradientenfelder) sind wirbelfrei.

□ Ist \mathbf{K} konservativ, so gibt es nach Satz (14.6) ein $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\mathbf{K} = \nabla f$, das heisst

$$K_k = \frac{\partial f}{\partial x_k} \quad (1 \leq k \leq n) .$$

Dieses f ist nach Voraussetzung über \mathbf{K} von selbst zweimal stetig differenzierbar; somit gilt nach (12.20)

$$K_{k,i} - K_{i,k} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} \right) - \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \equiv 0 ,$$

was zu beweisen war.

Wir geben nun noch einen koordinatenfreien Beweis, der sich auf (4) stützt. Betrachte einen festen Punkt $\mathbf{p} \in \Omega$ sowie zwei beliebige, aber feste Vektoren $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in T_{\mathbf{p}}$. Für beliebiges $\lambda > 0$ sei P_λ das von den Vektoren $\lambda\mathbf{X}$ und $\lambda\mathbf{Y}$ aufgespannte Parallelogramm mit Mittelpunkt \mathbf{p} . Da \mathbf{K} konservativ ist, ergibt sich aus (4), dass für alle hinreichend kleinen λ das folgende zutrifft:

$$0 = \int_{\partial P_\lambda} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{x} = R(\lambda\mathbf{X}, \lambda\mathbf{Y}) + \varepsilon |\lambda\mathbf{X}| |\lambda\mathbf{Y}| \Theta = \lambda^2 (R(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) + 2\varepsilon |\mathbf{X}| |\mathbf{Y}| \Theta) .$$

Dies ist nur möglich, wenn $|R(\mathbf{X}, \mathbf{Y})| \leq 2\varepsilon |\mathbf{X}| |\mathbf{Y}|$ ist; und da $\varepsilon > 0$ beliebig war, muss $R(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = 0$ sein. □

Die Umkehrung dieses Satzes wird in Abschnitt 14.8 behandelt.

Der Fall $n = 2$

In den beiden Fällen $n = 2$ und $n = 3$ gelingt es, die infinitesimale Zirkulation in besonders einfacher und "konkreter" Weise darzustellen. Hierzu benötigen wir allerdings weitere Hilfsmittel aus der linearen Algebra.

Ist der Grundraum \mathbb{X} zweidimensional, so ist jede schiefe bilineare Funktion auf \mathbb{X} , also insbesondere die Rotation $\text{Rot } \mathbf{K}(\mathbf{p}) =: R$, nach einem bekannten Satz über die Determinante ein konstantes Vielfaches der Determinantenfunktion $\varepsilon(\cdot, \cdot)$. Der konstante Faktor, der sich bei R einstellt, heisst **Wirbeldichte** oder ebenfalls **Rotation** von \mathbf{K} im Punkt \mathbf{p} und wird mit $\text{rot } \mathbf{K}(\mathbf{p})$ bezeichnet. Es gilt also identisch in \mathbf{X} und \mathbf{Y} :

$$R(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \text{rot } \mathbf{K}(\mathbf{p}) \varepsilon(\mathbf{X}, \mathbf{Y}), \quad (7)$$

und (14.9) geht über in die die Formel

$$\int_{\partial P} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{x} = \text{rot } \mathbf{K}(\mathbf{p}) \varepsilon(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) + o(|P|^2) \quad (|P| \rightarrow 0). \quad (8)$$

Nun ist $|\varepsilon(\mathbf{X}, \mathbf{Y})|$ nach (13.31) gleich der Fläche des von \mathbf{X} und \mathbf{Y} aufgespannten Parallelogramms P . Die Formel (8) lässt sich daher folgendermassen interpretieren: Für "kleine" Parallelogrammwege ∂P ist die Zirkulation

$$\int_{\partial P} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{x}$$

in erster Näherung proportional zur umfahrenen Fläche; der Proportionalitätsfaktor ist im wesentlichen (das heisst: bis aufs Vorzeichen) die Wirbeldichte $\text{rot } \mathbf{K}$.

An dieser Stelle kehren wir für einen Moment zu den heuristischen Betrachtungen am Anfang dieses Abschnitts, speziell zu der Formel (1), zurück. Ein achsenparalleles Rechteck Q wird aufgespannt von den beiden Vektoren $\mathbf{X} = a \mathbf{e}_1$ und $\mathbf{Y} = b \mathbf{e}_2$. Damit liefert (3) den gewünschten Umlaufssinn von ∂Q (Fig. 14.3.4); gleichzeitig ist $\varepsilon(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = a \cdot b = \mu(Q)$. Sind die in (1) betrachteten Rechtecke Q_j hinreichend klein, so können wir (8) anwenden und erhalten die Näherung

$$Z(Q_j) := \int_{\partial Q_j} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{x} \doteq \text{rot } \mathbf{K}(\boldsymbol{\xi}_j) \mu(Q_j),$$

wobei $\boldsymbol{\xi}_j$ einen Messpunkt in Q_j darstellt. Hieraus folgt

$$\int_{\partial B} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{x} = \sum_{j=1}^N Z(Q_j) \doteq \sum_{j=1}^N \text{rot } \mathbf{K}(\boldsymbol{\xi}_j) \mu(Q_j) \doteq \int_B \text{rot } \mathbf{K} d\mu,$$

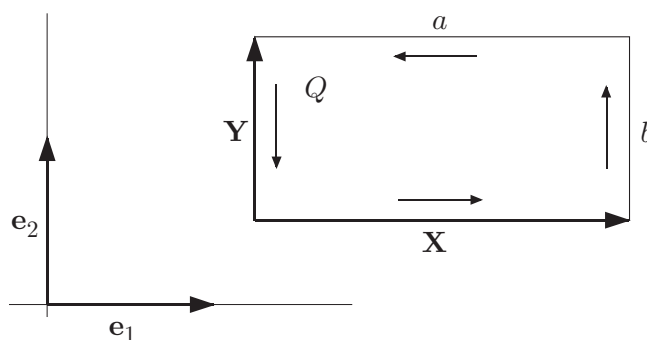


Fig. 14.3.4

so dass wir definitiv die folgende Formel vermuten:

$$\int_{\partial B} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{x} = \int_B \operatorname{rot} \mathbf{K} \, d\mu$$

(vgl. (2)). Daraus müsste man nun einen richtiggehenden Satz machen. Dies wird im nächsten Abschnitt geschehen.

Für das praktische Rechnen müssen wir die Rotation durch die partiellen Ableitungen der Komponenten von \mathbf{K} ausdrücken. Wir beweisen:

(14.11) Sind (x_1, x_2) bzw. (x, y) zulässige Koordinaten in der Ebene, so ist die Rotation eines C^1 -Vektorfeldes

$$\mathbf{K}(\mathbf{x}) = (K_1(x_1, x_2), K_2(x_1, x_2)) \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{K}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$$

gegeben durch

$$\operatorname{rot} \mathbf{K}(\mathbf{x}) = \frac{\partial K_2}{\partial x_1} - \frac{\partial K_1}{\partial x_2} \quad \text{bzw.} \quad \operatorname{rot} \mathbf{K}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} .$$

□ Für jede zulässige Basis gilt $\varepsilon(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = 1$. Mit Hilfe von (7) und (6) erhält man daher nacheinander

$$\operatorname{rot} \mathbf{K}(\mathbf{p}) = \operatorname{rot} \mathbf{K}(\mathbf{p}) \varepsilon(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = R(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = K_{2.1} - K_{1.2} . \quad \lrcorner$$

① Wir betrachten eine mit Winkelgeschwindigkeit $\omega > 0$ um den Ursprung rotierende zweidimensionale "Flüssigkeit". Die Absolutgeschwindigkeit eines Flüssigkeitsteilchens im Abstand r vom Ursprung beträgt ωr , das Geschwindigkeitsfeld \mathbf{v} dieser Strömung ist daher gegeben durch

$$\mathbf{v}(x, y) = \omega r \left(-\frac{y}{r}, \frac{x}{r} \right) = \omega(-y, x) .$$

Hieraus folgt mit **(14.11)**:

$$\operatorname{rot} \mathbf{v}(x, y) \equiv 2\omega .$$

Die Wirbeldichte dieses Feldes ist also in allen Punkten (x, y) gleich gross (und ist nicht etwa im Ursprung konzentriert!). \bigcirc

Als Korollar der Sätze (14.10) und (14.4) notieren wir noch

(14.12) (a) Ist \mathbf{K} ein konservatives C^1 -Feld auf einer offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, so gilt

$$\operatorname{rot} \mathbf{K}(\mathbf{x}) = \frac{\partial K_2}{\partial x_1} - \frac{\partial K_1}{\partial x_2} \equiv 0 .$$

(b) Für jede C^2 -Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ gilt

$$\operatorname{rot} \nabla f(\mathbf{x}) \equiv 0 .$$

Die Aussage (b) drückt natürlich nur auf verklausulierte Weise die Vertauschbarkeit der gemischten Ableitungen aus.

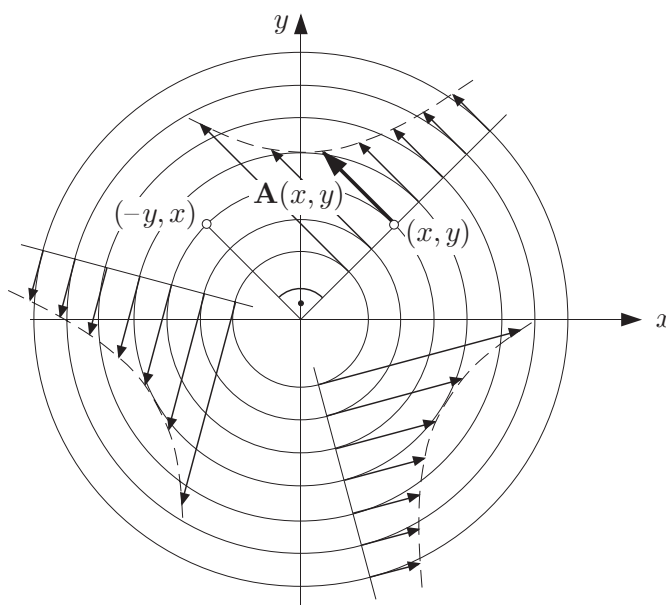


Fig. 14.3.5

② Man kann die Rotation des Feldes

$$\mathbf{A}(x, y) := \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right) \quad ((x, y) \neq (0, 0))$$

nach (14.11) ausrechnen und erhält $\equiv 0$. Nun ist dieses Feld (Fig. 14.3.5) nichts anderes als $\nabla \arg$ (siehe Beispiel 12.2.④) und damit in jeder offenen Halbebene

$$U := \{(x, y) \mid x_0 x + y_0 y > 0\}, \quad (x_0, y_0) \neq (0, 0),$$

das Gradientenfeld einer richtiggehenden C^2 -Funktion $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}$. Dann ist aber von vorneherein klar, dass $\operatorname{rot} \mathbf{A} \equiv 0$ ist. \bigcirc

Der Fall $n = 3$

Bei Vektorfeldern im dreidimensionalen Raum gibt (14.9) zu ähnlichen Konstruktionen Anlass. Zunächst benötigen wir einen der Formel (7) entsprechenden Satz für den \mathbb{R}^3 . Die “universelle Eigenschaft” der Funktion $\varepsilon(\cdot, \cdot)$ kommt hier dem Vektorprodukt zu:

(14.13) Zu jeder schiefen bilinearen Funktion

$$R: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto R(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

gibt es einen wohlbestimmten Vektor $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$ mit

$$R(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{r} \cdot (\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \quad \forall \mathbf{x}, \forall \mathbf{y}, \quad (9)$$

und zwar ist

$$\mathbf{r} = \sum_i R(\mathbf{e}_{i+1}, \mathbf{e}_{i+2}) \mathbf{e}_i .$$

(In diesem Zusammenhang gilt als vereinbart, den Index “modulo 3” zu nehmen. Es ist also $\mathbf{e}_4 := \mathbf{e}_1$ usf., und die Summe erstreckt sich über die Indexmenge \mathbb{Z}_3 .)

□ Es gibt höchstens einen Vektor \mathbf{r} , für den die Identität (9) zutrifft. Es sei also \mathbf{r} der angegebene Vektor. Aus Linearitätsgründen genügt es, zu zeigen, dass für alle $k, l \in \mathbb{Z}_3$ gilt:

$$R(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_l) = \mathbf{r} \cdot (\mathbf{e}_k \times \mathbf{e}_l) .$$

Ist $k = l$, so haben beide Seiten dieser Gleichung den Wert 0. Ferner hat man nach den Regeln der Vektorrechnung für beliebiges $j \in \mathbb{Z}_3$ die Beziehung

$$R(\mathbf{e}_{j+1}, \mathbf{e}_{j+2}) = \mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_j = \mathbf{r} \cdot (\mathbf{e}_{j+1} \times \mathbf{e}_{j+2}) .$$

Aus Symmetriegründen sind damit alle Fälle erledigt. □

Wir kehren nun wieder zu der Formel (14.9) zurück, die die Zirkulation des Feldes \mathbf{K} längs eines kleinen Parallelogrammweges ∂P angibt. Der wohlbestimmte, von \mathbf{p} abhängige Vektor $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$, der die Funktion $\text{Rot } \mathbf{K}(\mathbf{p})$ in der Form (8) darzustellen gestattet, heisst ebenfalls **Rotation von \mathbf{K} im Punkt \mathbf{p}** und wird mit $\text{rot } \mathbf{K}(\mathbf{p})$ bezeichnet. Es gilt also identisch in \mathbf{X} und \mathbf{Y} :

$$\text{Rot } \mathbf{K}(\mathbf{p}) \cdot (\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \text{rot } \mathbf{K}(\mathbf{p}) \cdot (\mathbf{X} \times \mathbf{Y}), \quad (10)$$

und (14.9) geht über in

$$\int_{\partial P} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{x} = \text{rot } \mathbf{K}(\mathbf{p}) \cdot (\mathbf{X} \times \mathbf{Y}) + o(|P|^2) \quad (|P| \rightarrow 0) . \quad (11)$$

Sind \mathbf{X} und \mathbf{Y} linear unabhängig, so stellt

$$\mathbf{n} := \frac{\mathbf{X} \times \mathbf{Y}}{|\mathbf{X} \times \mathbf{Y}|}$$

den Normaleneinheitsvektor der von \mathbf{X} und \mathbf{Y} aufgespannten Ebene dar, und zwar bildet \mathbf{n} mit dem vereinbarten Umlaufssinn von ∂P eine Rechtsschraube (Fig. 14.3.6). Es folgt

$$\mathbf{X} \times \mathbf{Y} = |\mathbf{X} \times \mathbf{Y}| \mathbf{n} = \omega(P) \mathbf{n},$$

wobei $\omega(P)$ den Flächeninhalt des Parallelogramms P bezeichnet. Tragen wir dies in (11) ein, so ergibt sich

$$\int_{\partial P} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{x} = \mathbf{rot} \mathbf{K}(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{n} \omega(P) + o(|P|^2) \quad (|P| \rightarrow 0);$$

in Worten: Für einen kleinen Parallelogrammweg ∂P ist die Zirkulation in erster Näherung proportional zur umfahrenen Fläche, und der Proportionalitätsfaktor ist gleich der Komponente von $\mathbf{rot} \mathbf{K}(\mathbf{p})$ in Richtung der Flächennormalen.

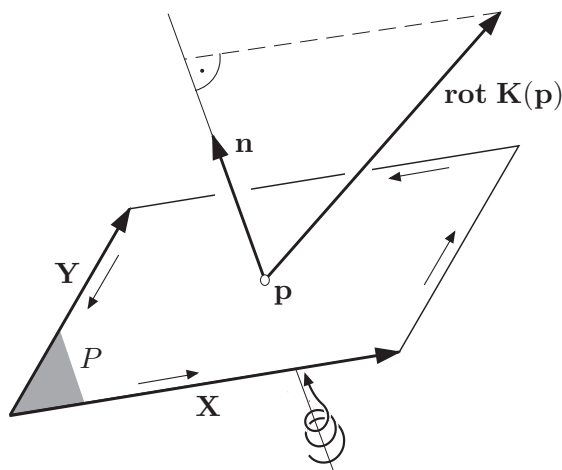


Fig. 14.3.6

③ Wir betrachten wieder das Geschwindigkeitsfeld einer um die Achse \mathbf{e} durch den Ursprung rotierenden Flüssigkeit (Beispiel 14.1.②). Aus

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \vec{\omega} \times \mathbf{x}$$

folgt mit (12.11)(c): Für alle $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$ gilt

$$d\mathbf{v}(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{X} = \vec{\omega} \times \mathbf{X},$$

und damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
R(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) &= (d\mathbf{v} \cdot \mathbf{X}) \cdot \mathbf{Y} - (d\mathbf{v} \cdot \mathbf{Y}) \cdot \mathbf{X} \\
&= (\vec{\omega} \times \mathbf{X}) \cdot \mathbf{Y} - (\vec{\omega} \times \mathbf{Y}) \cdot \mathbf{X} = 2\varepsilon(\vec{\omega}, \mathbf{X}, \mathbf{Y}) \\
&= 2\vec{\omega} \cdot (\mathbf{X} \times \mathbf{Y}) .
\end{aligned}$$

Hieraus zieht man den folgenden Schluss:

$$\mathbf{rot} \mathbf{v}(\mathbf{p}) = 2\vec{\omega} \quad \forall \mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$$

(vgl. Beispiel ①). ○

Wie im Fall $n = 2$ die skalare Rotation wollen wir nun den Vektor $\mathbf{rot} \mathbf{K}$ durch die partiellen Ableitungen der Komponenten von \mathbf{K} ausdrücken:

(14.14) Sind (x_1, x_2, x_3) bzw. (x, y, z) zulässige Koordinaten im dreidimensionalen Raum, so ist die Rotation eines C^1 -Vektorfeldes

$$\mathbf{K}(\mathbf{x}) = (K_1(x_1, x_2, x_3), K_2(x_1, x_2, x_3), K_3(x_1, x_2, x_3))$$

bzw.

$$\mathbf{K}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$$

gegeben durch

$$\mathbf{rot} \mathbf{K}(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial K_3}{\partial x_2} - \frac{\partial K_2}{\partial x_3}, \frac{\partial K_1}{\partial x_3} - \frac{\partial K_3}{\partial x_1}, \frac{\partial K_2}{\partial x_1} - \frac{\partial K_1}{\partial x_2} \right)$$

bzw.

$$\mathbf{rot} \mathbf{K}(x, y, z) = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) .$$

□ Aufgrund von (14.13) und (6) erhält man für die i -te Koordinate von $\mathbf{rot} \mathbf{K}(\mathbf{p})$ den Wert

$$(\mathbf{rot} \mathbf{K}(\mathbf{p}))_i = R(\mathbf{e}_{i+1}, \mathbf{e}_{i+2}) = \frac{\partial K_{i+2}}{\partial x_{i+1}} - \frac{\partial K_{i+1}}{\partial x_{i+2}} ,$$

wie behauptet. ┘

Bis jetzt war $\mathbf{p} \in \Omega$ fest. Lässt man auch \mathbf{p} variieren, so wird $\mathbf{rot} \mathbf{K}$ ein (von \mathbf{K} "abgeleitetes") Vektorfeld. Wie wir noch sehen werden, misst das Feld $\mathbf{rot} \mathbf{K}$ in gewisser Weise die "Nichtkonservativität" von \mathbf{K} . Jedenfalls hat man das folgende dreidimensionale Analogon zu (14.12):

(14.15) (a) Ist \mathbf{K} ein konservatives C^1 -Feld auf einer offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, so gilt $\mathbf{rot} \mathbf{K}(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{0}$.

(b) Für jede C^2 -Funktion $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ gilt

$$\mathbf{rot} \nabla f(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{0} .$$

Anders ausgedrückt: Es ist $\mathbf{rot} \circ \nabla = 0$.

④ Wir berechnen die Rotation eines Zentralfeldes

$$\mathbf{K}(\mathbf{x}) := K(r) \frac{\mathbf{x}}{r} \quad (r := |\mathbf{x}| \neq 0)$$

mit stetig differenzierbarer Feldstärke $K(r)$. — Setzt man

$$\frac{K(r)}{r} =: \phi(r) \quad (r \neq 0),$$

so besitzt \mathbf{K} die Komponenten $K_i(\mathbf{x}) = \phi(r) x_i$ ($i \in \mathbb{Z}_3$). Hieraus ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{\partial K_{i+2}}{\partial x_{i+1}} - \frac{\partial K_{i+1}}{\partial x_{i+2}} &= \frac{\partial}{\partial x_{i+1}} (\phi(r) x_{i+2}) - \frac{\partial}{\partial x_{i+2}} (\phi(r) x_{i+1}) \\ &= \phi'(r) \frac{x_{i+1}}{r} x_{i+2} - \phi'(r) \frac{x_{i+2}}{r} x_{i+1} = 0 \end{aligned}$$

und folglich wegen (14.14): $\mathbf{rot} \mathbf{K} \equiv \mathbf{0}$. Dies war aufgrund von (14.5) und (14.15) zu erwarten. \circ

Aufgaben

1. Finde und beweise dabei koordinatenfreie Identitäten der Form

(a) $\mathbf{rot}(f \nabla g) = \dots$,

(b) $\mathbf{rot}(f \mathbf{K}) = \dots$,

(c) $\mathbf{rot}(f \nabla f) = \dots$

für C^2 -Skalarfunktionen f, g und C^1 -Vektorfelder \mathbf{K} im \mathbb{R}^3 .

2. Bestimme alle C^1 -Vektorfelder \mathbf{K} in der punktierten Ebene $\dot{\mathbb{R}}^2$, die folgende Eigenschaften besitzen:

(1) $\mathbf{K}(\mathbf{z}) \perp \mathbf{z} \quad \forall \mathbf{z}$,

(2) $|\mathbf{K}(\mathbf{z})|$ hängt nur von $|\mathbf{z}|$ ab,

(3) $\mathbf{rot} \mathbf{K}(\mathbf{z}) \equiv 0$.

3. Ein zwischen den beiden unendlich ausgedehnten "Platten" $z = \pm h$ definiertes Vektorfeld \mathbf{K} ($= \mathbf{K}(x, y, z)$) besitzt eine Taylor-Entwicklung bezüglich z der Form

$$\mathbf{K}(x, y, z) = \mathbf{K}_0(x, y) + z \mathbf{K}_1(x, y) + \text{höhere Terme};$$

dabei ist

$$\mathbf{K}_0(x, y) := (x^2 - y^2, 2xy, x^2 + y^2), \quad \mathbf{K}_1(x, y) := (-y, x, x + y).$$

Berechne $\mathbf{R}_0(x, y) := \mathbf{rot} \mathbf{K}(x, y, 0)$.

14.4 Die Greensche Formel für ebene Bereiche

Die Formeln 14.3.(7) und (10) verknüpfen die Zirkulation eines Feldes \mathbf{K} um ein “infinitesimales” Parallelogramm mit dem Wert von $\text{rot } \mathbf{K}$ bzw. $\mathbf{rot } \mathbf{K}$ im Innern dieses Parallelogramms. Diesen Zusammenhang wollen wir nun auch in “integraler” Form darstellen, und zwar für möglichst allgemeine zweidimensionale Bereiche B mit Randzyklus ∂B . Um derartige Bereiche, die ja ziemlich verwickelt aussehen können (Fig. 14.4.1), beweistechnisch in den Griff zu bekommen, bedienen wir uns eines von Dieudonné ersonnenen Tricks. Er bewirkt, dass wir für die Integration jeweils nur den Inhalt eines kleinen “Fensters” ins Auge fassen müssen und uns um die globale Gestalt von B und ∂B gar nicht zu kümmern brauchen.

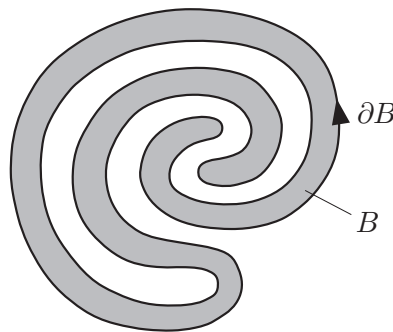


Fig. 14.4.1

Zerlegung der Einheit

(14.16) Es sei $B \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Menge und $(V(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in B)$ ein Umgebungsfeld auf B . Dann gibt es eine endliche Teilfamilie $(V_k \mid 1 \leq k \leq N)$ dieser Umgebungen und zu jedem V_k eine C^∞ -Funktion $\psi_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, so dass folgendes zutrifft:

- (a) $0 \leq \psi_k(\mathbf{x}) \leq 1 \quad (\mathbf{x} \in V_k)$,
- (b) $\psi_k(\mathbf{x}) = 0 \quad (\mathbf{x} \notin V_k)$.
- (c) Es gibt eine Umgebung Ω von B mit $\sum_{k=1}^N \psi_k(\mathbf{x}) \equiv 1$ auf Ω .

□ Zu jedem $\mathbf{x} \in B$ gibt es ein $\varepsilon > 0$ (ε hängt von \mathbf{x} ab) mit $U_{2\varepsilon}(\mathbf{x}) \subset V(\mathbf{x})$ (Fig. 14.4.2). Das Umgebungsfeld $(U_\varepsilon(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in B)$ enthält nach Satz (4.13) eine endliche Überdeckung von B : Es gibt endlich viele Punkte $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N \in B$ mit

$$B \subset \bigcup_{k=1}^N U_{\varepsilon_k}(\mathbf{x}_k)$$

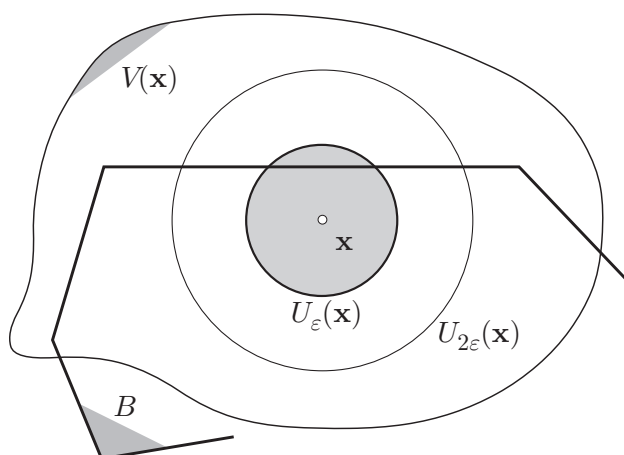


Fig. 14.4.2

(das zu \mathbf{x}_k gehörige ε haben wir mit ε_k bezeichnet). Setze

$$V_k := V(\mathbf{x}_k) \quad (1 \leq k \leq N).$$

Wir verwenden die in Beispiel 7.6.③ betrachtete C^∞ -Funktion

$$f(t) := \begin{cases} e^{-1/t} & (t > 0) \\ 0 & (t \leq 0) \end{cases},$$

um zunächst eine C^∞ -Funktion g zu konstruieren, die zwischen $t = 1$ und $t = 2$ von 1 auf 0 abfällt und im übrigen konstant ist (Fig. 14.4.3):

$$g(t) := \frac{f(2-t)}{f(2-t) + f(t-1)}.$$

Mit Hilfe von g bilden wir anschliessend die in derselben Figur dargestellten "Buckelfunktionen"

$$\rho_\varepsilon : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1], \quad \rho_\varepsilon(\mathbf{x}) := g\left(\frac{|\mathbf{x}|}{\varepsilon}\right).$$

Die C^∞ -Funktionen

$$\phi_k(\mathbf{x}) := \rho_{\varepsilon_k}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k)$$

nehmen somit nur Werte im Intervall $[0, 1]$ an, und zwar ist $\phi_k(\mathbf{x}) \equiv 1$ auf $U_{\varepsilon_k}(\mathbf{x}_k)$ und $\phi_k(\mathbf{x}) \equiv 0$ ausserhalb $U_{2\varepsilon_k}(\mathbf{x}_k)$, erst recht ausserhalb V_k .

Wir benötigen noch die weitere Hilfsfunktion

$$\phi_*(\mathbf{x}) := \prod_{k=1}^N (1 - \phi_k(\mathbf{x}));$$

sie besitzt die folgenden Eigenschaften:

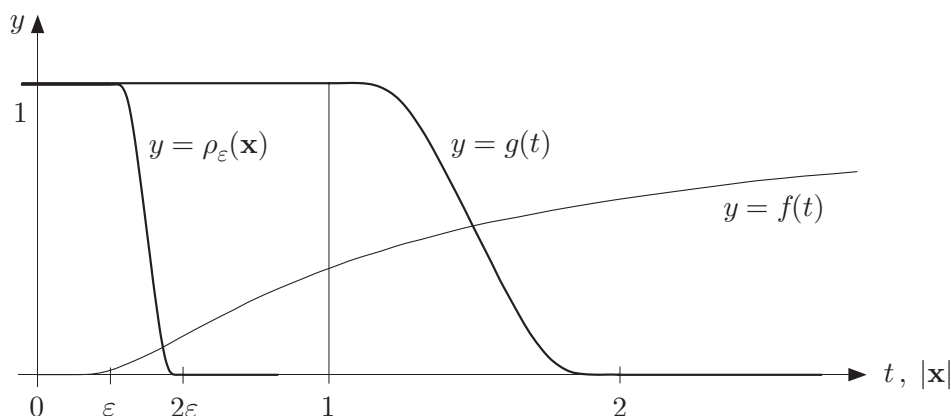


Fig. 14.4.3

- Für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ gilt $0 \leq \phi_*(\mathbf{x}) \leq 1$.
- Auf der offenen Menge $\Omega := \bigcup_{k=1}^N U_{\varepsilon_k}(\mathbf{x}_k) \supset B$ gilt $\phi_*(\mathbf{x}) \equiv 0$.
- In den Punkten $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, wo alle $\phi_k(\mathbf{x})$ verschwinden, gilt $\phi_*(\mathbf{x}) = 1$.

Man überzeugt sich nun leicht davon, dass die Funktionen

$$\psi_k(\mathbf{x}) := \frac{\phi_k(\mathbf{x})}{\phi_*(\mathbf{x}) + \sum_{l=1}^N \phi_l(\mathbf{x})} \quad (1 \leq k \leq N)$$

die gestellten Anforderungen (a)–(c) erfüllen. ┘

Das in diesem Satz konstruierte Funktionensystem $(\psi_k \mid 1 \leq k \leq n)$ heisst eine zur Überdeckung $(V(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in B)$ gehörige **Zerlegung der Einheit**.

Glatt berandete Bereiche

Eine kompakte Menge $B \subset \mathbb{R}^2$ heisst ein **glatt berandeter Bereich**, wenn es eine Kette $\gamma = \sum_{j=1}^s \gamma_j$ gibt, so dass folgendes zutrifft (siehe die Fig. 14.4.4):

- (I) Die Spuren der γ_j haben höchstens Anfangs- bzw. Endpunkte gemeinsam und bilden zusammen die Randmenge ∂B .
- (II) Zu jedem Randpunkt \mathbf{p} von B gibt es zulässige Koordinaten (x, y) mit Ursprung in \mathbf{p} , ein rechteckiges Fenster $W := [-a, a] \times [-b, b]$ und eine C^1 -Funktion $\phi: [-a, a] \rightarrow [-b, b]$ derart, dass
 - (a) der in W liegende Teil von B gegeben ist durch

$$B \cap W = \{(x, y) \mid -a \leq x \leq a, \phi(x) \leq y \leq b\}$$

und

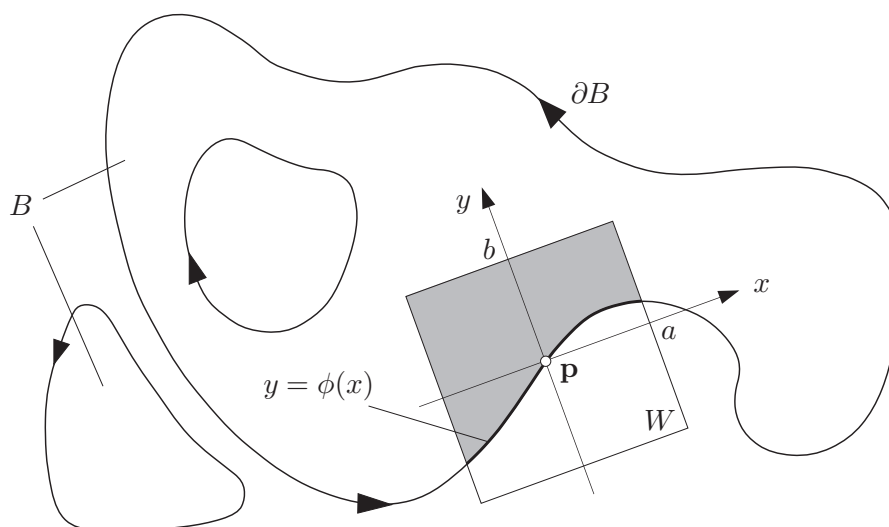


Fig. 14.4.4

(b) der in W liegende Teil von γ durch

$$\gamma_W : x \mapsto (x, \phi(x)) \quad (-a \leq x \leq a) .$$

Die Bedingung (b) ist eine anschauliche Umschreibung des eigentlich intendierten Sachverhalts

(b') Für Vektorfelder \mathbf{K} auf B , die ausserhalb W identisch verschwinden, gilt

$$\int_{\gamma} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{z} = \int_{\gamma_W} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{z} . \quad (1)$$

Ist \mathbf{p} Endpunkt von γ_j , so muss \mathbf{p} gleichzeitig Anfangspunkt genau eines $\gamma_{j'}$ sein, wenn anders (I) gelten soll. Hieraus schliesst man, dass γ ein Zyklus ist. Man nennt γ den **Randzyklus** von B und bezeichnet ihn ebenfalls mit ∂B . Der Randzyklus geht, anschaulich gesprochen, einmal in positivem Sinn um B herum (siehe Satz (14.19)); das Innere von B liegt zur *Linken* von ∂B .

Wir kommen nun zu der **Greenschen Formel**, zunächst für glatt berandete Bereiche:

(14.17) Es sei $\mathbf{K} = (P, Q)$ ein C^1 -Vektorfeld auf der offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, und es sei $B \subset \Omega$ ein glatt berandeter Bereich mit Randzyklus ∂B . Dann gilt

$$\int_{\partial B} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{z} = \int_B \text{rot } \mathbf{K} \, d\mu ,$$

oder, in Koordinaten ausgedrückt:

$$\int_{\partial B} (P \, dx + Q \, dy) = \int_B (Q_x - P_y) \, d\mu .$$

Das Innere einer Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ bezeichnen wir im folgenden mit A° . — Jeder innere Punkt von B ist Mittelpunkt eines rechteckigen Fensters, das noch ganz in B° liegt, und jeder Randpunkt von B ist Mittelpunkt eines Fensters gemäss (II), das noch ganz in Ω liegt. Wir denken uns für jeden Punkt $\mathbf{z} \in B$ ein Fenster $W_{\mathbf{z}}$ des einen oder andern Typs festgelegt. Die Familie $(W_{\mathbf{z}}^\circ \mid \mathbf{z} \in B)$ ist ein Umgebungsfeld auf B . Nach Satz (14.16) gibt es daher endlich viele Fenster $W_k := W_{\mathbf{z}_k}$ ($1 \leq k \leq N$) mit

$$B \subset \bigcup_{k=1}^N W_k^\circ$$

und eine zugehörige Zerlegung der Einheit $(\psi_k \mid 1 \leq k \leq N)$. Setzen wir

$$\psi_k \mathbf{K} =: \mathbf{K}_k \quad (1 \leq k \leq N),$$

so gilt in einer Umgebung von B die Identität

$$\mathbf{K}(\mathbf{z}) \equiv \sum_{k=1}^N \mathbf{K}_k(\mathbf{z}).$$

Es genügt daher, die behauptete Formel für jedes einzelne \mathbf{K}_k zu beweisen. Da \mathbf{K}_k ausserhalb des Fensters W_k identisch verschwindet, gilt

$$\int_{\partial B} \mathbf{K}_k \cdot d\mathbf{z} = \begin{cases} \int_{\gamma_{W_k}} \mathbf{K}_k \cdot d\mathbf{z} & (W_k \text{ ein Randfenster}) \\ 0 & (W_k \text{ ein inneres Fenster}) \end{cases}$$

(vgl. (b')) und

$$\int_B \text{rot } \mathbf{K}_k d\mu = \int_{B \cap W_k} \text{rot } \mathbf{K}_k d\mu.$$

Wir können den Index k im weiteren unterdrücken und haben demnach folgendes zu beweisen:

$$\int_{B \cap W} \text{rot } \mathbf{K} d\mu = \begin{cases} \int_{\gamma_W} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{z} & (W \text{ ein Randfenster}) \\ 0 & (W \text{ ein inneres Fenster}) \end{cases}; \quad (2)$$

dabei ist noch anzumerken, dass \mathbf{K} auf ∂W identisch verschwindet. Ist W ein inneres Fenster, so setzen wir $\phi(x) := -b$. Dann gilt in jedem Fall

$$B \cap W = \{(x, y) \mid -a \leq x \leq a, \phi(x) \leq y \leq b\}.$$

Wegen $\text{rot } \mathbf{K} = Q_x - P_y$ haben wir daher

$$\int_{B \cap W} \text{rot } \mathbf{K} d\mu = \int_{-a}^a \int_{\phi(x)}^b Q_x dy dx - \int_{-a}^a \int_{\phi(x)}^b P_y dy dx. \quad (3)$$

Die beiden Summanden rechts müssen getrennt behandelt werden. Einerseits ist

$$-\int_{\phi(x)}^b P_y dy = -P(x, b) + P(x, \phi(x)) = P(x, \phi(x)),$$

da P auf ∂W verschwindet. Damit wird

$$-\int_{-a}^a \int_{\phi(x)}^b P_y dy dx = \int_{-a}^a P(x, \phi(x)) dx .$$

Andererseits liefert die Leibnizsche Regel “mit Extras” (12.15):

$$\int_{\phi(x)}^b Q_x(x, y) dy = \frac{d}{dx} \left(\int_{\phi(x)}^b Q(x, y) dy \right) + Q(x, \phi(x))\phi'(x) .$$

Integrieren wir dies nach x von $-a$ bis a , so ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a \int_{\phi(x)}^b Q_x dy dx &= \int_{\phi(a)}^b Q(a, y) dy - \int_{\phi(-a)}^b Q(-a, y) dy \\ &\quad + \int_{-a}^a Q(x, \phi(x))\phi'(x) dx . \end{aligned}$$

Da \mathbf{K} auf ∂W verschwindet, sind hier die beiden ersten Summanden rechter Hand gleich 0. — Setzen wir die erhaltenen Teilergebnisse in (3) ein, so ergibt sich insgesamt:

$$\begin{aligned} \int_{B \cap W} \operatorname{rot} \mathbf{K} d\mu &= \int_{-a}^a \left(P(x, \phi(x)) \cdot 1 + Q(x, \phi(x))\phi'(x) \right) dx \\ &= \int_{\gamma_W} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{z} . \end{aligned}$$

Für ein Randfenster ist das schon (2). Ist W ein inneres Fenster, so ist \mathbf{K} längs $\gamma_W : x \mapsto (x, -b)$ identisch 0, und die rechte Seite ist trivialerweise gleich 0. ┘

Zulässige Bereiche

Mit (14.17) ist die Greensche Formel zum Beispiel für eine Ellipse mit zwei kreisförmigen Löchern oder den Bereich der Fig. 14.4.1 bewiesen, nicht aber für einen so einfachen Bereich wie ein Rechteck. Für die Gültigkeit der Greenschen Formel ist es nun in Wirklichkeit nicht notwendig, dass B glatt berandet ist: Es genügt, wenn sich B durch glatt berandete Bereiche approximieren lässt.

Eine kompakte Menge $B \subset \mathbb{R}^2$ heisst ein **zulässiger Bereich**, und der Zyklus $\sum_{j=1}^s \gamma_j =: \partial B$ heisst **Randzyklus** von B , wenn der folgende Sachverhalt zutrifft (siehe die Fig. 14.4.5):

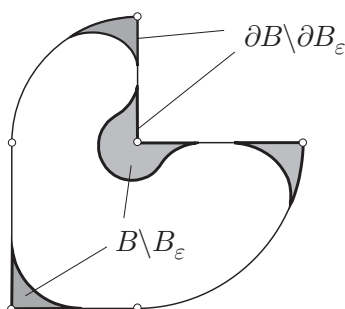


Fig. 14.4.5

- (I) Die Spuren der γ_j bilden zusammen die Randmenge von B .
 (II) Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es einen glatt berandeten Bereich $B^{(\varepsilon)} \subset B$ mit Randzyklus $\partial B^{(\varepsilon)}$ derart, dass das Mass der Differenz $B \setminus B^{(\varepsilon)}$ und die totale Länge der in die Differenz $\partial B - \partial B^{(\varepsilon)}$ eingehenden Kurven je $< \varepsilon$ sind.

Hiernach sind zum Beispiel beliebige polygonale Bereiche zulässig und besitzen einen Randzyklus, da sich die Ecken eines derartigen Bereiches durch die approximierenden $B^{(\varepsilon)}$ abrunden lassen.

- ① Der von den beiden logarithmischen Spiralen γ_+ , γ_- und dem Kreisbogen γ begrenzte Bereich der Fig. 14.4.11 besitzt den Randzyklus $\partial B = \gamma - \gamma_+ + \gamma_-$. ○

Die endgültige Fassung des Greenschen Satzes für ebene Bereiche lautet nunmehr:

(14.18) Es sei $\mathbf{K} = (P, Q)$ ein C^1 -Vektorfeld auf der offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, und es sei $B \subset \Omega$ ein zulässiger Bereich mit Randzyklus ∂B . Dann gilt

$$\int_{\partial B} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{z} = \int_B \operatorname{rot} \mathbf{K} \, d\mu,$$

oder, in Koordinaten ausgeschrieben:

$$\int_{\partial B} (P \, dx + Q \, dy) = \int_B (Q_x - P_y) \, d\mu.$$

In Worten: Die Zirkulation von \mathbf{K} längs ∂B ist gleich dem Integral der Wirbeldichte von \mathbf{K} über B .

□ Es gibt eine Konstante $M > 0$ mit

$$|\mathbf{K}(\mathbf{z})| \leq M, \quad |\operatorname{rot} \mathbf{K}(\mathbf{z})| \leq M \quad (\mathbf{z} \in B).$$

Ist jetzt ein $\varepsilon > 0$ vorgegeben und $B^{(\varepsilon)}$ ein glatt berandeter Bereich, der B wie verlangt approximiert, so gelten nach (14.1) und (13.18) die beiden Abschätzungen

$$\left| \int_{\partial B} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{z} - \int_{\partial B^{(\varepsilon)}} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{z} \right| \leq M \cdot L(\partial B - \partial B^{(\varepsilon)}) < M\varepsilon$$

und

$$\left| \int_B \operatorname{rot} \mathbf{K} d\mu - \int_{B^{(\varepsilon)}} \operatorname{rot} \mathbf{K} d\mu \right| \leq M \mu(B \setminus B^{(\varepsilon)}) < M\varepsilon.$$

Da die beiden auf $B^{(\varepsilon)}$ bezüglichen Integrale nach (14.17) übereinstimmen, folgt hieraus

$$\left| \int_{\partial B} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{z} - \int_B \operatorname{rot} \mathbf{K} d\mu \right| < 2M\varepsilon;$$

und da $\varepsilon > 0$ beliebig war, ergibt sich die Behauptung. ┘

② Es soll die Zirkulation des Feldes

$$\mathbf{K}(x, y) := (-x^2y + x^3, xy^2 - y^3)$$

um das Dreieck

$$\Delta := \{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 2\}$$

herum berechnet werden. — Man berechnet

$$\operatorname{rot} \mathbf{K} = Q_x - P_y = y^2 + x^2;$$

mit (14.18) und unter Ausnutzung der Symmetrie folgt daher

$$\begin{aligned} \int_{\partial \Delta} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{z} &= \int_{\Delta} (x^2 + y^2) d\mu = 2 \int_{\Delta} x^2 d\mu = 2 \int_0^2 \int_0^{2-x} x^2 dy dx \\ &= 2 \int_0^2 (2x^2 - x^3) dx = \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

○

Umlaufzahl

Wir betrachten das Gradientenfeld der Argumentfunktion:

$$\mathbf{A}(x, y) := \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right) \quad ((x, y) \neq (0, 0)).$$

Ist $U := \{(x, y) \mid x_0x + y_0y > 0\}$ eine beliebige offene Halbebene, $\phi(\cdot) : U \rightarrow \mathbb{R}$ ein stetiges Argument auf U und

$$\gamma : t \mapsto \mathbf{z}(t) \quad (a \leq t \leq b)$$

eine beliebige Kurve in U mit Anfangspunkt \mathbf{p} und Endpunkt \mathbf{q} , so folgt aus Satz (14.3):

$$\int_{\gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{z} = \phi(\mathbf{q}) - \phi(\mathbf{p});$$

in Worten: Das Integral

$$\int_{\gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{z} \quad (4)$$

misst die Zunahme des Arguments längs γ .

Es sei nun $\gamma = \sum_{j=1}^s \gamma_j$ eine beliebige Kurve oder gar Kette, die nicht durch den Ursprung geht. Wir dürfen annehmen, dass jedes

$$\gamma_j : t \mapsto \mathbf{z}_j(t) \quad (a_j \leq t \leq b_j)$$

in einer Halbebene U_j liegt. Dann gilt

$$\int_{\gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{z} = \sum_{j=1}^s \int_{\gamma_j} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{z} = \sum_{j=1}^s \left(\phi_j(\mathbf{z}(b_j)) - \phi_j(\mathbf{z}(a_j)) \right), \quad (5)$$

wobei $\phi_j : U_j \rightarrow \mathbb{R}$ ein stetiges Argument auf U_j darstellt. Wir sehen, dass sich das Integral (4) auch in diesem allgemeineren Fall als totale Zunahme des Arguments längs γ auffassen lässt.

Ist γ speziell ein Zyklus, so gibt es eine Permutation

$$\sigma : [1..s] \rightarrow [1..s], \quad j \mapsto j' := \sigma(j)$$

mit $\mathbf{z}_j(b_j) = \mathbf{z}_{j'}(a_{j'})$. Für die zugehörigen Posten in der Summe (5) gilt daher

$$\phi_j(\mathbf{z}(b_j)) - \phi_{j'}(\mathbf{z}(a_{j'})) \in 2\pi\mathbb{Z};$$

und folglich ist dann auch die Summe (5) ein ganzzahliges Vielfaches von 2π . Diese Feststellung legt folgende Definition nahe: Es sei γ ein beliebiger Zyklus in der Ebene, der nicht durch den Ursprung geht. Dann heisst die ganze Zahl

$$N(\gamma, \mathbf{0}) := \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{z}$$

die **Umlaufszahl von γ um $\mathbf{0}$** . Die Umlaufszahl um einen beliebigen Punkt $\mathbf{c} = (a, b)$, der nicht auf γ liegt, ist sinngemäss erklärt: Man definiert das Feld

$$\mathbf{A}_{\mathbf{c}}(x, y) := \left(-\frac{y-b}{(x-a)^2 + (y-b)^2}, \frac{x-a}{(x-a)^2 + (y-b)^2} \right)$$

und setzt

$$N(\gamma, \mathbf{c}) := \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \mathbf{A}_{\mathbf{c}} \cdot d\mathbf{z}. \quad (6)$$

Wir beweisen darüber:

(14.19) Der Randzyklus ∂B eines zulässigen Bereiches $B \subset \mathbb{R}^2$ hat um jeden inneren Punkt von B die Umlaufszahl 1, um jeden Punkt ausserhalb B die Umlaufszahl 0.

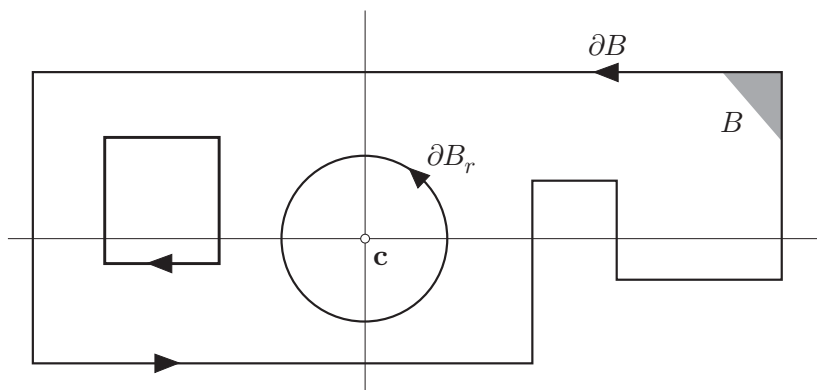


Fig. 14.4.6

□ Es sei zunächst \mathbf{c} ein Punkt im Äusseren von B ; wir können ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen: $\mathbf{c} := \mathbf{0}$. Dann ist das Feld \mathbf{A} in einer ganzen Umgebung von B stetig differenzierbar und überdies wirbelfrei, siehe Beispiel 14.3.②. Damit ergibt sich ohne weiteres

$$N(\partial B, \mathbf{c}) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial B} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{z} = \frac{1}{2\pi} \int_B \operatorname{rot} \mathbf{A} \, d\mu = 0.$$

Es sei jetzt $\mathbf{c} := \mathbf{0}$ ein innerer Punkt von B . Dann gibt es ein $r > 0$, so dass die abgeschlossene Kreisscheibe B_r um $\mathbf{0}$ noch ganz in B° liegt (Fig. 14.4.6). Die Differenzmenge $B' := B \setminus B_r^\circ$ ist ein zulässiger Bereich mit Randzyklus $\partial B' = \partial B - \partial B_r$, und der Nullpunkt liegt im Äusseren von B' . Nach dem schon Bewiesenen ist daher

$$N(\partial B, \mathbf{0}) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial B} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{z} = \frac{1}{2\pi} \left(\int_{\partial B'} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{z} + \int_{\partial B_r} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{z} \right) = 0 + 1 = 1,$$

wobei $N(\partial B_r, \mathbf{0}) = 1$ wohl unbestritten ist. □

Die Umlaufszahl ist ein überaus wichtiges Instrument in der komplexen Analysis. Sie erscheint dort in der Form

$$N(\gamma, c) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - c}.$$

Zu zeigen, dass dies mit (6) äquivalent ist, überlassen wir dem Leser als Aufgabe 7 dieses Abschnitts.

Flächenberechnung mit Hilfe von Randintegralen

Als nächstes behandeln wir die sogenannten **Flächenformeln**, die den Flächeninhalt eines zulässigen Bereiches B als Umlaufintegral darstellen. Diese Formeln sind vor allem dann hilfreich, wenn B durch eine Parameterdarstellung von ∂B festgelegt ist.

(14.20) Ist B ein zulässiger Bereich in der (x, y) -Ebene, so gilt

$$\mu(B) = \begin{cases} \int_{\partial B} x \, dy, \\ - \int_{\partial B} y \, dx, \\ \frac{1}{2} \int_{\partial B} (x \, dy - y \, dx). \end{cases}$$

□ Betrachte für ein festes $\alpha \in \mathbb{R}$ das Feld

$$(P(x, y), Q(x, y)) := (-\alpha y, (1 - \alpha)x)$$

mit der konstanten Rotation $\text{rot}(P, Q) = Q_x - P_y \equiv 1$. Die Greensche Formel (14.18) liefert in diesem Fall

$$\begin{aligned} \mu(B) &= \int_B \text{rot}(P, Q) \, d\mu = \int_{\partial B} (P \, dx + Q \, dy) \\ &= -\alpha \int_{\partial B} y \, dx + (1 - \alpha) \int_{\partial B} x \, dy. \end{aligned}$$

Setzt man rechter Hand nacheinander $\alpha := 0, 1, \frac{1}{2}$, so entstehen gerade die drei behaupteten Formeln. □

③ Die in der Fig. 14.4.7 dargestellte Kurve heisst **Descartessesches Blatt**; ihre Punkte genügen der Gleichung $x^3 + y^3 = 3axy$. Die Kurve lässt sich produzieren mit Hilfe der Parameterdarstellung

$$\left. \begin{aligned} x(t) &:= \frac{3at}{t^3 + 1} \\ y(t) &:= \frac{3at^2}{t^3 + 1} \end{aligned} \right\} \quad (-\infty \leq t \leq \infty),$$

wobei natürlich $x(\pm\infty) = y(\pm\infty) := 0$ gesetzt wird. Um den Flächeninhalt der zum Parameterintervall $[0, \infty]$ gehörigen Schleife B zu bestimmen, berechnen wir zunächst

$$x(t)y'(t) - x'(t)y(t) = x^2(t) \left(\frac{y(t)}{x(t)} \right)' = \frac{9a^2 t^2}{(t^3 + 1)^2} \cdot 1.$$

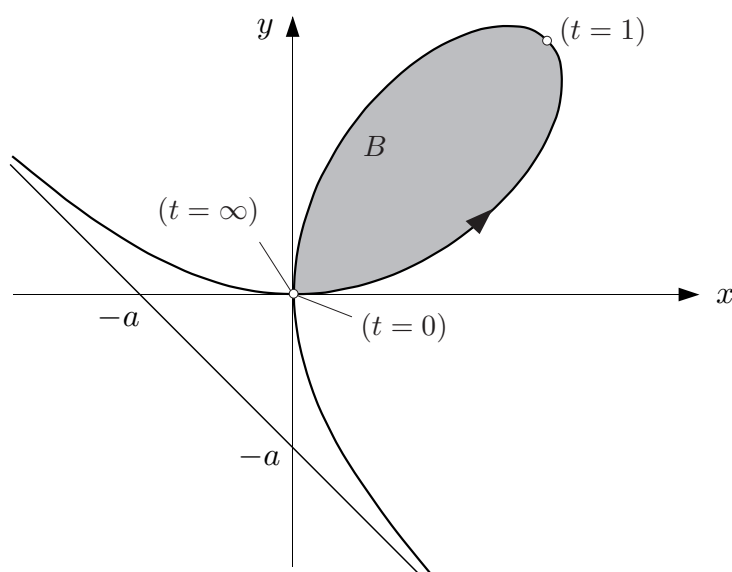


Fig. 14.4.7

Mit Hilfe der dritten Formel (14.20) erhalten wir dann

$$\begin{aligned}\mu(B) &= \frac{1}{2} \int_0^\infty (x(t)y'(t) - x'(t)y(t)) dt = \frac{3a^2}{2} \int_0^\infty \frac{3t^2}{(t^3+1)^2} dt \\ &= \frac{3a^2}{2} \int_1^\infty \frac{1}{u^2} du = \frac{3a^2}{2}.\end{aligned}$$

(Wenn wir hier ein unendliches Parameterintervall verwendet haben, so diente das nur zur Vereinfachung der Rechnung. Die Parametertransformation $t := (1 + \bar{t})/(1 - \bar{t})$ macht die Schleife zum Bild des \bar{t} -Intervalles $[-1, 1]$.)



Ein Umweg für ein Integral

Unsere vorläufig letzte Anwendung der Greenschen Formel gehört eigentlich zur Theorie der komplex differenzierbaren Funktionen in der z -Ebene, $z = x + iy$, und ist durch Trennung von Real- und Imaginärteil künstlich in die Vektoranalysis hinübergezogen worden. Es geht um den Wert von gewissen uneigentlichen Integralen, die in der Fourier-Analyse eine wichtige Rolle spielen.

In Beispiel 13.2.④ haben wir das Integral $\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx$ berechnet zu $\sqrt{\pi}$. Hieraus folgt ohne weiteres

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi}, \quad (7)$$

und dies ist der Fall $\lambda = 0$ der viel allgemeineren Formel

$$(14.21) \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} \cos(\lambda x) dx = \sqrt{2\pi} e^{-\lambda^2/2} \quad (\lambda \in \mathbb{R}),$$

die nun bewiesen werden soll.

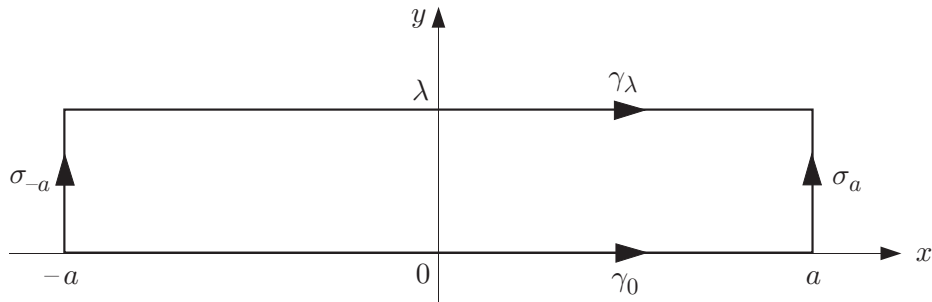


Fig. 14.4.8

Wir betrachten das Feld

$$(P, Q) := e^{(y^2-x^2)/2} (\cos(xy), \sin(xy))$$

in der (x, y) -Ebene. Wie man leicht verifiziert, ist

$$Q_x = P_y = (-x \sin(xy) + y \cos(xy)) e^{(y^2-x^2)/2}$$

und somit $\text{rot}(P, Q) \equiv 0$. Weiter fassen wir den Bereich B der Fig. 14.4.8 mit dem Randzyklus

$$\partial B = \gamma_0 + \sigma_a - \gamma_\lambda - \sigma_{-a}$$

ins Auge, wobei wir stillschweigend $a > 0$ und $\lambda \geq 0$ angenommen haben. Nach der Greenschen Formel ist

$$\int_{\partial B} (P dx + Q dy) = \int_B \text{rot}(P, Q) d\mu = 0$$

und folglich

$$\int_{\gamma_\lambda} P dx - \int_{\gamma_0} P dx = \int_{\sigma_a} Q dy - \int_{\sigma_{-a}} Q dy; \quad (8)$$

dabei haben wir Terme, die ohnehin keinen Beitrag liefern, unterdrückt: Längs

$$\gamma_\lambda : x \mapsto (x, \lambda) \quad (-a \leq x \leq a) \quad (9)$$

ist $dy = 0$, und längs den beiden Strecken

$$\sigma_{\pm a} : y \mapsto (\pm a, y) \quad (0 \leq y \leq \lambda) \quad (10)$$

ist $dx = 0$. Im weiteren benötigen wir von (8) nur die Abschätzung

$$\left| \int_{\gamma_\lambda} P dx - \int_{\gamma_0} P dx \right| \leq \left| \int_{\sigma_a} Q dy \right| + \left| \int_{\sigma_{-a}} Q dy \right|. \quad (11)$$

Die Darstellung (9) von γ_λ liefert

$$\int_{\gamma_\lambda} P dx = \int_{-a}^a e^{(\lambda^2 - x^2)/2} \cos(\lambda x) dx = e^{\lambda^2/2} \int_{-a}^a e^{-x^2/2} \cos(\lambda x) dx$$

(gilt auch für $\lambda = 0$). In ähnlicher Weise ergibt sich mit Hilfe von (10):

$$\int_{\sigma_{\pm a}} Q dy = \int_0^\lambda e^{(y^2 - a^2)/2} \sin(\pm ay) dy$$

und folglich

$$\left| \int_{\sigma_{\pm a}} Q dy \right| \leq \lambda e^{(\lambda^2 - a^2)/2}.$$

Damit erhalten wir anstelle von (11) die Abschätzung

$$\left| e^{\lambda^2/2} \int_{-a}^a e^{-x^2/2} \cos(\lambda x) dx - \int_{-a}^a e^{-x^2/2} dx \right| \leq 2\lambda e^{\lambda^2/2} e^{-a^2/2}$$

bzw.

$$\left| \int_{-a}^a e^{-x^2/2} \cos(\lambda x) dx - e^{-\lambda^2/2} \int_{-a}^a e^{-x^2/2} dx \right| \leq 2\lambda e^{-a^2/2}.$$

Wegen (7) folgt hieraus mit $a \rightarrow \infty$ die Behauptung. \square

Aufgaben

1. Berechne die folgenden Integrale zuerst als Linienintegrale, dann mit Hilfe der Greenschen Formel:

(a) $\int_{\partial B} (xy dx + x^2 dy)$, $B := \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^{2/3}\}$;

(b) $\int_{\partial B} (y dx + \sin x dy)$, $B := \{(x, y) \mid -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}, -1 \leq y \leq \cos x\}$.

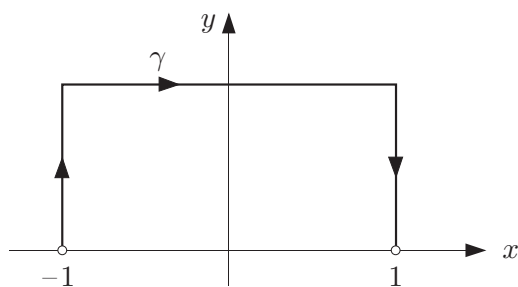


Fig. 14.4.9

2. In der (x, y) -Ebene wird das Vektorfeld

$$\mathbf{K}(x, y) := (3x^2 - 4xy + 4y^2, -2x^2 + 8xy + 12y^2)$$

betrachtet. Man berechne auf irgendeine Weise das Integral $\int_{\gamma} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{x}$ für den in der Figur 14.4.9 eingezeichneten Weg γ .

3. Skizziere die verlängerte Zykloide

$$\gamma: t \mapsto \begin{cases} x(t) := t - \frac{\pi}{2} \sin t \\ y(t) := 1 - \frac{\pi}{2} \cos t \end{cases} \quad (-\infty < t < \infty)$$

(vgl. Beispiel 13.5.④) und berechne den Flächeninhalt einer Schlinge.

4. Rollet ein Kreis auf einem anderen Kreis ab (die beiden Radien dürfen verschieden sein), so beschreibt ein fester Punkt auf der Peripherie des rollenden Kreises eine **Epizykloide**. Man bestimme eine Parameterdarstellung der in der Fig. 14.4.10 dargestellten Epizykloide γ und berechne den von γ eingeschlossenen Flächeninhalt.

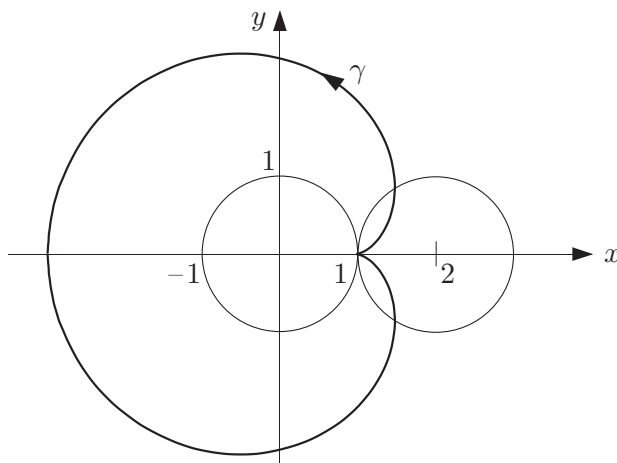


Fig. 14.4.10

5. Die n Punkte (x_k, y_k) , die Variable k modulo n genommen, bilden die links herum aufeinanderfolgenden Ecken eines ebenen n -Ecks P . Dann ist

$$\mu(P) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n x_k (y_{k+1} - y_{k-1}) .$$

6. Der Bereich B in der Fig. 14.4.11 wird begrenzt durch den Kreis vom Radius a mit Zentrum im Ursprung und durch die beiden logarithmischen Spiralen

$$\gamma_{\pm} : t \mapsto \begin{cases} x(t) := a e^{qt} \cos(t \pm \frac{\pi}{2}) \\ y(t) := a e^{qt} \sin(t \pm \frac{\pi}{2}) \end{cases} \quad (-\infty \leq t \leq 0); \quad q > 0 .$$

Berechne das Integral $\int_B y d\mu(x, y)$.

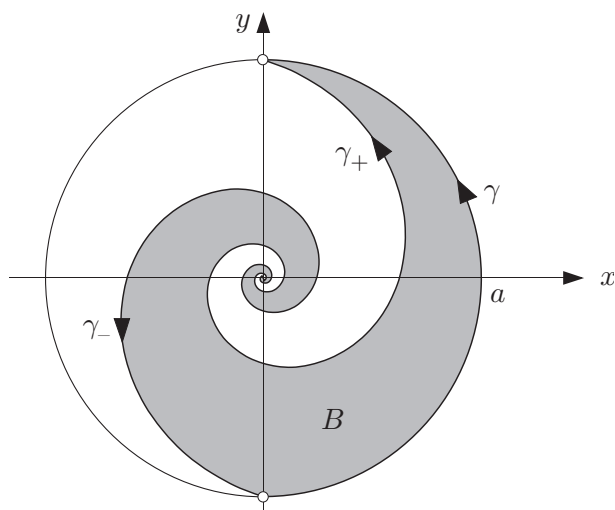


Fig. 14.4.11

7. Verifiziere, dass die sinngemäss interpretierte Formel

$$N(\gamma, c) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - c}$$

tatsächlich die Umlaufszahl 14.4.(6) des Zyklus γ um den Punkt c herum liefert.

14.5 Fluss und Divergenz

Strömungsfelder in der Ebene

Wir beginnen unsere Betrachtungen mit einem homogenen Strömungsfeld $\mathbf{v} = (P, Q)$ in der Ebene. Die Flüssigkeitsmenge, die pro Zeiteinheit die Verbindungsstrecke σ der beiden Punkte \mathbf{a} und $\mathbf{b} := \mathbf{a} + \mathbf{Z}$ in der einen oder in der anderen Richtung überströmt, füllt gerade das von \mathbf{v} und $\mathbf{Z} = (X, Y)$ aufgespannte Parallelogramm (Fig. 14.5.1) und besitzt demnach das (zweidimensionale) Volumen $|\varepsilon(\mathbf{v}, \mathbf{Z})|$. In der Folge nennt man die Grösse

$$\Phi := \varepsilon(\mathbf{v}, \mathbf{Z}) = \det \begin{bmatrix} P & X \\ Q & Y \end{bmatrix} = PY - QX \quad (1)$$

den **Fluss** von \mathbf{v} über σ . Der Fluss ist positiv, wenn \mathbf{v} die gerichtete Strecke σ von *links nach rechts* überquert, andernfalls negativ. Wir führen nun formal (das heisst: ohne physikalische Interpretation) den Vektor

$$*\mathbf{v} := (-Q, P)$$

ein, der gegenüber \mathbf{v} um 90° im Gegenuhrzeigersinn gedreht ist. Wir können damit den Fluss (1) auch wie folgt darstellen:

$$\Phi = *\mathbf{v} \cdot \mathbf{Z} . \quad (2)$$

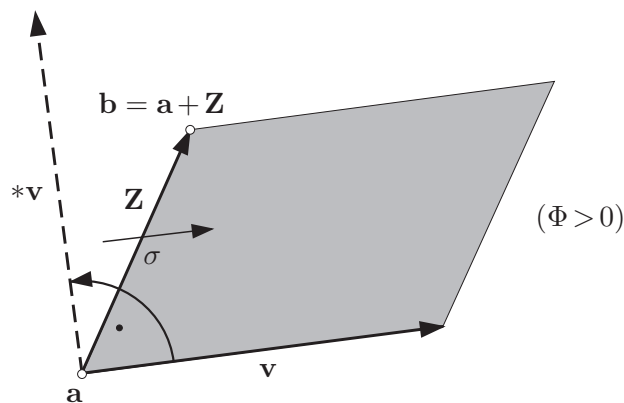


Fig. 14.5.1

Das Strömungsfeld $\mathbf{v} = (P, Q)$ sei jetzt variabel. Werden sämtliche Feldvektoren um 90° im Gegenuhrzeigersinn gedreht, so erhält man das **adjungierte Feld** $*\mathbf{v} := (-Q, P)$ mit demselben Definitionsbereich. Weiter sei eine C^1 -Kurve

$$\gamma: t \mapsto \mathbf{z}(t) = (x(t), y(t)) \quad (a \leq t \leq b) \quad (3)$$

in $\text{dom}(\mathbf{v})$ gegeben. Um eine Formel für den Fluss Φ von \mathbf{v} über die Kurve γ zu erhalten, betrachten wir eine hinreichend feine Teilung

$$T: \quad a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b$$

des Intervalls $[a, b]$ und setzen $\mathbf{z}(t_k) =: \mathbf{z}_k$ ($0 \leq k \leq N$). Dann lässt sich der fragliche Fluss nach (2) wie folgt approximieren (vgl. die Fig. 14.1.9):

$$\Phi \doteq \sum_{k=0}^{N-1} * \mathbf{v}(\mathbf{z}_k) \cdot (\mathbf{z}_{k+1} - \mathbf{z}_k) \doteq \sum_{k=0}^{N-1} * \mathbf{v}(\mathbf{z}(t_k)) \cdot \mathbf{z}'(t_k)(t_{k+1} - t_k).$$

Wir werden offenbar dazu geführt, diesen Fluss mit

$$\Phi := \int_a^b * \mathbf{v}(\mathbf{z}(t)) \cdot \mathbf{z}'(t) dt = \int_{\gamma} * \mathbf{v} \cdot d\mathbf{z}$$

zu veranschlagen.

Diese Überlegungen motivieren die folgende Definition: Es sei $\mathbf{v} = (P, Q)$ ein stetiges Vektorfeld auf der offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ und γ eine beliebige 1-Kette in Ω . Dann heisst die (parameterunabhängige) Grösse

$$\Phi := \int_{\gamma} * \mathbf{v} \cdot d\mathbf{z} = \int_{\gamma} (-Q dx + P dy)$$

der **Fluss von \mathbf{v} über die Kette γ** . Der Fluss hat ein Vorzeichen und ist an den Richtungssinn von γ geknüpft: Flüssigkeitsmengen, die γ von links nach rechts überqueren, werden positiv gezählt. Die konkrete Berechnung des Flusses Φ von $\mathbf{v} = (P, Q)$ über die Kurve (3) gestaltet sich wie folgt:

$$\Phi = \int_a^b \left(-Q(x(t), y(t))x'(t) + P(x(t), y(t))y'(t) \right) dt.$$

Ist γ der Randzyklus eines zulässigen Bereiches $B \subset \Omega$, so stellt Φ aufgrund der getroffenen Vorzeichenvereinbarungen den totalen aus B *heraustretenden* Fluss dar. Hieran schliessen sich die folgenden weiteren Überlegungen: Es sei $B \subset \Omega$ ein Rechtecksgebäude,

$$B := \bigcup_{j=1}^N Q_j,$$

die Q_j fast disjunkt. Der Fig. 14.5.2 entnimmt man

$$\Phi := \int_{\partial B} * \mathbf{v} \cdot d\mathbf{z} = \sum_{j=1}^N \int_{\partial Q_j} * \mathbf{v} \cdot d\mathbf{z} =: \sum_{j=1}^N \Phi(Q_j), \quad (4)$$

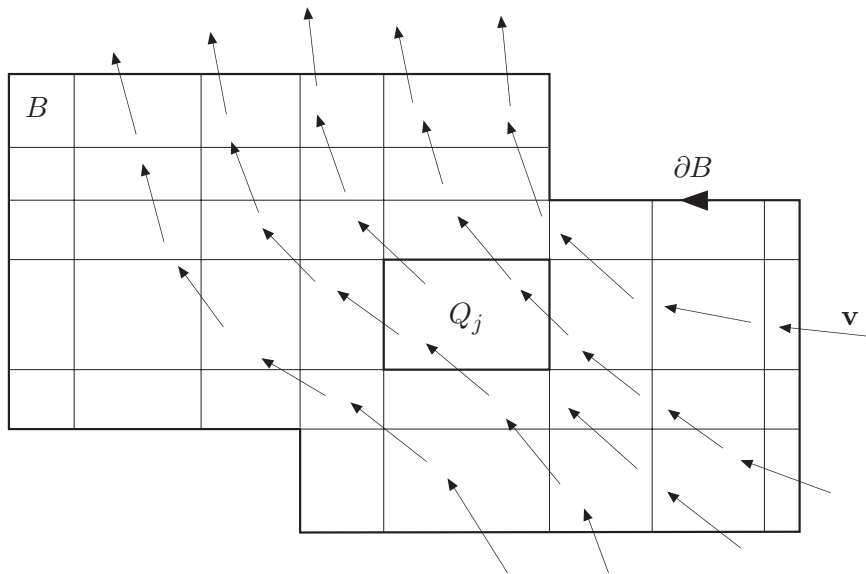


Fig. 14.5.2

denn die Beiträge der im Innern von B gelegenen Kanten der Q_j heben sich heraus. Die Beziehung (4) besagt, dass sich der gesamte aus B heraustretende Fluss additiv auf die einzelnen Q_j verteilen lässt. Physikalisch lässt sich das so interpretieren, dass in jedem Q_j pro Zeiteinheit eine gewisse Menge Flüssigkeit “produziert” oder “vernichtet” wird. Der von Q_j herrührende Beitrag $\Phi(Q_j)$ an den Gesamtfluss hängt nur vom Verhalten von \mathbf{v} auf Q_j ab. Ist \mathbf{v} zum Beispiel homogen (das heißt: konstant) auf Q_j , so ist trivialerweise $\Phi(Q_j) = 0$. Hieraus folgt: $\Phi(Q_j)$ hängt mit der Inhomogenität von \mathbf{v} auf Q_j zusammen, und diese wiederum kommt in den “Ableitungen” von \mathbf{v} zum Vorschein. Alles in allem erwarten wir eine Formel der folgenden Art:

$$\Phi := \int_{\partial B} * \mathbf{v} \cdot d\mathbf{z} = \int_B \text{“Quellstärke von } \mathbf{v} \text{”} \, d\mu$$

(vgl. 14.3.(2)). Nun gibt es aber schon eine derartige Formel, und zwar gilt sie für beliebige zulässige Bereiche B ! Wir haben ja den Fluss Φ des Strömungsfeldes \mathbf{v} als Zirkulation des adjungierten Feldes $*\mathbf{v}$ dargestellt, und das erlaubt, die Greensche Formel (14.18) ins Spiel zu bringen:

$$\Phi := \int_{\partial B} * \mathbf{v} \cdot d\mathbf{z} = \int_B \text{rot}(*\mathbf{v}) \, d\mu. \quad (5)$$

Nach Definition von $*\mathbf{v}$ und (14.11) ist aber

$$\text{rot}(*\mathbf{v}) = (P)_x - (-Q)_y = P_x + Q_y,$$

so dass wir für die angekündigte **Quellstärke** oder **Divergenz** des Feldes \mathbf{v} die folgende Formel erhalten:

$$\text{div } \mathbf{v} := P_x + Q_y \quad \left(= \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right).$$

Die Divergenz $\operatorname{div} \mathbf{v}$ ist ein Skalarfeld auf Ω . Der Wert $\operatorname{div} \mathbf{v}(x, y)$ stellt die lokale Produktionsintensität des Feldes \mathbf{v} an der Stelle (x, y) dar. Das ist, anschaulich ausgedrückt, die in der unmittelbaren Umgebung von (x, y) pro Zeiteinheit und Flächeneinheit produzierte bzw. vernichtete Flüssigkeitsmenge. — Alles in allem haben wir mit (5) den **Satz von Gauss für Vektorfelder in der Ebene** bewiesen. Er lautet:

(14.22) *Es sei \mathbf{v} ein C^1 -Vektorfeld auf der offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, und es sei $B \subset \Omega$ ein zulässiger Bereich mit Randzyklus ∂B . Dann gilt*

$$\int_{\partial B} * \mathbf{v} \cdot d\mathbf{z} = \int_B \operatorname{div} \mathbf{v} \, d\mu .$$

In Worten: Der aus B heraustretende Gesamtfluss ist gleich dem Integral der Quellstärke von \mathbf{v} über B .

Rein formal bringt der Satz von Gauss für die Ebene gegenüber der Greenschen Formel nichts Neues; nur die physikalische Interpretation ist anders.

Orientierung

Soviel zum zweidimensionalen Fall. Im Hinblick auf physikalische Anwendungen ist natürlich in erster Linie der dreidimensionale Fall von Interesse. Das weitere Programm ist nach dem Bisherigen vorgezeichnet: Wir benötigen

- (a) eine Formel für den Fluss eines Vektorfeldes durch eine (orientierte) Fläche im \mathbb{R}^3 ,
- (b) den Divergenzbegriff sowie eine Formel für $\operatorname{div} \mathbf{v}$ im \mathbb{R}^3 .

Damit werden wir dann (im nächsten Abschnitt) den zugehörigen Integralsatz, eben den eigentlichen Satz von Gauss, beweisen.

Es sei zunächst \mathbf{v} ein homogenes Strömungsfeld im \mathbb{R}^3 . Weiter betrachten wir ein von den beiden Vektoren \mathbf{X} und \mathbf{Y} aufgespanntes Parallelogramm P (siehe die Fig. 14.5.3). Die Flüssigkeitsmenge, die pro Zeiteinheit in der einen oder in der anderen Richtung durch das Parallelogramm strömt, füllt gerade das von den drei Vektoren \mathbf{X} , \mathbf{Y} und \mathbf{v} aufgespannte Parallelepipid und besitzt demnach das Volumen $|\varepsilon(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{v})|$. Wir zählen die betrachtete Flüssigkeitsmenge positiv, wenn die beiden Vektoren \mathbf{X} und \mathbf{Y} (in dieser Reihenfolge) mit \mathbf{v} eine Rechtsschraube bilden, in anderen Worten: wenn \mathbf{v} in denselben Halbraum bezüglich der Ebene von P zeigt wie der Normalenvektor

$$\mathbf{n} := \frac{\mathbf{X} \times \mathbf{Y}}{|\mathbf{X} \times \mathbf{Y}|} ,$$

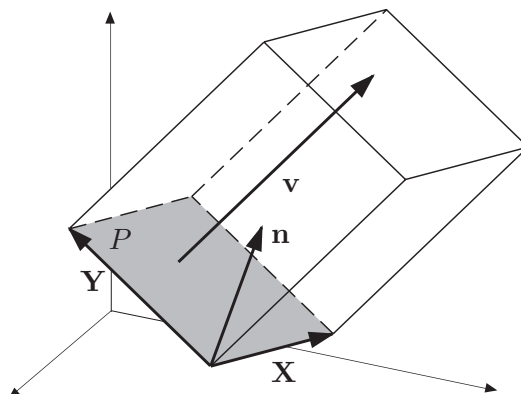


Fig. 14.5.3

und negativ im andern Fall. Dieser Vorzeichenregelung entspricht folgende endgültige Formel für den Fluss Φ des Feldes \mathbf{v} durch das (orientierte, s.u.) Parallelogramm P :

$$\Phi := \varepsilon(\mathbf{v}, \mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \mathbf{v} \cdot (\mathbf{X} \times \mathbf{Y}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \omega(P), \quad (6)$$

wobei $\omega(P)$ den Flächeninhalt von P bezeichnet.

Das Strömungsfeld \mathbf{v} sei jetzt variabel, und anstelle des Parallelogramms P sei eine kompakte 2-Fläche $S \subset \text{dom}(\mathbf{v})$ gegeben. In jedem regulären Flächenpunkt \mathbf{x} gibt es eine wohlbestimmte Flächennormale $T_{\mathbf{x}}S^{\perp}$ und damit genau zwei (entgegengesetzt gleiche) Normaleneinheitsvektoren $\mathbf{n}', \mathbf{n}'' \in T_{\mathbf{x}}$. Ist in allen regulären Punkten $\mathbf{x} \in S$ ein Vektor $\mathbf{n} := \mathbf{n}(\mathbf{x}) \in \{\mathbf{n}', \mathbf{n}''\}$ so ausgewählt, dass \mathbf{n} stetig von \mathbf{x} abhängt (und nicht plötzlich umschlägt), so heisst S **orientiert**. Man kann sich dann auf Parameterdarstellungen

$$\mathbf{f}: B \rightarrow S, \quad (u_1, u_2) \mapsto \mathbf{x} := \mathbf{f}(u_1, u_2) \quad (7)$$

(bzw. “Koordinatenpflaster”) beschränken, für die gilt:

$$\mathbf{n} = \mathbf{n}(\mathbf{u}) := \frac{\mathbf{f}_{,1} \times \mathbf{f}_{,2}}{|\mathbf{f}_{,1} \times \mathbf{f}_{,2}|}. \quad (8)$$

Es gibt auch **nichtorientierbare Flächen**; am bekanntesten ist das sogenannte **Möbiusband** (Fig. 14.5.4). Wird ein Normalenvektor \mathbf{n} , ausgehend von der Lage $\mathbf{n}(\mathbf{x}_0) =: \mathbf{n}_0$, als Vektor $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ längs einer Kurve stetig dem Band entlang bewegt, so ist die Endlage nach einem vollen Umlauf gleich $-\mathbf{n}_0$. Nichtorientierbare Flächen müssen von den folgenden Betrachtungen ausgeschlossen werden.

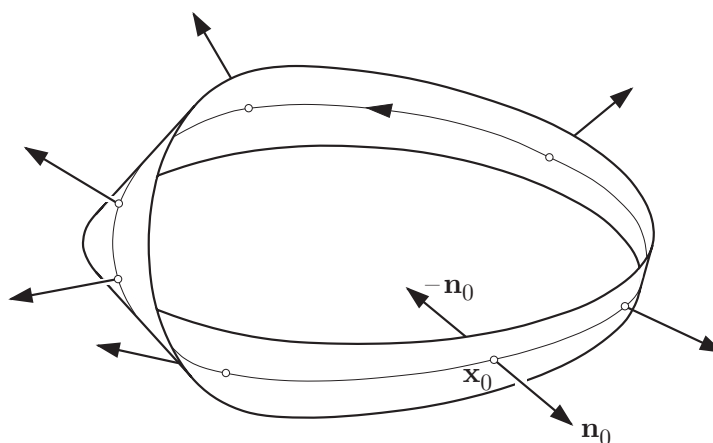


Fig. 14.5.4

Fluss durch eine orientierte Fläche

Wir nehmen also an, die Fläche S (Fig. 14.5.5) sei gegeben durch (7) und orientiert durch (8). Einem kleinen, von den beiden Vektoren $\rho \mathbf{e}_1, \rho \mathbf{e}_2$ aufgespannten Quadrat $Q \subset B$ entspricht auf S ein kleines, schwach gekrümmtes "Parallelogramm" mit Zentrum $\mathbf{f}(\mathbf{p})$, das von den beiden Vektoren

$$\mathbf{X} := d\mathbf{f}(\mathbf{p}) \cdot (\rho \mathbf{e}_1) = \rho \mathbf{f}_1(\mathbf{p}), \quad \mathbf{Y} := d\mathbf{f}(\mathbf{p}) \cdot (\rho \mathbf{e}_2) = \rho \mathbf{f}_2(\mathbf{p})$$

aufgespannt wird. Aufgrund von (6) beträgt der Fluss von \mathbf{v} durch dieses "Parallelogramm" ungefähr

$$\varepsilon(\mathbf{v}, \rho \mathbf{f}_1, \rho \mathbf{f}_2) = \varepsilon(\mathbf{v}, \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2) \mu(Q),$$

und damit erhalten wir für den Fluss von \mathbf{v} durch die ganze Fläche S den Näherungswert

$$\sum_{j=1}^N \varepsilon(\mathbf{v}(\mathbf{f}(\mathbf{p}_j)), \mathbf{f}_1(\mathbf{p}_j), \mathbf{f}_2(\mathbf{p}_j)) \mu(Q_j);$$

dabei ist $\bigcup_{j=1}^N Q_j$ ein Quadratgebäude, das den Parameterbereich B in geeigneter Weise approximiert.

Das Resultat unserer Überlegungen rechtfertigt die folgende Definition: Es seien \mathbf{v} ein stetiges Vektorfeld auf der offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ und S eine kompakte orientierte Fläche in Ω . Ist S dargestellt durch (7) und orientiert durch (8), so heisst das Integral

$$\begin{aligned} \Phi &:= \int_B \varepsilon(\mathbf{v}(\mathbf{f}(\mathbf{u})), \mathbf{f}_1(\mathbf{u}), \mathbf{f}_2(\mathbf{u})) d\mu(\mathbf{u}) \\ &= \int_B \mathbf{v}(\mathbf{f}(\mathbf{u})) \cdot (\mathbf{f}_1 \times \mathbf{f}_2)_\mathbf{u} d\mu(\mathbf{u}) \end{aligned} \quad (9)$$

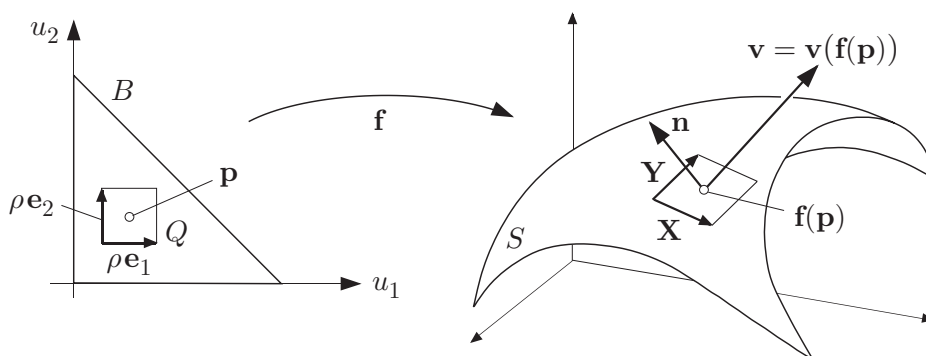


Fig. 14.5.5

der **Fluss von \mathbf{v} durch die orientierte Fläche S** . Für den so definierten Fluss verwenden wir die suggestiven Schreibweisen

$$\int_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\omega, \quad \int_S \mathbf{v} \cdot d\boldsymbol{\omega},$$

(vgl. (6)), die nicht auf eine bestimmte Parameterdarstellung von S Bezug nehmen. Dabei bezeichnet

$$d\omega := |\mathbf{f}_{,1}(\mathbf{u}) \times \mathbf{f}_{,2}(\mathbf{u})| \, d\mu(\mathbf{u})$$

das schon in Abschnitt 13.5 eingeführte skalare Oberflächenelement und neu

$$d\boldsymbol{\omega} := \mathbf{n} \, d\omega = (\mathbf{f}_{,1}(\mathbf{u}) \times \mathbf{f}_{,2}(\mathbf{u})) \, d\mu(\mathbf{u})$$

das sogenannte **vекториelle Oberflächenelement**. Wie erwartet, ist nämlich das Flussintegral gegenüber zulässigen Parametertransformationen 13.5.(1) invariant, wobei in dem vorliegenden Zusammenhang nur Parametertransformationen

$$\psi: A \rightarrow B, \quad \bar{\mathbf{u}} \mapsto \mathbf{u} := \psi(\bar{\mathbf{u}})$$

mit nichtnegativer Funktionaldeterminante zugelassen sind.

□ Ist die weitere Darstellung $\bar{\mathbf{f}}: A \rightarrow S$ mit \mathbf{f} verknüpft durch

$$\bar{\mathbf{f}}(\bar{\mathbf{u}}) = \mathbf{f}(\psi(\bar{\mathbf{u}})) \quad (\bar{\mathbf{u}} \in A),$$

so folgt mit der Kettenregel (12.13):

$$\bar{\mathbf{f}}_{,1} = \mathbf{f}_{,1}\psi_{1,1} + \mathbf{f}_{,2}\psi_{2,1}, \quad \bar{\mathbf{f}}_{,2} = \mathbf{f}_{,1}\psi_{1,2} + \mathbf{f}_{,2}\psi_{2,2}$$

und hieraus nach den Rechenregeln für das Vektorprodukt:

$$\bar{\mathbf{f}}_{,1} \times \bar{\mathbf{f}}_{,2} = (\psi_{1,1}\psi_{2,2} - \psi_{2,1}\psi_{1,2}) (\mathbf{f}_{,1} \times \mathbf{f}_{,2}) = J_\psi (\mathbf{f}_{,1} \times \mathbf{f}_{,2}). \quad (10)$$

Bezeichnet also $\bar{\Phi}$ den mit $\bar{\mathbf{f}}$ berechneten Fluss, so erhält man mit Satz (13.36) und nach Voraussetzung über das Vorzeichen von J_ψ :

$$\begin{aligned}\bar{\Phi} &= \int_A \mathbf{v}(\bar{\mathbf{f}}(\bar{\mathbf{u}})) \cdot (\bar{\mathbf{f}}_1 \times \bar{\mathbf{f}}_2)_{\bar{\mathbf{u}}} d\mu(\bar{\mathbf{u}}) \\ &= \int_A \mathbf{v}(\mathbf{f}(\psi(\bar{\mathbf{u}}))) \cdot (\mathbf{f}_1 \times \mathbf{f}_2)_{\psi(\bar{\mathbf{u}})} J_\psi(\bar{\mathbf{u}}) d\mu(\bar{\mathbf{u}}) \\ &= \int_B \mathbf{v}(\mathbf{f}(\mathbf{u})) \cdot (\mathbf{f}_1 \times \mathbf{f}_2)_{\mathbf{u}} d\mu(\mathbf{u}) = \Phi .\end{aligned}\quad \lrcorner$$

Die Voraussetzung über das Vorzeichen von J_ψ ist wesentlich. Der Gleichung (10) entnimmt man, dass $\bar{\mathbf{f}}_1 \times \bar{\mathbf{f}}_2$ die zu $\mathbf{f}_1 \times \mathbf{f}_2$ entgegengesetzte Orientierung induziert, falls J_ψ negativ ist. Der mit $\bar{\mathbf{f}}$ berechnete Fluss erhält dann das falsche Vorzeichen.

Wir beweisen noch die folgende Abschätzung:

(14.23) *Besitzt die kompakte Fläche $S \subset \mathbb{R}^3$ den Flächeninhalt $\omega(S)$ und ist $|\mathbf{v}(\mathbf{x})| \leq M$ für alle $\mathbf{x} \in S$, so gilt*

$$\left| \int_S \mathbf{v} \cdot d\boldsymbol{\omega} \right| \leq M \cdot \omega(S) .$$

□ Mit Hilfe der Schwarzschen Ungleichung ergibt sich nacheinander

$$\begin{aligned}\left| \int_S \mathbf{v} \cdot d\boldsymbol{\omega} \right| &\leq \int_B |\mathbf{v}(\mathbf{f}(\mathbf{u})) \cdot (\mathbf{f}_1 \times \mathbf{f}_2)_{\mathbf{u}}| d\mu(\mathbf{u}) \\ &\leq \int_B |\mathbf{v}(\mathbf{f}(\mathbf{u}))| \cdot |(\mathbf{f}_1 \times \mathbf{f}_2)_{\mathbf{u}}| d\mu(\mathbf{u}) \\ &\leq M \int_B |\mathbf{f}_1(\mathbf{u}) \times \mathbf{f}_2(\mathbf{u})| d\mu(\mathbf{u}) = M \cdot \omega(S) .\end{aligned}\quad \lrcorner$$

① Die konkrete Berechnung eines Flussintegrals (9) ist im allgemeinen ziemlich aufwändig: Man muss die Parameterdarstellung \mathbf{f} von S in das gegebene Vektorfeld \mathbf{v} einsetzen, weiter das Vektorprodukt $\mathbf{f}_1(\mathbf{u}) \times \mathbf{f}_2(\mathbf{u})$ bilden und schliesslich ein zweifaches Integral ausrechnen. In vielen Fällen liegt aber eine geometrische Situation vor, die eine wesentliche Vereinfachung der Rechnung erlaubt — so in dem folgenden Beispiel:

Es soll der Fluss des Feldes

$$\mathbf{v}(x, y, z) := (y^2 - 2xz, x^2 + yz, x^2 + y^2 - z^2)$$

durch den von unten nach oben orientierten Einheitskreis der (x, y) -Ebene berechnet werden. Diese Fläche besitzt die “natürliche” Parameterdarstellung

$$\mathbf{f} : B_{2,1} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (x, y) \mapsto (x, y, 0)$$

mit dem anschaulich evidenten Oberflächenelement

$$d\boldsymbol{\omega} = \mathbf{n} d\omega = (0, 0, 1) d\mu(x, y).$$

Weiter ist $\mathbf{v}(\mathbf{f}(x, y)) = (y^2, x^2, x^2 + y^2)$, so dass sich insgesamt der folgende Rechenablauf ergibt:

$$\int_S \mathbf{v} \cdot d\boldsymbol{\omega} = \int_{B_{2,1}} (0+0+(x^2+y^2)) d\mu(x, y) = \int_{B_{2,1}} r^2 d\mu = 2\pi \int_0^1 r^3 dr = \frac{\pi}{2}.$$

○

Divergenz

Wir wenden uns nunmehr der Divergenz zu. Es sei also \mathbf{v} ein C^1 -Vektorfeld auf der offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Betrachte einen festen Punkt $\mathbf{p} \in \Omega$ und ein kleines, von den Vektoren $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3$ aufgespanntes Parallelepiped $P \subset \mathcal{T}_{\mathbf{p}}$ mit Mittelpunkt \mathbf{p} (Fig. 14.5.6); dabei wollen wir

$$\varepsilon(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3) = \mu(P) > 0 \tag{11}$$

annehmen. Um Vorstellungen zu fixieren, denken wir uns ein $\varepsilon > 0$ vorgegeben und wählen P so klein, dass für alle Punkte $\mathbf{x} \in P$ die Abschätzung

$$\|d\mathbf{v}(\mathbf{x}) - L\| \leq \varepsilon, \quad L := d\mathbf{v}(\mathbf{p}),$$

zutrifft. Nach dem Mittelwertsatz (12.19) gilt dann

$$\mathbf{v}(\mathbf{x} + \mathbf{X}) - \mathbf{v}(\mathbf{x}) = L \cdot \mathbf{X} + \varepsilon |\mathbf{X}| \Theta,$$

sobald die beiden Punkte \mathbf{x} und $\mathbf{x} + \mathbf{X}$ in P liegen; dabei berufen wir uns auf die Θ -Vereinbarung: Θ bezeichnet immer ein Objekt vom Betrag ≤ 1 , allerdings nicht immer dasselbe. — Die auftretenden Indexvariablen sind modulo 3 zu verstehen und durchlaufen die Menge \mathbb{Z}_3 .

Es soll nun der gesamte durch die Oberfläche ∂P aus P heraustretende Fluss von \mathbf{v} berechnet werden. Hierzu bezeichne S_k die von \mathbf{X}_{k+1} und \mathbf{X}_{k+2} aufgespannte “Bodenfläche” und S'_k die zugehörige “Deckfläche”. Auf S'_k ist die Orientierung von ∂P gegeben durch

$$\mathbf{n}_k := \frac{\mathbf{X}_{k+1} \times \mathbf{X}_{k+2}}{|\mathbf{X}_{k+1} \times \mathbf{X}_{k+2}|},$$

auf S_k durch $-\mathbf{n}_k$ (siehe die Figur). Wir können dann folgende Rechnung aufmachen:

$$\begin{aligned}
 \int_{\partial P} \mathbf{v} \cdot d\boldsymbol{\omega} &= \sum_k \int_{S'_k} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_k d\omega - \sum_k \int_{S_k} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_k d\omega \\
 &= \sum_k \int_{S_k} (\mathbf{v}(\mathbf{x} + \mathbf{X}_k) - \mathbf{v}(\mathbf{x})) \cdot \mathbf{n}_k d\omega \\
 &= \sum_k \int_{S_k} (L \cdot \mathbf{X}_k + \varepsilon |\mathbf{X}_k| \Theta) \cdot \mathbf{n}_k d\omega \\
 &= \sum_k \left(\varepsilon(L \cdot \mathbf{X}_k, \mathbf{X}_{k+1}, \mathbf{X}_{k+2}) + \varepsilon |\mathbf{X}_k| \omega(S_k) \Theta \right) \\
 &= \sum_k \varepsilon(L \cdot \mathbf{X}_k, \mathbf{X}_{k+1}, \mathbf{X}_{k+2}) + 3\varepsilon |\mathbf{X}_1| |\mathbf{X}_2| |\mathbf{X}_3| \Theta. \quad (12)
 \end{aligned}$$

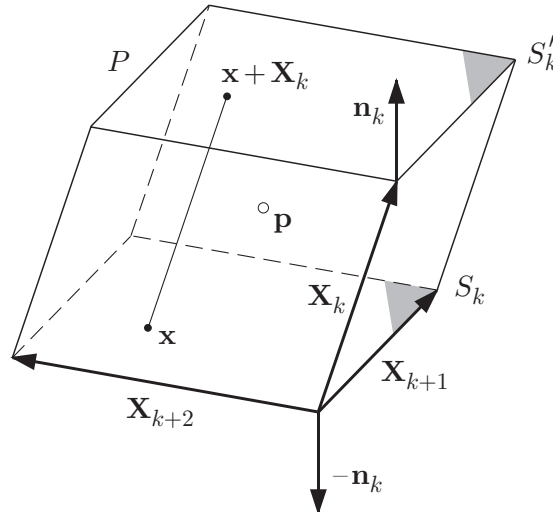


Fig. 14.5.6

Die drei Kantenlängen $|\mathbf{X}_k|$ sind höchstens gleich dem Durchmesser $|P|$ des betrachteten Parallelepipeds. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, können wir daher aus (12) den folgenden Schluss ziehen:

$$\int_{\partial P} \mathbf{v} \cdot d\boldsymbol{\omega} = \sum_k \varepsilon(L \cdot \mathbf{X}_k, \mathbf{X}_{k+1}, \mathbf{X}_{k+2}) + o(|P|^3) \quad (|P| \rightarrow 0). \quad (13)$$

Hier ist der ‘‘Hauptteil’’ eine gewisse schiefe trilineare Funktion der drei Vektorvariablen $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3$ und somit ein konstantes Vielfaches der Determinantenfunktion $\varepsilon(\cdot, \cdot, \cdot)$. Die betreffende Konstante wird mit $\text{div } \mathbf{v}(\mathbf{p})$ bezeichnet

und heisst **Divergenz** oder **Quellstärke** von \mathbf{v} an der Stelle \mathbf{p} . Es gilt also identisch in $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3$ die Gleichung

$$\sum_k \varepsilon(d\mathbf{v}(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{X}_k, \mathbf{X}_{k+1}, \mathbf{X}_{k+2}) = \operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{p}) \varepsilon(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3). \quad (14)$$

Wegen (11) verwandelt sich damit (13) in die suggestive Formel

$$(14.24) \quad \int_{\partial P} \mathbf{v} \cdot d\boldsymbol{\omega} = \operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{p}) \mu(P) + o(|P|^3) \quad (|P| \rightarrow 0).$$

In Worten: Für kleine Parallelepipede P mit Mittelpunkt \mathbf{p} ist der Fluss von \mathbf{v} aus P heraus in erster Näherung proportional zum Volumen von P . Der Proportionalitätsfaktor (die lokale “Produktionsintensität”) ist die Quellstärke $\operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{p})$.

Für das praktische Rechnen müssen wir die Divergenz durch die partiellen Ableitungen der Komponenten von \mathbf{v} ausdrücken. Wir beweisen:

(14.25) Sind (x_1, x_2, x_3) bzw. (x, y, z) beliebige zulässige Koordinaten im \mathbb{R}^3 , so ist die Divergenz eines C^1 -Vektorfeldes

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = (v_1(x_1, x_2, x_3), v_2(x_1, x_2, x_3), v_3(x_1, x_2, x_3))$$

bzw. $\mathbf{v}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ gegeben durch

$$\operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \quad \text{bzw.} \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

□ Wegen (14) erhält man nacheinander

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{v} &= \operatorname{div} \mathbf{v} \cdot \varepsilon(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = \sum_k \varepsilon(d\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_{k+1}, \mathbf{e}_{k+2}) \\ &= \sum_k \mathbf{v}_{.k} \cdot (\mathbf{e}_{k+1} \times \mathbf{e}_{k+2}) = \sum_k \mathbf{v}_{.k} \cdot \mathbf{e}_k = \sum_k v_{k.k}. \quad \square \end{aligned}$$

Wie wir in (14.10) bzw. (14.15)(b) gesehen haben, sind Gradientenfelder wirbelfrei. Man kann das auch mit den Operatoren ausdrücken: $\operatorname{rot} \circ \nabla = 0$. “Dual” dazu ist die folgende Aussage:

(14.26) Ist \mathbf{K} ein C^2 -Vektorfeld auf der offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, so gilt

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{K}(\mathbf{x}) \equiv 0.$$

Anders ausgedrückt: Es ist $\operatorname{div} \circ \operatorname{rot} = 0$.

□ Man hat

$$(\mathbf{rot} \mathbf{K})_i = \frac{\partial K_{i+2}}{\partial x_{i+1}} - \frac{\partial K_{i+1}}{\partial x_{i+2}}$$

und folglich

$$\operatorname{div} \mathbf{rot} \mathbf{K} = \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} (\mathbf{rot} \mathbf{K})_i = \sum_i \left(\frac{\partial^2 K_{i+2}}{\partial x_i \partial x_{i+1}} - \frac{\partial^2 K_{i+1}}{\partial x_{i+2} \partial x_i} \right) = 0. \quad \square$$

Aufgaben

1. Finde und beweise dabei koordinatenfreie Identitäten der Form

(a) $\operatorname{div}(f \mathbf{v}) = \dots$,

(b) $\operatorname{div}(\mathbf{K} \times \mathbf{L}) = \dots$,

(c) $\operatorname{div}(f \mathbf{rot} \mathbf{K}) = \dots$

für C^1 -Skalarfunktionen und C^2 -Vektorfelder im \mathbb{R}^3 .

2. Bestimme die quellenfreien Zentralfelder in der Ebene und im Raum. Es soll also gelten

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \kappa(r) \frac{\mathbf{x}}{r} \quad (r := |\mathbf{x}| \neq 0), \quad \operatorname{div} \mathbf{v} \equiv 0.$$

3. Es sei \mathbf{v} ein (kugelsymmetrisches) Zentralfeld im \mathbb{R}^3 mit Zentrum im Punkt $(0, 0, -1)$, dessen Feldstärke mit der dritten Potenz des Abstandes vom Zentrum abnimmt, und es sei $\mathbf{v}(0, 0, 0) := (0, 0, 1)$. Berechne den Fluss von \mathbf{v} von unten nach oben durch die (x, y) -Ebene.

4. Berechne den Fluss des Vektorfeldes

$$\mathbf{v}(x, y, z) := (2y^2 - z^2, x^2 - y^2 + 2z^2, 1 + x^2 z^2)$$

in Richtung der positiven y -Achse durch das Quadrat mit den Eckpunkten $(\pm 1, 0, \pm 1)$.

14.6 Der Satz von Gauss

Die Formel (14.24) verknüpft den Fluss eines Feldes \mathbf{v} aus einem “infinitesimalen” Parallelepiped heraus mit dem Wert von $\operatorname{div} \mathbf{v}$ im Innern dieses Parallelepipeds. Diesen Zusammenhang wollen wir nun auch in “integraler” Form darstellen, und zwar für möglichst allgemeine dreidimensionale Bereiche. Als Leitfaden benutzen wir die Herleitung der Greenschen Formel (14.18). Insbesondere verwenden wir wieder eine Zerlegung der Einheit, um die globale Gestalt der betrachteten Bereiche nicht im einzelnen beschreiben und rechnerisch erfassen zu müssen.

Glatt berandete Bereiche

Wir definieren zunächst: Eine kompakte Menge $B \subset \mathbb{R}^3$ heisst ein **glatt berandeter Bereich**, wenn es eine orientierte Fläche S gibt, so dass folgendes zutrifft (siehe die Fig. 14.6.1):

- (I) Als Punktmenge stimmt S überein mit der Randmenge von B .
- (II) Zu jedem Randpunkt \mathbf{p} von B gibt es zulässige Koordinaten (x, y, z) mit Ursprung in \mathbf{p} , einen Quader $W := [-a, a] \times [-b, b] \times [-c, c]$ mit Grundfläche $W' := [-a, a] \times [-b, b]$ und eine C^1 -Funktion $\phi : W' \rightarrow [-c, c]$ derart, dass
 - (a) der in W liegende Teil von B gegeben ist durch

$$B \cap W = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in W', -c \leq z \leq \phi(x, y)\}$$

und

- (b) der in W liegende Teil von S übereinstimmt mit dem nach oben orientierten Graphen von ϕ .

Die Bedingung (b) ist eine anschauliche Umschreibung des eigentlich intendierten Sachverhalts

- (b') Für Vektorfelder \mathbf{v} auf B , die ausserhalb W identisch verschwinden, gilt

$$\int_S \mathbf{v} \cdot d\boldsymbol{\omega} = \int_{S_W} \mathbf{v} \cdot d\boldsymbol{\omega},$$

wobei sich S_W in der Form

$$\mathbf{f} : W' \rightarrow W, \quad (x, y) \mapsto (x, y, \phi(x, y)) \quad (1)$$

darstellen lässt und durch

$$\mathbf{f}_x \times \mathbf{f}_y = (1, 0, \phi_x) \times (0, 1, \phi_y) = (-\phi_x, -\phi_y, 1) \quad (2)$$

nach oben orientiert ist.

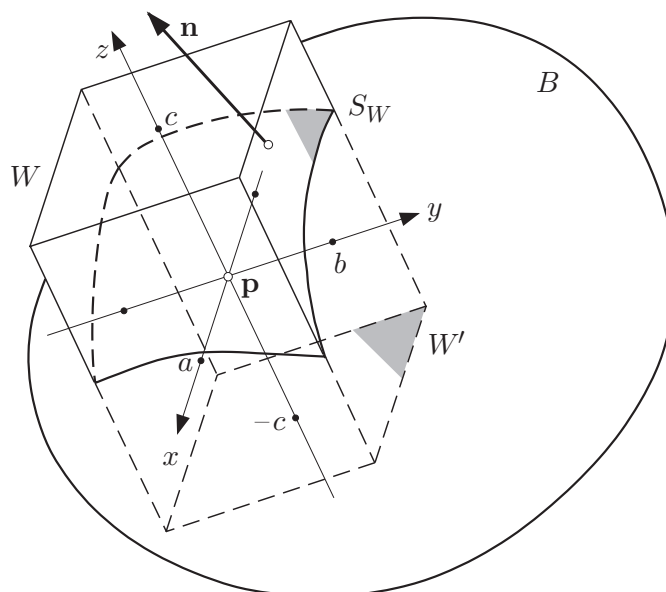


Fig. 14.6.1

Wir nennen S die **Oberfläche** des Bereiches B und schreiben dafür ∂B . Die Oberfläche ist definitionsgemäss *nach aussen* orientiert.

① Die Vollkugel

$$B_{3,R} := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$$

ist ein glatt berandeter Bereich. Ihre Oberfläche ist die nach aussen orientierte 2-Sphäre S_R^2 (vgl. Beispiel 12.7.④).

Ist $a > b > 0$, so stellt

$$B := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \left(\sqrt{x^2 + y^2} - a \right)^2 + z^2 \leq b^2 \right\} \quad (3)$$

einen **Volltorus** dar (Fig. 13.5.8 rechts). Dieser Volltorus ist glatt berandet, und zwar ist 13.5.(16) eine reguläre Parameterdarstellung der Oberfläche $\partial B = T$. Aus 13.5.(17) ergibt sich, dass $\mathbf{f}_\phi \times \mathbf{f}_\theta$ nach aussen zeigt; somit induziert die gewählte Reihenfolge der Variablen ϕ und θ gerade die hier verlangte Orientierung. \circ

Wir kommen damit zum Satz von Gauss, zunächst für glatt berandete Bereiche:

(14.27) Es sei \mathbf{v} ein C^1 -Vektorfeld auf der offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, und es sei $B \subset \Omega$ ein glatt berandeter Bereich mit nach aussen orientierter Oberfläche ∂B . Dann gilt

$$\int_{\partial B} \mathbf{v} \cdot d\boldsymbol{\omega} = \int_B \operatorname{div} \mathbf{v} \, d\mu .$$

□ Jeder innere Punkt von B ist Mittelpunkt eines Quaders, der noch ganz in B° liegt, und jeder Randpunkt von B ist Mittelpunkt eines Quaders gemäss (II), der noch ganz in Ω liegt. Wir denken uns für jeden Punkt $\mathbf{x} \in B$ einen Quader $W_{\mathbf{x}}$ des einen oder andern Typs festgelegt. Die Familie $(W_{\mathbf{x}} \mid \mathbf{x} \in B)$ ist ein Umgebungsfeld auf B . Nach Satz (14.16) gibt es daher endlich viele Quader $W_j := W_{\mathbf{x}_j}$ ($1 \leq j \leq N$) mit

$$B \subset \bigcup_{j=1}^N W_j^\circ$$

und eine zugehörige Zerlegung der Einheit $(\psi_j \mid 1 \leq j \leq N)$. Setzen wir

$$\psi_j \mathbf{v} =: \mathbf{v}_j \quad (1 \leq j \leq N),$$

so gilt in einer Umgebung von B die Identität

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) \equiv \sum_{j=1}^N \mathbf{v}_j(\mathbf{x}).$$

Es genügt daher, die behauptete Formel für jedes einzelne \mathbf{v}_j zu beweisen. Da \mathbf{v}_j ausserhalb des Quaders W_j identisch verschwindet, gilt

$$\int_{\partial B} \mathbf{v}_j \cdot d\boldsymbol{\omega} = \begin{cases} \int_{S_{W_j}} \mathbf{v}_j \cdot d\boldsymbol{\omega} & (W_j \text{ ein Randquader}) \\ 0 & (W_j \text{ ein innerer Quader}) \end{cases}$$

(vgl. (b')) und

$$\int_B \operatorname{div} \mathbf{v}_j d\mu = \int_{B \cap W_j} \operatorname{div} \mathbf{v}_j d\mu.$$

Wir können den Index j im weiteren unterdrücken und haben demnach folgendes zu beweisen:

$$\int_{B \cap W} \operatorname{div} \mathbf{v} d\mu = \begin{cases} \int_{S_W} \mathbf{v} \cdot d\boldsymbol{\omega} & (W \text{ ein Randquader}) \\ 0 & (W \text{ ein innerer Quader}) \end{cases}; \quad (4)$$

dabei ist noch anzumerken, dass \mathbf{v} auf ∂W identisch verschwindet. Ist W ein innerer Quader, so setzen wir $\phi(x, y) := c$. Dann gilt in jedem Fall

$$B \cap W = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in W', -c \leq z \leq \phi(x, y)\}.$$

Wir schreiben $\mathbf{v} = (P, Q, R)$; dann ist $\operatorname{div} \mathbf{v} = P_x + Q_y + R_z$ und folglich

$$\int_{B \cap W} \operatorname{div} \mathbf{v} d\mu = \int_{W'} \int_{-c}^{\phi(x, y)} (P_x + Q_y + R_z) dz d\mu(x, y). \quad (5)$$

Die drei Summanden rechts müssen einzeln behandelt werden. Einerseits ist

$$\int_{-c}^{\phi(x,y)} R_z dz = R(x, y, \phi(x, y)) - R(x, y, -c) = R(x, y, \phi(x, y)),$$

da R auf ∂W verschwindet. Wegen (1) ergibt sich daher

$$\begin{aligned} \int_{W'} \int_{-c}^{\phi(x,y)} R_z dz d\mu(x, y) &= \int_{W'} R(x, y, \phi(x, y)) d\mu(x, y) \\ &= \int_{W'} R(\mathbf{f}(x, y)) d\mu(x, y). \end{aligned}$$

Andererseits liefert die Leibnizsche Regel “mit Extras” (12.15):

$$\int_{-c}^{\phi(x,y)} P_x(x, y, z) dz = \frac{d}{dx} \left(\int_{-c}^{\phi(x,y)} P(x, y, z) dz \right) - P(x, y, \phi(x, y)) \cdot \phi_x.$$

Integrieren wir dies nach x von $-a$ bis a und berücksichtigen wir, dass P auf ∂W verschwindet, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a \int_{-c}^{\phi(x,y)} P_x(x, y, z) dz dx &= \int_{-c}^{\phi(a,y)} P(a, y, z) dz - \int_{-c}^{\phi(-a,y)} P(-a, y, z) dz \\ &\quad - \int_{-a}^a P(x, y, \phi(x, y)) \cdot \phi_x dx \\ &= \int_{-a}^a P(x, y, \phi(x, y)) \cdot (-\phi_x) dx. \end{aligned}$$

Dies integrieren wir zum Schluss nach y von $-b$ bis b und erhalten

$$\begin{aligned} \int_{W'} \int_{-c}^{\phi(x,y)} P_x(x, y, z) dz d\mu(x, y) &= \int_{W'} P(x, y, \phi(x, y)) \cdot (-\phi_x) d\mu(x, y) \\ &= \int_{W'} P(\mathbf{f}(x, y)) \cdot (-\phi_x) d\mu(x, y). \end{aligned}$$

Eine ganz analoge Formel ergibt sich für den Beitrag von Q_y . — Tragen wir die erhaltenen Teilergebnisse in (5) ein, so ergibt sich unter Berücksichtigung von (2):

$$\begin{aligned} &\int_{B \cap W} \operatorname{div} \mathbf{v} d\mu \\ &= \int_{W'} \left(P(\mathbf{f}(x, y)) \cdot (-\phi_x) + Q(\mathbf{f}(x, y)) \cdot (-\phi_y) + R(\mathbf{f}(x, y)) \cdot 1 \right) d\mu(x, y) \\ &= \int_{W'} \mathbf{v}(\mathbf{f}(x, y)) \cdot (\mathbf{f}_x \times \mathbf{f}_y)_{(x,y)} d\mu(x, y) \\ &= \int_{S_W} \mathbf{v} \cdot d\boldsymbol{\omega}. \end{aligned}$$

Für einen Randquader ist das schon (4). Ist W ein innerer Quader, so ist \mathbf{v} auf $S_W : (x, y) \mapsto (x, y, c)$ identisch $\mathbf{0}$, und die rechte Seite hat trivialerweise den Wert 0. ┘

Der Satz von Gauss für zulässige Bereiche

Mit (14.27) ist der Satz von Gauss für eine Kugel oder einen Volltorus (siehe Beispiel ①) bewiesen, nicht aber für einen so einfachen Bereich wie einen Quader. (Für Quader gibt es natürlich einen besonders einfachen direkten Beweis.) In Wirklichkeit ist es wie bei der Greenschen Formel nicht notwendig, dass B glatt berandet ist: Es genügt, wenn sich B durch glatt berandete Bereiche approximieren lässt.

Eine kompakte Menge $B \subset \mathbb{R}^3$ heisst ein **zulässiger Bereich**, und die orientierte kompakte Fläche ∂B heisst **Oberfläche von B** , wenn ∂B als Punktmenge mit der Randmenge von B übereinstimmt und wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ einen glatt berandeten Bereich $B^{(\varepsilon)} \subset B$ mit nach aussen orientierter Oberfläche $\partial B^{(\varepsilon)}$ gibt, so dass der folgende Sachverhalt zutrifft:

- (I) Das Mass der Differenz $B \setminus B^{(\varepsilon)}$ ist $< \varepsilon$.
- (II) Die Flächen ∂B und $\partial B^{(\varepsilon)}$ unterscheiden sich um eine Fläche $S^{(\varepsilon)}$ vom Inhalt $\omega(S^{(\varepsilon)}) < \varepsilon$ und sind im übrigen gleich orientiert.

Hiernach sind zum Beispiel beliebige Polyeder zulässige Bereiche, da sich ihre Kanten und Ecken durch die approximierenden $B^{(\varepsilon)}$ abrunden lassen. Die Oberfläche eines zulässigen Bereiches besitzt in "fast allen" Punkten eine wohlbestimmte Tangentialebene und eine nach aussen weisende Normale, siehe die Fig. 14.6.2.

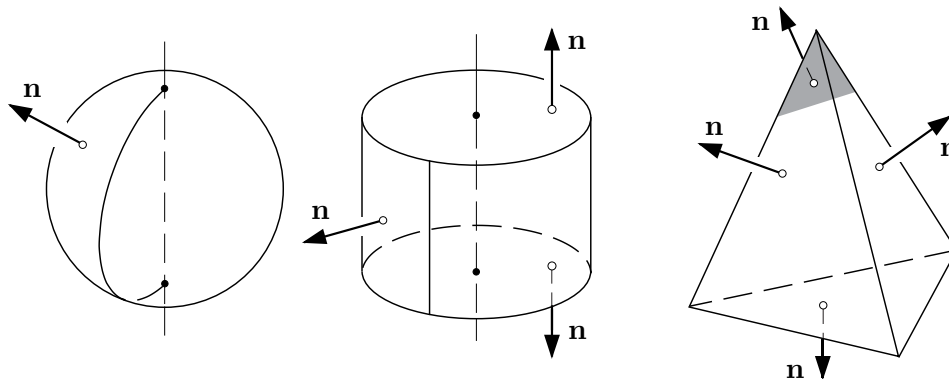


Fig. 14.6.2

Die endgültige Fassung des **Satzes von Gauss für räumliche Bereiche** lautet nunmehr:

(14.28) Es sei \mathbf{v} ein C^1 -Vektorfeld auf der offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, und es sei $B \subset \Omega$ ein zulässiger Bereich mit nach aussen orientierter Oberfläche ∂B . Dann gilt

$$\int_{\partial B} \mathbf{v} \cdot d\boldsymbol{\omega} = \int_B \operatorname{div} \mathbf{v} \, d\mu .$$

In Worten: Der insgesamt durch die Oberfläche ∂B heraustretende Fluss ist gleich dem Integral der Quellstärke über B .

□ Es gibt eine Konstante $M > 0$ mit

$$|\mathbf{v}(\mathbf{x})| \leq M, \quad |\operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{x})| \leq M \quad (\mathbf{x} \in B) .$$

Ist jetzt ein $\varepsilon > 0$ vorgegeben und $B^{(\varepsilon)} \subset B$ ein glatt berandeter Bereich, der B wie verlangt approximiert, so gelten nach (14.23) und (13.18) die beiden Abschätzungen

$$\left| \int_{\partial B} \mathbf{v} \cdot d\boldsymbol{\omega} - \int_{\partial B^{(\varepsilon)}} \mathbf{v} \cdot d\boldsymbol{\omega} \right| \leq M \omega(S^{(\varepsilon)}) < M \varepsilon$$

und

$$\left| \int_B \operatorname{div} \mathbf{v} \, d\mu - \int_{B^{(\varepsilon)}} \operatorname{div} \mathbf{v} \, d\mu \right| \leq M \mu(B \setminus B^{(\varepsilon)}) < M \varepsilon .$$

Da die beiden auf $B^{(\varepsilon)}$ bezüglichen Integrale nach (14.27) übereinstimmen, folgt hieraus

$$\left| \int_{\partial B} \mathbf{v} \cdot d\boldsymbol{\omega} - \int_B \operatorname{div} \mathbf{v} \, d\mu \right| < 2M \varepsilon ;$$

und da $\varepsilon > 0$ beliebig war, ergibt sich die Behauptung. □

Anwendungen des Satzes von Gauss

② Es gibt eine zu (14.20) analoge Formel für das Volumen eines dreidimensionalen Bereiches:

$$\mu(B) = \frac{1}{3} \int_{\partial B} \mathbf{x} \cdot d\boldsymbol{\omega} .$$

Zum Beweis genügt es, den Satz von Gauss auf das spezielle Feld $\mathbf{v}(\mathbf{x}) := \mathbf{x}$ anzuwenden. Für dieses Feld ist $\operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{x}) \equiv 3$.

Um das Volumen des in Beispiel ① betrachteten Volltorus (3) zu berechnen, wenden wir den Satz von Gauss auf das Feld $\mathbf{v}(x, y, z) := (0, 0, z)$ an. Es ist $\operatorname{div} \mathbf{v} \equiv 1$; somit ergibt sich

$$\mu(B) = \int_B \operatorname{div} \mathbf{v} \, d\mu = \int_{\partial B} \mathbf{v} \cdot d\boldsymbol{\omega} .$$

Zur Berechnung des Flussintegrals verwenden wir die Darstellung 13.5.(15) der Torusfläche und erhalten wegen 13.5.(16):

$$\begin{aligned}\mu(B) &= \int_{[0,2\pi] \times [0,2\pi]} (0, 0, z(\phi, \theta)) \cdot (\mathbf{f}_\phi \times \mathbf{f}_\theta) d\mu(\phi, \theta) \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} b \sin \theta \cdot (a + b \cos \theta) b \sin \theta d\theta d\phi \\ &= 2\pi^2 a b^2 .\end{aligned}$$

○

③ Die Abläufe in einem strömenden Medium (Flüssigkeit oder Gas) lassen sich mit Hilfe von zwei Funktionen ρ und \mathbf{v} beschreiben: $\rho(\mathbf{x}, t)$ bezeichnet die Dichte des Mediums an der Stelle $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ zur Zeit t und $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ die Geschwindigkeit der Masseteilchen an der Stelle \mathbf{x} zur Zeit t . Die räumlichen und zeitlichen Änderungsraten dieser Funktionen sind aneinander gekoppelt durch eine gewisse partielle Differentialgleichung, die wir nun herleiten wollen. Wir gehen davon aus, dass in dem strömenden Medium weder Masse produziert noch Masse vernichtet wird. Wenn also insgesamt Masse aus einem Raumbereich herausströmt, so muss dabei die Dichte ρ im Inneren dieses Bereiches entsprechend abnehmen. Es geht nun darum, diesen Sachverhalt auch quantitativ richtig zu erfassen und in einer prägnanten Formel zum Ausdruck zu bringen.

Das strömende Medium erfüllt ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Es sei $B \subset \Omega$ ein "Probereich", der für den Moment festgehalten wird und sich nicht mit der Strömung mitbewegt. Die gesamte zur Zeit t in B enthaltene Masse $M(t)$ ist gegeben durch

$$M(t) = \int_B \rho(\mathbf{x}, t) d\mu(\mathbf{x}) .$$

Die Leibnizsche Regel (11.14) gilt natürlich auch für mehrfache Integrale. Die zeitliche Änderungsrate dieser Masse berechnet sich daher folgendermaßen:

$$M'(t) = \int_B \rho_t(\mathbf{x}, t) d\mu(\mathbf{x}) . \quad (6)$$

Die Veränderung der in B enthaltenen Masse ergibt sich aus dem Zu- und Wegströmen von Masseteilchen durch die Oberfläche ∂B . Quantitativ ausgedrückt: Die Änderungsrate von $M(\cdot)$ ist gleich dem "Massenfluss" durch ∂B :

$$-M'(t) = \int_{\partial B} (\rho \mathbf{v}) \cdot d\boldsymbol{\omega} ;$$

dabei haben wir berücksichtigt, dass nach aussen fließende Masse eine Abnahme von M zur Folge hat. Wenden wir auf das letzte Integral den Satz von Gauss an, so ergibt sich

$$-M'(t) = \int_B \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) d\mu ,$$

zusammen mit (6) also:

$$\int_B (\rho_t + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v})) d\mu = 0. \quad (7)$$

Diese Beziehung gilt für jeden Probebereich $B \subset \Omega$. Stellen wir uns B als transportables kleines Kügelchen vor, so kommen wir auf die Vermutung, dass der Integrand notwendigerweise identisch verschwindet. Dies ist in der Tat der Fall; es gilt nämlich das folgende Lemma:

(14.29) *Ist $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion auf der offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und ist das Integral $\int_B f d\mu$ für jede Vollkugel $B \subset \Omega$ gleich 0, so ist $f(\mathbf{x}) \equiv 0$ auf Ω .*

□ Betrachte einen festen Punkt $\mathbf{p} \in \Omega$. Zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ gibt es eine Kugel $B \subset \Omega$ mit Mittelpunkt \mathbf{p} und positivem Radius, so dass für alle $\mathbf{x} \in B$ gilt: $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{p})| \leq \varepsilon$. Nach Voraussetzung über f ist

$$f(\mathbf{p})\mu(B) = \int_B (f(\mathbf{p}) - f(\mathbf{x})) d\mu(\mathbf{x});$$

wir haben daher

$$|f(\mathbf{p})|\mu(B) \leq \int_B |f(\mathbf{p}) - f(\mathbf{x})| d\mu(\mathbf{x}) \leq \varepsilon \mu(B).$$

Hieraus folgt $|f(\mathbf{p})| \leq \varepsilon$; und da sowohl $\varepsilon > 0$ wie $\mathbf{p} \in \Omega$ beliebig waren, ergibt sich die Behauptung. □

Wir können daher aus (7) den folgenden Schluss ziehen:

$$\forall \mathbf{x}, \forall t: \quad \rho_t + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (8)$$

Dies ist das erste Grundgesetz der Hydrodynamik, die sogenannte **Kontinuitätsgleichung**. Ist das Medium inkompressibel, was bei Flüssigkeiten im allgemeinen angenommen werden darf, so ist ρ räumlich und zeitlich konstant. Die Gleichung (8) lautet dann einfach

$$\forall \mathbf{x}, \forall t: \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0.$$

In Worten: Das Strömungsfeld einer inkompressiblen Flüssigkeit ist divergenzfrei. (*Hinweis:* Die Operatoren ∇ , div , **rot** und Δ (s.u.) wirken nur auf die Raumvariablen.) ○

Der Laplace-Operator

Nach Satz (14.15)(b) ist $\operatorname{rot} \nabla f \equiv \mathbf{0}$ für jede C^2 -Funktion f , und nach Satz (14.26) ist $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{K} \equiv 0$ für jedes C^2 -Vektorfeld \mathbf{K} . Die Zusammensetzung

$$\operatorname{div} \circ \nabla =: \Delta \quad (9)$$

hingegen ist nicht trivial, im Gegenteil: Der **Laplace-Operator** Δ ist eigentlich der wichtigste von allen und für die ganze Analysis fundamental. Allgemein ist Δf für zweimal stetig differenzierbare Funktionen $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$\Delta f := \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}.$$

Dies stimmt für $n = 3$ überein mit (9); in der (x, y) -Ebene ist natürlich

$$\Delta f := f_{xx} + f_{yy}.$$

Ist $\Delta f \equiv 0$, so heisst die betrachtete Funktion f **harmonisch**.

④ Die nur von $r := |\mathbf{x}|$ abhängige Funktion

$$g(\mathbf{x}) := \begin{cases} -\log r & (n = 2) \\ \frac{1}{r^{n-2}} & (n > 2) \end{cases}$$

ist (kugelsymmetrisch und) harmonisch im punktierten Raum $\dot{\mathbb{R}}^n$.

┌ Wir betrachten nur den Fall $n > 2$. Mit Hilfe der Ableitungsregel

$$\frac{\partial r}{\partial x_k} = \frac{x_k}{r} \quad (1 \leq k \leq n)$$

ergibt sich nacheinander

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x_k} &= \frac{-(n-2)}{r^{n-1}} \frac{x_k}{r} = -(n-2)x_k r^{-n}, \\ \frac{\partial^2 g}{\partial x_k^2} &= -(n-2) \left(r^{-n} + x_k (-n) r^{-n-1} \frac{x_k}{r} \right) = -\frac{n-2}{r^{n+2}} (r^2 - n x_k^2). \end{aligned}$$

Dies ist nun über k zu summieren. Dabei liefert die letzte Klammer den Wert $n r^2 - n \sum_{k=1}^n x_k^2 = 0$, wie behauptet. ┐

○

Welche Information über die gegebene Funktion f wird durch Δf ausgedrückt? In anderen Worten: Welches ist die intuitive (geometrische, physikalische, ...) Interpretation von Δf ? Um dieser Frage nachzugehen, bezeichnen wir mit B_r die n -dimensionale Vollkugel vom Radius r und mit S_r deren $(n-1)$ -dimensionale Oberfläche. Es ist $\mu(B_r) = \kappa_n r^n$, wobei κ_n das in Beispiel 13.2.⑤ berechnete Volumen der n -dimensionalen Einheitskugel darstellt. Wir bezeichnen den Flächeninhalt von S_r mit $\omega(S_r)$ und haben dann aufgrund geometrischer Anschauung die für kleine positive h gültige Näherung

$$\mu(B_{r+h}) - \mu(B_r) = \mu(B_{r+h} \setminus B_r) \doteq \omega(S_r) \cdot h .$$

Hieraus ergibt sich (vgl. auch die Aufgaben 13.5.9 und 10):

$$\omega(S_r) = \frac{d}{dr} \mu(B_r) = n\kappa_n r^{n-1} . \quad (10)$$

Wir beweisen nunmehr:

(14.30) Die Funktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sei in der Umgebung des Punktes \mathbf{p} zweimal stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\Delta f(\mathbf{p}) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{2n}{r^2} \cdot \frac{1}{\omega(S_r)} \int_{S_r} (f(\mathbf{p} + \mathbf{X}) - f(\mathbf{p})) d\omega(\mathbf{X}) .$$

In Worten: $\Delta f(\mathbf{p})$ ist bis auf einen Skalierungsfaktor gleich dem mittleren Mehrwert von f in den Punkten rund um \mathbf{p} gegenüber dem Wert von f an der Stelle \mathbf{p} .

□ Nach Satz (12.23) gilt für $\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{0}$ die Approximation

$$f(\mathbf{p} + \mathbf{X}) - f(\mathbf{p}) = \sum_i f_{.i} X_i + \frac{1}{2} \sum_{i,k} f_{.ik} X_i X_k + o(|X|^2) ; \quad (11)$$

dabei bezeichnen $f_{.i}$ und $f_{.ik}$ partielle Ableitungen an der Stelle \mathbf{p} , sind also Konstante. Wird (11) über die Sphäre $S_r \subset \mathcal{T}_{\mathbf{p}}$ integriert, so ergibt sich unter Berücksichtigung von (10) die Formel

$$\int_{S_r} (f(\mathbf{p} + \mathbf{X}) - f(\mathbf{p})) d\omega(\mathbf{X}) = \frac{1}{2} \sum_i f_{.ii} \int_{S_r} X_i^2 d\omega(\mathbf{X}) + o(r^{2+(n-1)}) \quad (r \rightarrow 0) ;$$

denn alle anderen Terme in (11) sind bezüglich mindestens einer Variablen ungerade und liefern daher aus Symmetriegründen keinen Beitrag ans Integral. Die Integrale $\int_{S_r} X_i^2 d\omega(\mathbf{X})$ haben alle denselben Wert

$$\int_{S_r} X_i^2 d\omega(\mathbf{X}) = \frac{1}{n} \int_{S_r} \sum_{k=1}^n X_k^2 d\omega(\mathbf{X}) = \frac{r^2}{n} \omega(S_r) \quad (1 \leq i \leq n) .$$

Damit erhalten wir

$$\int_{S_r} (f(\mathbf{p} + \mathbf{X}) - f(\mathbf{p})) d\omega(\mathbf{X}) = \frac{r^2}{2n} \omega(S_r) \Delta f(\mathbf{p}) + o(r^{n+1}) \quad (r \rightarrow 0).$$

Wird dies nach $\Delta f(\mathbf{p})$ aufgelöst, so ergibt sich wegen $r^2 \omega(S_r) = n \kappa_n r^{n+1}$ die behauptete Formel

$$\Delta f(\mathbf{p}) = \frac{2n}{r^2} \cdot \frac{1}{\omega(S_r)} \int_{S_r} (f(\mathbf{p} + \mathbf{X}) - f(\mathbf{p})) d\omega(\mathbf{X}) + o(1) \quad (r \rightarrow 0). \quad \square$$

Die Wärmeleitungsgleichung

⑤ Im folgenden geht es um die Wärmeleitung in einem homogenen ruhenden Medium. Das Medium erfülle ein gewisses Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, wobei wir annehmen, dass sich im Innern von Ω keine wärmeerzeugenden oder wärmevernichtenden Vorgänge abspielen. Hingegen wird durch Wärmeleitung Wärme innerhalb Ω verschoben, was mit der Zeit zu einem Ausgleich der Temperatur führt, wenn nicht durch thermische Einwirkung von aussen (das heisst: durch die Oberfläche von Ω) ein Temperaturgradient aufrechterhalten wird. Da aber nichts Sichtbares mit wohldefinierter Geschwindigkeit strömt, liegt *a priori* kein Strömungsfeld \mathbf{v} vor, und wir müssen neuartige Überlegungen anstellen, um den "Wärmestrom" in den Griff zu bekommen.

Das Temperaturgeschehen in dem betrachteten Medium lässt sich mit einer einzigen Funktion u erfassen: Der Funktionswert $u(\mathbf{x}, t)$ stellt die Temperatur an der Stelle $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ zur Zeit t dar. Oft beschränkt man sich auf den **stationären** Fall, bei dem die Temperatur nur von \mathbf{x} abhängt. Die unter dem Regime der Wärmeleitung sich einstellenden räumlichen und zeitlichen Änderungsraten der Funktion u sind aneinander gekoppelt durch eine gewisse partielle Differentialgleichung, die wir nun herleiten wollen.

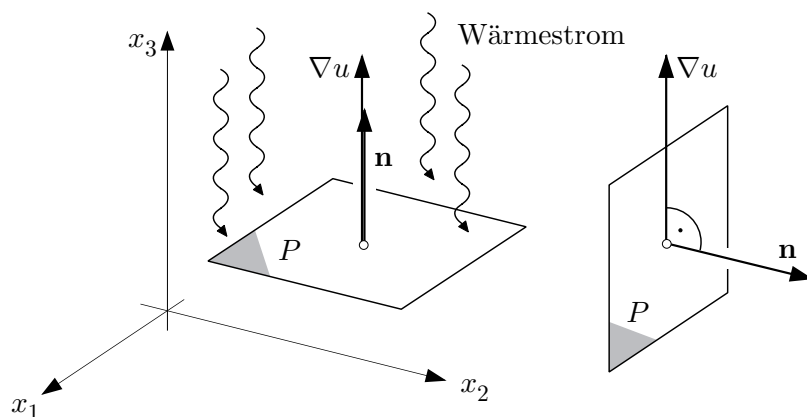


Fig. 14.6.3

Wir betrachten zunächst eine besonders einfache Modellsituation, siehe die Fig. 14.6.3: Die Temperatur hänge nur von x_3 ab und nehme linear mit x_3 zu:

$$u(\mathbf{x}, t) := u_0 + \eta x_3 .$$

Die Konstante $\eta > 0$ stellt die Temperaturzunahme pro Längeneinheit dar und ist gleich dem Betrag des Temperaturgradienten $\nabla u = (0, 0, \eta)$. Es sei $P \subset \mathbb{R}^3$ eine zunächst horizontale Parallelogrammfläche, die wir uns nach oben orientiert denken. Es liegt nahe, den **Wärmefluss** $\Phi(P)$ — gemeint ist die Wärmemenge, die pro Zeiteinheit das Parallelogramm in Richtung $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$ durchströmt — wie folgt zu veranschlagen:

$$\Phi(P) = -k \eta \omega(P) .$$

Dabei ist k eine Materialkonstante, die **Wärmeleitfähigkeit** des betreffenden Mediums. Ein grosser k -Wert bedeutet grosse Wärmeleitfähigkeit. Das Minuszeichen drückt aus, dass die Wärme von oben nach unten strömt, wenn die Temperatur von unten nach oben zunimmt.

Wird nun das Parallelogramm P gekippt, so verändert sich auch der Fluss $\Phi(P)$, und in dem Grenzfall, wo P parallel zur x_3 -Achse ist, wird $\Phi(P) = 0$. Die Intuition sagt uns, dass die Formel

$$\Phi(P) = -k (\nabla u \cdot \mathbf{n}) \omega(P)$$

den fraglichen Fluss für beliebiges P richtig wiedergibt.

Es sei jetzt u eine beliebige Temperaturverteilung in dem Gebiet Ω und $P \subset \Omega$ ein kleines orientiertes Parallelogramm mit Mittelpunkt \mathbf{p} . Für die Wärmemenge, die in einem sehr kurzen Zeitintervall $[t_0 - h, t_0 + h]$ durch dieses Parallelogramm fliesst, kommt es nur auf die Verhältnisse in der unmittelbaren Nähe des "Weltpunktes" (\mathbf{p}, t_0) an. Mit Mikroskop und Zeitlupe betrachtet sind aber diese Verhältnisse von der Art, wie wir sie eben diskutiert haben: homogen und stationär. Hieraus folgt: Der Wärmefluss durch das betrachtete Parallelogramm hat zur Zeit t_0 den Wert

$$\Phi(P) \doteq -k (\nabla u(\mathbf{p}, t_0) \cdot \mathbf{n}) \omega(P) ,$$

und der Wärmefluss durch eine makroskopische orientierte Fläche $S \subset \Omega$ hat folglich zu jeder Zeit t den (von t abhängigen) Wert

$$\Phi(S) = - \int_S k \nabla u \cdot \mathbf{n} \, d\omega . \quad (12)$$

Wie in Beispiel ③ führen wir jetzt einen Probereich $B \subset \Omega$ ein, den wir für den Moment festhalten. Die gesamte zur Zeit t in dem Bereich B gespeicherte Wärmemenge $W(t)$ ist gegeben durch

$$W(t) = \int_B c \rho u(\mathbf{x}, t) \, d\mu(\mathbf{x}) . \quad (13)$$

Dabei sind c und ρ Materialkonstanten: c ist die sogenannte Wärmekapazität des betreffenden Mediums und ρ dessen Dichte. Aus (13) ergibt sich wie in Beispiel ③ die folgende zeitliche Änderungsrate von $W(\cdot)$:

$$W'(t) = \int_B c\rho u_t(\mathbf{x}, t) d\mu(\mathbf{x}) . \quad (14)$$

Die momentane Änderungsrate $W'(t)$ ist andererseits gleich dem zur Zeit t vorhandenen Wärmefluss durch ∂B ; dabei ist zu berücksichtigen, dass abfließende Wärme eine Abnahme von W zur Folge hat. Aufgrund von (12) und nach dem Satz von Gauss gilt daher

$$W'(t) = -\Phi(\partial B) = \int_{\partial B} k \nabla u \cdot \mathbf{n} d\omega = \int_B k \operatorname{div}(\nabla u) d\mu = \int_B k \Delta u d\mu .$$

Zusammen mit (14) ergibt sich somit

$$\int_B (c\rho u_t - k \Delta u) d\mu = 0 ,$$

und zwar gilt das für alle t und jeden Probebereich $B \subset \Omega$. Mit Hilfe von Lemma (14.29) können wir daher den folgenden Schluss ziehen:

$$\forall \mathbf{x}, \forall t : \quad c\rho u_t - k \Delta u = 0 .$$

Mit der Abkürzung

$$\frac{k}{c\rho} =: a^2$$

erhalten wir definitiv für u die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u . \quad (15)$$

Dies ist die sogenannte **Wärmeleitungsgleichung**. Der Stofftransport durch Diffusion in einem ruhenden Trägermedium erfolgt übrigens nach demselben Gesetz; dabei stellt $u(\mathbf{x}, t)$ die Konzentration des diffundierenden Stoffes an der Stelle \mathbf{x} zu Zeit t dar.

Im Licht von (14.30) lässt sich die Gleichung (15) wie folgt interpretieren: Wenn es in den Punkten rund um \mathbf{p} zur Zeit t im Schnitt wärmer ist als an der Stelle \mathbf{p} , so wird die Temperatur an der Stelle \mathbf{p} in der nächsten Sekunde zunehmen, und zwar mit einer Geschwindigkeit, die im wesentlichen proportional ist zu der mittleren von \mathbf{p} aus gemessenen Temperaturzunahme. Im stationären Fall ($\Delta u \equiv 0$) ist die Temperatur an jeder Stelle \mathbf{x} "innerlich ausgewogen", und $u(\mathbf{x})$ wird von den Temperaturwerten rund um \mathbf{x} *per saldo* weder nach oben noch nach unten gezogen. \bigcirc

Aufgaben

1. (a) Berechne den Fluss des Feldes $\mathbf{v}(x, y, z) := (0, 0, 1 - z)$ von unten nach oben durch die obere Hälfte der Einheitskugel.
- (b) Berechne denselben Fluss durch Anwendung des Satzes von Gauss auf die obere Halbkugel. *Hinweis:* Die auftretenden Integrale lassen sich "im Kopf" evaluieren.
2. (a) Es sei f eine C^1 -Skalarfunktion auf dem zulässigen Bereich $B \subset \mathbb{R}^3$. Dann gilt

$$\int_{\partial B} f \, d\omega = \int_B \nabla f \, d\mu .$$

Hinweis: Betrachte die drei Felder $\mathbf{v}(\mathbf{x}) := f(\mathbf{x})\mathbf{e}_i$.

- (b) Auf die Oberfläche eines in eine Flüssigkeit eingetauchten Körpers wirkt ein Normaldruck, der linear mit der Tiefe zunimmt. Berechne die resultierende Gesamtkraft (Auftrieb).
3. (a) Berechne den Fluss des Coulomb-Feldes

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) := \frac{1}{4\pi r^2} \frac{\mathbf{x}}{r} \quad (r := |\mathbf{x}| \neq 0)$$

durch die Oberfläche ∂B eines zulässigen Bereiches $B \subset \mathbb{R}^3$, der den Ursprung in seinem Innern enthält. *Hinweis:* Das Feld ist quellenfrei. Wende den Satz von Gauss auf den Bereich $B' := B \setminus U_\varepsilon(\mathbf{0})$ an.

- (b) In den acht Eckpunkten eines Würfels befindet sich je eine Punktladung, die ein Feld der unter (a) beschriebenen Art erzeugt, so dass additiv ein Gesamtfeld \mathbf{E} resultiert. Bestimme den Fluss von \mathbf{E} durch eine Seitenfläche des Würfels. *Hinweis:* Keine langen Rechnungen. Dies ist mehr eine Denkaufgabe.
4. Es sei B der im ersten Oktanten gelegene Teil der Einheitskugel im \mathbb{R}^3 . Berechne den aus B heraustretenden Fluss des Vektorfeldes

$$\mathbf{v}(x, y, z) := (\alpha x, \beta y, \gamma z)$$

einmal als Flussintegral und ein zweites Mal mit Hilfe des Satzes von Gauss.

5. Berechne den Fluss des Feldes $\mathbf{v}(x, y) := (2xy - y^2, x^2 + y^2)$ aus dem Quadrat $Q := [0, 1]^2$ heraus einmal als Flussintegral und ein zweites Mal mit Hilfe des Satzes von Gauss für die Ebene.
6. Es seien $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ zwei gegebene Vektoren und

$$f(\mathbf{x}) := (\mathbf{a} \cdot \mathbf{x})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{x}) .$$

Berechne den Fluss von ∇f durch die nach aussen orientierte Oberfläche des Oktaeders

$$B := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid |x_1| + |x_2| + |x_3| \leq 1\}.$$

7. Es sei S eine orientierte Hyperfläche im Definitionsbereich der Funktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Dann bezeichnet man die in den Punkten von S definierte Grösse

$$\frac{\partial f}{\partial n} := \nabla f \cdot \mathbf{n}$$

als **Normalenableitung** von f .

- (a) Beweise die beiden folgenden **Greenschen Identitäten**, die in der Potentialtheorie und der Elektrodynamik gebraucht werden: Für einen beliebigen zulässigen Bereich $B \subset \mathbb{R}^3$ und beliebige C^2 -Funktionen f und g gilt

$$(I) \quad \int_B (f \Delta g + \nabla f \cdot \nabla g) d\mu = \int_{\partial B} f \frac{\partial g}{\partial n} d\omega$$

(Hinweis: Betrachte das Feld $\mathbf{v} := f \nabla g$) und

$$(II) \quad \int_B (f \Delta g - g \Delta f) d\mu = \int_{\partial B} \left(f \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\partial f}{\partial n} \right) d\omega.$$

- (b) Ist f eine harmonische Funktion auf B und $f(\mathbf{x}) \equiv 0$ auf ∂B , so ist $f(\mathbf{x}) \equiv 0$ auf B . *Hinweis:* Benütze (I) mit $g := f$.

14.7 Der Satz von Stokes

Die Greensche Formel (14.18) bezieht sich auf Vektorfelder \mathbf{K} und Bereiche B mit Randzyklus ∂B in der Ebene. In diesem Abschnitt geht es darum, eine analoge Formel für Vektorfelder \mathbf{K} und orientierte Flächen S mit Randzyklus ∂S im Raum, speziell im \mathbb{R}^3 , herzuleiten.

Zulässige Flächen

Es seien A eine offene Menge im \mathbb{R}^d und Ω eine offene Menge im \mathbb{R}^n . Eine C^1 -Abbildung $\mathbf{f} : A \rightarrow \Omega$ erzeugt von jeder in A liegenden C^1 -Kurve

$$\gamma : t \mapsto \mathbf{u}(t) \quad (a \leq t \leq b) \quad (1)$$

eine ebenfalls stetig differenzierbare **Bildkurve**

$$\mathbf{f}(\gamma) : t \mapsto \mathbf{f}(\mathbf{u}(t)) \quad (a \leq t \leq b) \quad (2)$$

in Ω . In der Folge besitzt jede in A liegende Kette $\gamma := \sum_{j=1}^s \gamma_j$ eine wohlbestimmte **Bildkette**

$$\mathbf{f}(\gamma) := \sum_{j=1}^s \mathbf{f}(\gamma_j)$$

in Ω . Sind nämlich zwei formale Summen $\sum_j \gamma_j$ und $\sum_l \gamma'_l$ äquivalent, so sind auch $\sum_j \mathbf{f}(\gamma_j)$ und $\sum_l \mathbf{f}(\gamma'_l)$ äquivalent.

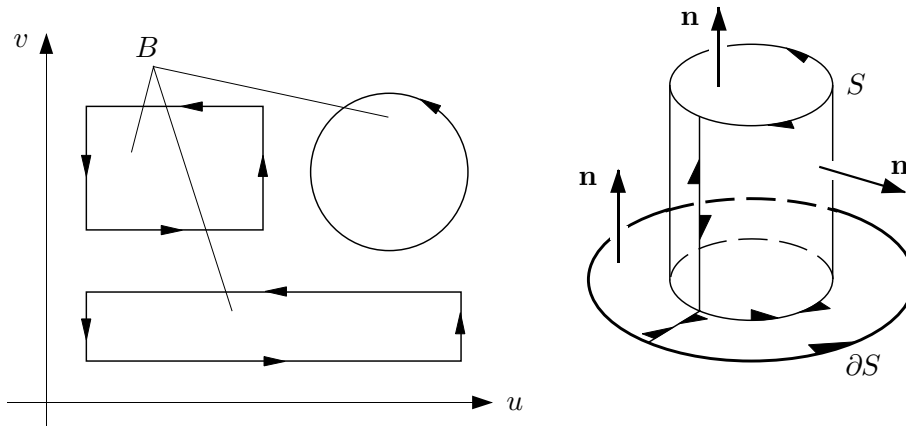


Fig. 14.7.1

Dies vorausgeschickt, nennen wir eine orientierte kompakte Fläche $S \subset \mathbb{R}^3$ **zulässig**, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind (siehe die Fig. 14.7.1): Es

gibt einen zulässigen Bereich $B \subset \mathbb{R}^2$ mit Randzyklus ∂B und eine C^2 -Parameterdarstellung

$$\mathbf{f}: B \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{u} \mapsto \mathbf{x} := \mathbf{f}(\mathbf{u}) \quad (3)$$

der Fläche S , die bis auf eine Nullmenge regulär und injektiv ist und via $\mathbf{f}_1 \times \mathbf{f}_2$ die auf S gegebene Orientierung erzeugt.

Der Zyklus $\partial S := \mathbf{f}(\partial B)$ heisst **Randzyklus** von S . Wenn \mathbf{f} gewisse Teile von ∂B einzeln oder in Paaren annulliert (siehe die Fig. 14.7.1 sowie die folgenden Beispiele), so besteht ∂S aus weniger Kurven als ∂B . Ist $\partial S = 0$, so heisst S **geschlossen**. Der Randzyklus einer zulässigen orientierten Fläche S ist “für alle praktischen Zwecke” wohlbestimmt und nicht von der gewählten Darstellung (3) abhängig. Anschaulich gesprochen läuft ∂S , von der Spitze von \mathbf{n} her gesehen, einmal im Gegenuhrzeigersinn um S herum; siehe dazu das nachfolgende Beispiel ②.

① Die nach aussen orientierte Sphäre S^2 (siehe das Beispiel 12.7.④ und Fig. 14.7.2) ist eine geschlossene zulässige Fläche, denn die Parameterdarstellung 12.7.(4) annulliert die horizontalen Kanten des Parameterbereichs je für sich und die vertikalen Kanten als Paar.

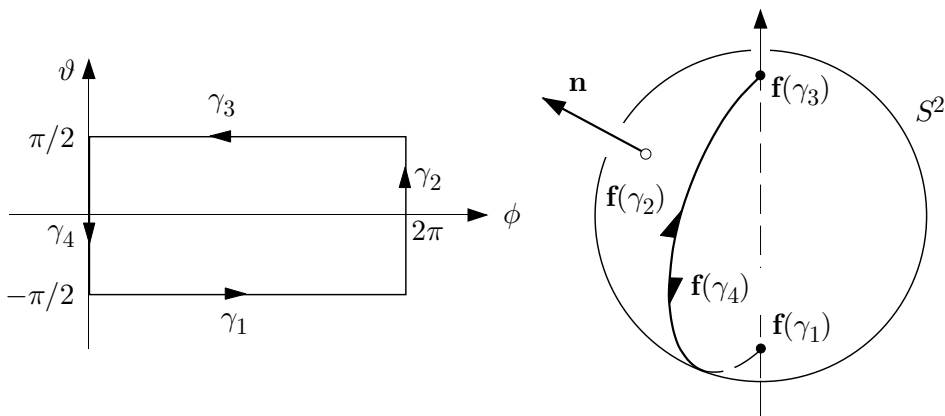


Fig. 14.7.2

Die Darstellung 13.5.(15) der Torusfläche T “verheftet” erstens die linke mit der rechten Kante des Parameterbereichs $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ und zweitens auch die Ober- mit der Unterkante, und zwar erfolgen beide Verheftungen “gegenläufig”. Folglich ist auch T eine geschlossene zulässige Fläche.

Ist $P \subset \mathbb{R}^3$ ein konvexes Polyeder, zum Beispiel ein Quader oder ein Dodekaeder, so ist die nach aussen orientierte Oberfläche $S := \partial P$ eine zulässige Fläche. Auch diese Fläche ist geschlossen: S besteht aus Polygonen S_i ($1 \leq i \leq N$), deren Kanten durch die Parameterdarstellung $\mathbf{f} = (\mathbf{f}_i)_{1 \leq i \leq N}$ von S gegenläufig verheftet werden. Somit ist $\partial S = 0$.

Die in diesem Beispiel betrachteten Flächen S^2 , T und S haben eines gemeinsam: Sie lassen sich als Rand bzw. Oberfläche eines Bereiches $B \subset \mathbb{R}^3$ auffassen. Es gehört zu den “Urprinzipien” der Geometrie und ist ein tiefliegender Sachverhalt, dass der Rand eines Randes verschwindet: Für beliebige zulässige $B \subset \mathbb{R}^n$ ist $\partial(\partial B) = 0$. Dies steht in einem geheimnisvollen Zusammenhang mit den Formeln $\mathbf{rot} \circ \nabla = 0$ bzw. $\operatorname{div} \circ \mathbf{rot} = 0$. \bigcirc

② Es sei B ein zulässiger Bereich mit Randzyklus ∂B in der (x, y) -Ebene und

$$\phi: B \rightarrow \mathbb{R}_{>0}, \quad (x, y) \mapsto z := \phi(x, y)$$

eine C^2 -Funktion. Dann ist der nach oben orientierte Graph von ϕ eine zulässige Fläche S über der (x, y) -Ebene bzw. über B , und zwar vermöge der regulären Darstellung

$$\mathbf{f}: (x, y) \mapsto (x, y, \phi(x, y)). \quad (4)$$

Wegen $\mathbf{f}_x \times \mathbf{f}_y = (-\phi_x, -\phi_y, 1)$ induziert \mathbf{f} die angegebene Orientierung, denn die z -Komponente von $\mathbf{f}_x \times \mathbf{f}_y$ ist positiv.

Der Randzyklus von S ist nach Definition und (4) der “nach oben verpflanzte” Randzyklus von B (siehe z.B. die Fig. 14.7.4). Werden S und ∂S von der Spitze von \mathbf{n} her, also von (weit) oben, betrachtet, so geht ∂S in der Tat einmal im Gegenuhrzeigersinn um S herum. \bigcirc

Pullback

Als Vehikel zum Beweis des angestrebten Satzes dient uns natürlich eine Parameterdarstellung \mathbf{f} der betrachteten Fläche S und ihres Randzyklus ∂S . Wir beginnen also mit einigen allgemeinen Bemerkungen und Hilfssätzen über das Verhalten von Feldern gegenüber differenzierbaren Abbildungen \mathbf{f} . Eine r -mal, $r \geq 1$, stetig differenzierbare Abbildung (Parameterdarstellung)

$$\mathbf{f}: A \rightarrow \Omega, \quad \mathbf{u} \mapsto \mathbf{x} := \mathbf{f}(\mathbf{u})$$

und ihre Ableitung $d\mathbf{f}$ transportieren “individuelle Objekte” wie Punkte, Kurven, Tangenten u.a. von A bzw. TA nach Ω bzw. $T\Omega$ (Fig. 14.7.3). Es gibt aber auch eine Bewegung in der Gegenrichtung: Auf Ω definierte “Felder” lassen sich mit Hilfe von \mathbf{f} nach A zurückverpflanzen. Diese Operation heisst **Pullback** und wird mit \mathbf{f}^* bezeichnet. Entsprechend den verschiedenen Arten von “Feldern” gibt es verschiedene Formen des Pullbacks.

Es sei erstens

$$\phi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathbf{x} \mapsto \phi(\mathbf{x})$$

ein Skalarfeld auf Ω , zum Beispiel eine Temperaturverteilung. Dann ist der Pullback $\mathbf{f}^*(\phi) =: \tilde{\phi}$ gegeben durch

$$\tilde{\phi}: \mathbf{u} \mapsto \tilde{\phi}(\mathbf{u}) := \phi(\mathbf{f}(\mathbf{u}))$$

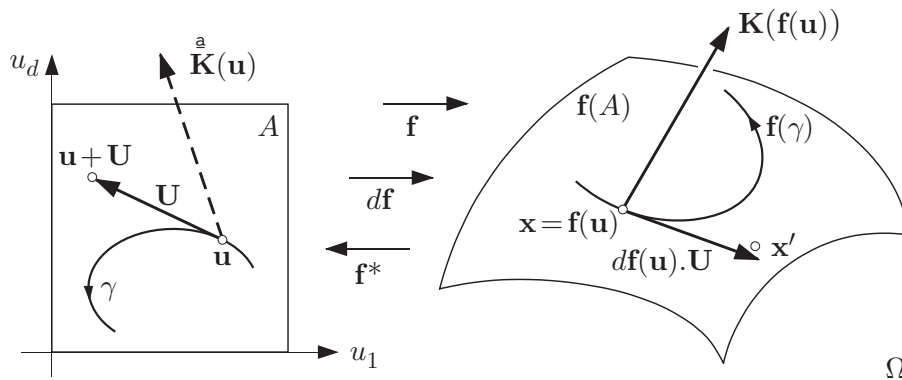


Fig. 14.7.3

und stellt für jeden Parameterpunkt $\mathbf{u} \in A$ die Temperatur im zugehörigen Raumpunkt $\mathbf{x} := \mathbf{f}(\mathbf{u})$ dar. Damit wird $\tilde{\phi}$ ein Skalarfeld auf A .

Mit Vektorfeldern

$$\mathbf{K}: \Omega \rightarrow T\Omega, \quad \mathbf{x} \mapsto \mathbf{K}(\mathbf{x})$$

ist es bereits etwas abstrakter. Um den Pullback $f^*(\mathbf{K}) =: \tilde{\mathbf{K}}$ zu erklären, betrachten wir zunächst einen festen Punkt $\mathbf{u} \in A$. Die Formel

$$\phi(\mathbf{U}) := \mathbf{K}(\mathbf{f}(\mathbf{u})) \cdot (d\mathbf{f}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{U})$$

definiert ein lineares Funktional $\phi: T_{\mathbf{u}} \rightarrow \mathbb{R}$. Der Funktionswert $\phi(\mathbf{U})$ ist eine erste Näherung für die Arbeit, die das Feld \mathbf{K} leistet, wenn es ein Wägelchen vom Punkt $\mathbf{x} := \mathbf{f}(\mathbf{u})$ nach dem nahegelegenen Punkt $\mathbf{x}' := \mathbf{f}(\mathbf{u} + \mathbf{U})$ verschiebt, denn der Verschiebungsvektor $\mathbf{x}' - \mathbf{x}$ ist ungefähr gleich $d\mathbf{f}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{U}$. Nach (12.3) gibt es einen wohlbestimmten Vektor $\mathbf{a} \in T_{\mathbf{u}}$ mit

$$\phi(\mathbf{U}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{U} \quad \forall \mathbf{U} \in T_{\mathbf{u}}.$$

Dieser Vektor $\mathbf{a} =: \tilde{\mathbf{K}}(\mathbf{u})$ ist der gesuchte **Pullback von \mathbf{K}** an der Stelle \mathbf{u} . In anderen Worten: $\tilde{\mathbf{K}}(\mathbf{u})$ ist “implizit” definiert durch die Identität

$$\tilde{\mathbf{K}}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{U} = \mathbf{K}(\mathbf{f}(\mathbf{u})) \cdot (d\mathbf{f}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{U}) \quad \forall \mathbf{U} \in T_{\mathbf{u}}. \quad (5)$$

Da $\mathbf{u} \in A$ beliebig war, haben wir damit “auf natürliche Weise” ein Vektorfeld

$$\tilde{\mathbf{K}}: A \rightarrow TA, \quad \mathbf{u} \mapsto \tilde{\mathbf{K}}(\mathbf{u})$$

erhalten. Die eigentliche Rechtfertigung dieser abstrakten Konstruktion ergibt sich aus den folgenden Hilfssätzen.

(14.31) Es seien $\mathbf{f}: A \rightarrow \Omega$ eine C^1 -Abbildung und \mathbf{K} ein stetiges Vektorfeld auf Ω , wie beschrieben. Weiter seien γ eine beliebige Kette in A und $\mathbf{f}(\gamma)$ deren Bildkette in Ω . Dann gilt

$$\int_{\mathbf{f}(\gamma)} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{x} = \int_{\gamma} \tilde{\mathbf{K}} \cdot d\mathbf{u} .$$

□ Es genügt, eine C^1 -Kurve (1) und ihre Bildkurve (2) zu betrachten. Nach der Kettenregel ist

$$\mathbf{x}'(t) = d\mathbf{f}(\mathbf{u}(t)) \cdot \mathbf{u}'(t) \quad (a \leq t \leq b) .$$

Aufgrund von (5) besteht daher die Identität

$$\mathbf{K}(\mathbf{x}(t)) \cdot \mathbf{x}'(t) = \mathbf{K}(\mathbf{f}(\mathbf{u}(t))) \cdot (d\mathbf{f}(\mathbf{u}(t)) \cdot \mathbf{u}'(t)) = \tilde{\mathbf{K}}(\mathbf{u}(t)) \cdot \mathbf{u}'(t) ,$$

und hieraus folgt die Behauptung. ─

Der Pullback verhält sich auch vernünftig bezüglich der Ableitung:

(14.32) Es seien $\mathbf{f}: \mathbb{R}^2 \curvearrowright \mathbb{R}^n$ eine C^2 -Abbildung und \mathbf{K} ein C^1 -Vektorfeld im \mathbb{R}^n , wie beschrieben. Dann gilt

$$\text{rot } \tilde{\mathbf{K}}(\mathbf{u}) = \text{Rot } \mathbf{K}(\mathbf{f}(\mathbf{u})) \cdot (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2) \quad (6)$$

und im Fall $n = 3$ speziell

$$\text{rot } \tilde{\mathbf{K}}(\mathbf{u}) = \text{rot } \mathbf{K}(\mathbf{f}(\mathbf{u})) \cdot (\mathbf{f}_1 \times \mathbf{f}_2)_{\mathbf{u}} .$$

□ Nach (14.11) ist $\text{rot } \tilde{\mathbf{K}} = \tilde{K}_{2,1} - \tilde{K}_{1,2}$. Wir berechnen zunächst mit Hilfe von (5) die Komponenten \tilde{K}_i von $\tilde{\mathbf{K}}$:

$$\tilde{K}_i = \tilde{\mathbf{K}} \cdot \mathbf{e}_i = \mathbf{K}(\mathbf{f}(\mathbf{u})) \cdot (d\mathbf{f}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{e}_i) = \mathbf{K}(\mathbf{f}(\mathbf{u})) \cdot \mathbf{f}_i .$$

Bei der Bildung von $\tilde{K}_{i,k}$ ist das Skalarprodukt rechter Hand nach der Produktregel zu differenzieren. Es ergibt sich

$$\tilde{K}_{i,k} = \frac{\partial}{\partial u_k} (\mathbf{K}(\mathbf{f}(\mathbf{u}))) \cdot \mathbf{f}_i + \mathbf{K}(\mathbf{f}(\mathbf{u})) \cdot \mathbf{f}_{i,k} .$$

Nun ist

$$\frac{\partial}{\partial u_k} (\mathbf{K}(\mathbf{f}(\mathbf{u}))) = d\mathbf{K}(\mathbf{f}(\mathbf{u})) \cdot \mathbf{f}_k ,$$

und der $\mathbf{f}_{i,k}$ -Term wird sich gleich herausheben. Wir erhalten insgesamt

$$\tilde{K}_{2,1} - \tilde{K}_{1,2} = (d\mathbf{K} \cdot \mathbf{f}_1) \cdot \mathbf{f}_2 - (d\mathbf{K} \cdot \mathbf{f}_2) \cdot \mathbf{f}_1 = \text{Rot } \mathbf{K}(\mathbf{f}(\mathbf{u})) \cdot (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2) ,$$

die letzte Gleichung nach Definition von Rot. Damit ist (6) bewiesen, und die zweite behauptete Formel ergibt sich hieraus unmittelbar mit 14.3.(9). ─

Der letzte Hilfssatz lässt sich als Pendant zu (14.31) auffassen; er handelt vom Fluss eines Rotationsfeldes im \mathbb{R}^3 durch eine Fläche:

(14.33) Es seien \mathbf{K} ein C^1 -Vektorfeld auf der offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, weiter S eine kompakte orientierte Fläche in Ω und

$$\mathbf{f} : B \rightarrow \Omega, \quad \mathbf{u} \mapsto \mathbf{x} := \mathbf{f}(\mathbf{u})$$

eine C^2 -Parameterdarstellung von S , die via $\mathbf{f}_{,1} \times \mathbf{f}_{,2}$ die gegebene Orientierung erzeugt. Dann gilt

$$\int_S \mathbf{rot} \mathbf{K} \cdot d\omega = \int_B \mathbf{rot} \tilde{\mathbf{K}}(\mathbf{u}) d\mu(\mathbf{u}).$$

□ Die Behauptung ergibt sich unmittelbar aus der Definition des Flusses und (14.32):

$$\int_S \mathbf{rot} \mathbf{K} \cdot d\omega = \int_B \mathbf{rot} \mathbf{K}(\mathbf{f}(\mathbf{u})) \cdot (\mathbf{f}_{,1} \times \mathbf{f}_{,2})_{\mathbf{u}} d\mu(\mathbf{u}) = \int_B \mathbf{rot} \tilde{\mathbf{K}}(\mathbf{u}) d\mu(\mathbf{u}). \quad \lrcorner$$

Der Satz von Stokes

Der dritte klassische Integralsatz der Vektoranalysis ist, wie gesagt, eine räumliche Version der Greenschen Formel. Dieser **Satz von Stokes** lautet folgendermassen:

(14.34) Es seien \mathbf{K} ein C^1 -Vektorfeld auf der offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ und $S \subset \Omega$ eine zulässige orientierte Fläche mit Randzyklus ∂S . Dann gilt:

$$\int_{\partial S} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{x} = \int_S \mathbf{rot} \mathbf{K} \cdot d\omega.$$

In Worten: Die Zirkulation von \mathbf{K} längs ∂S ist gleich dem Fluss von $\mathbf{rot} \mathbf{K}$ durch S .

□ Ist (3) eine Darstellung von S der verlangten Art, so gilt einerseits nach Definition von ∂S und Hilfssatz (14.31):

$$\int_{\partial S} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{x} = \int_{\partial B} \tilde{\mathbf{K}} \cdot d\mathbf{u},$$

wobei $\tilde{\mathbf{K}}$ den Pullback von \mathbf{K} bezeichnet. Andererseits ist

$$\int_S \mathbf{rot} \mathbf{K} \cdot d\omega = \int_B \mathbf{rot} \tilde{\mathbf{K}} d\mu$$

nach (14.33). Die rechten Seiten der beiden letzten Gleichungen stimmen aber nach der Greenschen Formel (14.18) überein. □

③ Der Fluss eines Rotationsfeldes $\mathbf{rot} \mathbf{K}$ durch eine geschlossene Fläche ist 0. ○

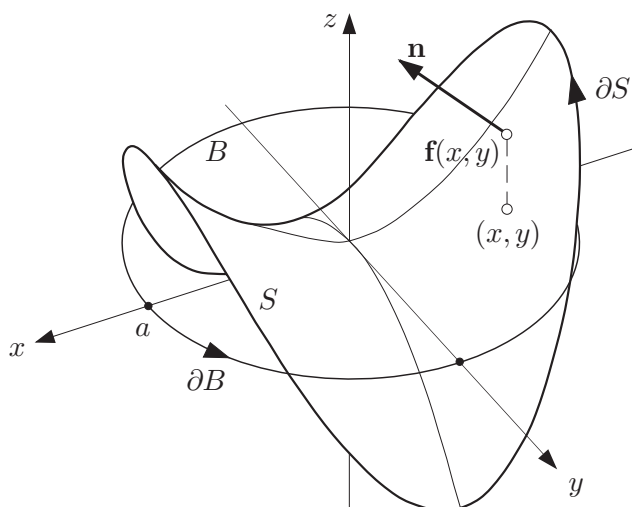


Fig. 14.7.4

Der Satz von Stokes besitzt zahlreiche Anwendungen in der Kontinuumsmechanik und in der Elektrodynamik (Stichwort: Maxwell'sche Gleichungen), auf die wir hier nicht eingehen können. Wir beschränken uns auf das folgende Rechenbeispiel:

④ Betrachte für ein $a > 0$ die Kreisscheibe

$$B := \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq a^2\}$$

mit dem Randzyklus

$$\partial B : t \mapsto (a \cos t, a \sin t) \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

und vor allem das über B liegende Stück S der nach oben orientierten Sattelfläche $z = x^2 - y^2$ (Fig. 14.7.4). Verwenden wir für dieses Flächenstück die Darstellung

$$\mathbf{f} : (x, y) \mapsto (x, y, x^2 - y^2) \quad ((x, y) \in B),$$

so ist einerseits

$$\mathbf{f}_x \times \mathbf{f}_y = (-2x, 2y, 1);$$

andererseits ergibt sich für den Randzyklus $\partial S = \mathbf{f}(\partial B)$ die Parameterdarstellung

$$\partial S : t \mapsto \mathbf{x}(t) := (a \cos t, a \sin t, a^2 \cos(2t)) \quad (0 \leq t \leq 2\pi).$$

Wir führen jetzt zusätzlich das Vektorfeld

$$\mathbf{K}(x, y, z) := (z, x, y)$$

ein. Da \mathbf{K} linear von x, y, z abhängt, ist $\mathbf{rot K}$ konstant; die Rechnung liefert $\mathbf{rot K} \equiv (1, 1, 1)$.

Die Zirkulation von \mathbf{K} längs ∂S hat den Wert

$$\begin{aligned} \int_{\partial S} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{x} &= \int_0^{2\pi} \mathbf{K}(\mathbf{x}(t)) \cdot \mathbf{x}'(t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (a^2 \cos(2t) \cdot (-a \sin t) + a \cos t \cdot a \cos t + a \sin t \cdot (-2a^2 \sin(2t))) dt \\ &= \pi a^2 \end{aligned}$$

(nur der mittlere Summand liefert einen Beitrag). Unabhängig davon berechnen wir nun den Fluss von $\mathbf{rot K}$ durch S . Es ergibt sich derselbe Wert:

$$\begin{aligned} \int_S \mathbf{rot K} \cdot d\boldsymbol{\omega} &= \int_B \mathbf{rot K}(\mathbf{f}(x, y)) \cdot (\mathbf{f}_x \times \mathbf{f}_y) d\mu(x, y) \\ &= \int_B (1 \cdot (-2x) + 1 \cdot 2y + 1 \cdot 1) d\mu(x, y) = \pi a^2 \end{aligned}$$

(nur der letzte Summand liefert einen Beitrag). ○

Aufgaben

- Man berechne das Linienintegral $\int_{\gamma} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{x}$ für das Vektorfeld

$$\mathbf{K}(x, y, z) := (x - y + z, y - z + x, z - x + y)$$

und den Zyklus γ der Fig. 14.7.5 auf drei Arten:

- direkt,
- mit Hilfe des Satzes von Stokes und einer geeigneten Parameterdarstellung der Dreiecksfläche,
- mit Hilfe des Satzes von Stokes und geometrischer Einsicht, die erlaubt, das Flächenintegral "im Kopf" auszuwerten.

Hinweis: Die Gesamtsituation ist symmetrisch bezüglich zyklischer Vertauschung $x \rightsquigarrow y \rightsquigarrow z \rightsquigarrow x$.

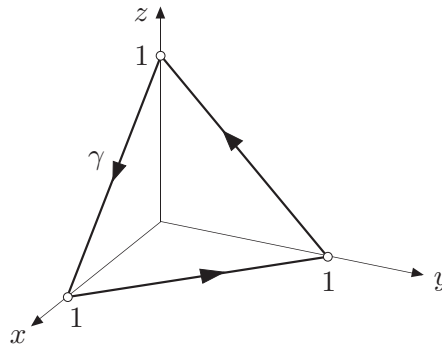


Fig. 14.7.5

2. Gegeben sind das Vektorfeld

$$\mathbf{K}(x, y, z) := (\sin y, \sin z, \sin x)$$

und der in Fig 14.7.6 dargestellte Streckenzug γ . Berechne das Linienintegral $\int_{\gamma} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{x}$ einmal direkt und ein zweites Mal mit Hilfe des Satzes von Stokes. *Hinweis:* Der Streckenzug berandet einen Teil der Würfeloberfläche. Die Gesamtsituation ist symmetrisch bezüglich zyklischer Vertauschung $x \rightsquigarrow y \rightsquigarrow z \rightsquigarrow x$.)

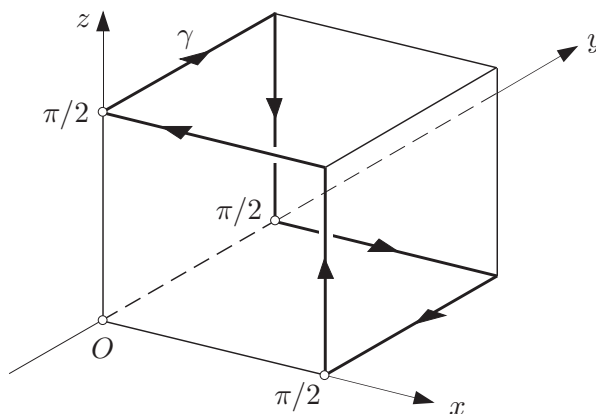


Fig. 14.7.6

3. (a) Beweise den folgenden Satz: Es seien \mathbf{K} ein C^1 -Vektorfeld im \mathbb{R}^3 und $S \subset \text{dom}(\mathbf{K})$ eine C^2 -Fläche, die in allen ihren Punkten auf \mathbf{K} senkrecht steht:

$$\mathbf{K}(\mathbf{p}) \perp T_{\mathbf{p}}S \quad \forall \mathbf{p} \in S .$$

Dann ist notwendigerweise

$$\mathbf{K}(\mathbf{p}) \cdot \text{rot } \mathbf{K}(\mathbf{p}) = 0 \quad \forall \mathbf{p} \in S .$$

Hinweis: Betrachte einen festen Punkt $\mathbf{p} \in S$ und wende den Satz von Stokes auf ein kleines Scheibchen $S' \subset S$ mit "Zentrum" \mathbf{p} an. Die Annahme $\mathbf{K}(\mathbf{p}) \cdot \text{rot } \mathbf{K}(\mathbf{p}) > 0$ führt auf einen Widerspruch.

- (b) Insbesondere gibt es keine Fläche, die in allen ihren Punkten auf dem Feld $\mathbf{K}(x, y, z) := (-y, x, 1)$ senkrecht steht. Figur!
4. Es seien \mathbf{e} ein in $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^3$ angehefteter Einheitsvektor und \mathbf{v} das Geschwindigkeitsfeld einer mit Winkelgeschwindigkeit ω um \mathbf{e} rotierenden Flüssigkeit. Weiter seien zwei Vektoren \mathbf{a} und \mathbf{b} gegeben. Berechne die Zirkulation von \mathbf{v} längs der Ellipse

$$\gamma : t \mapsto \mathbf{x}(t) := \cos t \mathbf{a} + \sin t \mathbf{b} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

einmal als Linienintegral und ein zweites Mal mit Hilfe des Satzes von Stokes. *Hinweis:* Das Flächenintegral lässt sich mit Hilfe von geometrischen Überlegungen "im Kopf" ausrechnen.

14.8 Die Integrabilitätsbedingung

Wir haben in Abschnitt 14.3 gesehen, dass die Rotation eines konservativen Feldes \mathbf{K} identisch verschwindet (Satz (14.10)). Jetzt wollen wir uns mit der Umkehrung dieses Sachverhaltes beschäftigen, das heisst, mit der Frage: Folgt aus dem Verschwinden der Rotation, dass das betrachtete Feld \mathbf{K} konservativ ist?

Wir beginnen mit einigen heuristischen Überlegungen und betrachten ein wirbelfreies Feld \mathbf{K} auf einer offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Es sei also $\mathbf{rot} \mathbf{K}(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{0}$ auf Ω . Wir hoffen, dass dann die Zirkulation von \mathbf{K} längs beliebigen geschlossenen Kurven γ ($\subset \Omega$) verschwindet. Ein derartiges γ lässt sich als Drahtschleife realisieren. Wird diese Schleife kurz in eine Seifenlösung getaucht und sorgfältig wieder herausgezogen, so bildet sich eine in γ eingespannte Seifenhaut S . Bei geeigneter Wahl der Orientierung dürfen wir daher von vorneherein $\gamma = \partial S$ annehmen, und wir erhalten nach dem Satz von Stokes:

$$\int_{\gamma} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{x} = \int_S \mathbf{rot} \mathbf{K} \cdot d\boldsymbol{\omega} = 0 .$$

Da dies für jedes geschlossene γ zutrifft, wäre \mathbf{K} hiermit als konservativ erwiesen.

Wir haben hier stillschweigend angenommen, dass jede geschlossene Kurve $\gamma \subset \Omega$ als Randzyklus ∂S einer in Ω liegenden Fläche S darstellbar ist. Diese Annahme trifft für gewisse Gebiete Ω zu, für andere nicht. Ist etwa $\Omega := \mathbb{R}^3 \setminus \{z\text{-Achse}\}$ und γ der Einheitskreis in der (x, y) -Ebene, so ist nicht recht vorstellbar, wie γ eine ganz in Ω gelegene Seifenhaut beranden kann. Dem folgenden Beispiel liegt die analoge Situation in der Ebene zugrunde; es zeigt definitiv, dass ein wirbelfreies Feld nicht konservativ zu sein braucht:

① Das in Beispiel 14.3.③ und in Abschnitt 14.4 betrachtete Feld

$$\mathbf{A}(x, y) := \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$$

auf \mathbb{R}^2 ist wirbelfrei, aber es ist nicht konservativ, denn für den Zyklus

$$\gamma : t \mapsto \mathbf{z}(t) := (\cos t, \sin t) \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

gilt

$$\int_{\gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{z} = 2\pi N(\gamma, \mathbf{0}) = 2\pi \neq 0 .$$

○

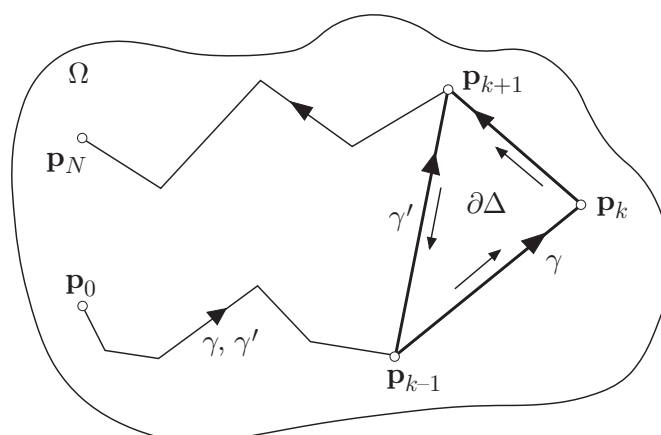


Fig. 14.8.1

Einfach zusammenhängende Gebiete

Um die angedeutete Eigenschaft gewisser Gebiete $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ in den Griff zu bekommen, betrachten wir anstelle von beliebigen geschlossenen Kurven zunächst nur geschlossene Streckenzüge in Ω und zerlegen das ‐Einspannen einer Fläche‐ in einen derartigen Streckenzug in zahlreiche Einzelschritte, bei denen jedesmal nur ein kleines Dreieck ein- bzw. ausgespannt wird.

Den Streckenzug

$$\gamma: t \mapsto \frac{\mathbf{p}_{\lfloor t \rfloor} + \mathbf{p}_{\lceil t \rceil}}{2} + \left(t - \frac{\lfloor t \rfloor + \lceil t \rceil}{2} \right) (\mathbf{p}_{\lceil t \rceil} - \mathbf{p}_{\lfloor t \rfloor}) \quad (0 \leq t \leq N),$$

der in \mathbf{p}_0 beginnt, sukzessive \mathbf{p}_{k-1} mit \mathbf{p}_k verbindet und in \mathbf{p}_N endet, bezeichnen wir im folgenden mit $[\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N]$. Wird der Streckenzug

$$\gamma := [\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_{k-1}, \mathbf{p}_k, \mathbf{p}_{k+1}, \dots, \mathbf{p}_N]$$

ersetzt durch

$$\gamma' := [\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_{k-1}, \mathbf{p}_{k+1}, \dots, \mathbf{p}_N]$$

oder γ' durch γ (siehe die Fig. 14.8.1), so sprechen wir von einer **Operation**. Die Operation ist **zulässig (bezüglich Ω)**, sofern das abgeschlossene Dreieck Δ mit den Eckpunkten $\mathbf{p}_{k-1}, \mathbf{p}_k, \mathbf{p}_{k+1}$ ganz in Ω liegt. Betrachten wir γ und γ' als Ketten, so gilt

$$\gamma = \gamma' \pm \partial\Delta, \quad (1)$$

je nach Orientierung von Δ . Ein geschlossener Streckenzug

$$[\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_{N-1}, \mathbf{p}_0] \quad (2)$$

heißt **nullhomotop (bezüglich Ω)**, wenn er sich mit Hilfe von endlich vielen zulässigen Operationen in den **leeren Streckenzug** $[\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_0]$ überführen lässt. Durch wiederholte Anwendung von (1) folgt:

(14.35) Ist der geschlossene Streckenzug γ nullhomotop bezüglich Ω , so gibt es endlich viele Dreiecke $\Delta_j \subset \Omega$ ($1 \leq j \leq s$) mit

$$\gamma = \sum_{j=1}^s \pm \partial\Delta_j .$$

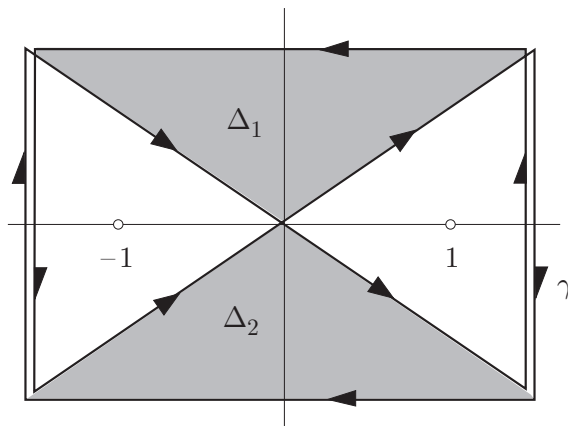


Fig. 14.8.2

② Proposition (14.35) lässt sich nicht umkehren: Der in Fig. 14.8.2 dargestellte Streckenzug γ in dem Gebiet $\Omega := \mathbb{R}^2 \setminus \{(-1, 0), (1, 0)\}$ ist als Kette gleich $\partial\Delta_1 - \partial\Delta_2$. Trotzdem gelingt es nicht, diesen Streckenzug durch zulässige Operationen in den leeren Streckenzug überzuführen (ohne Beweis). Anschaulich ausgedrückt: Der Faden γ lässt sich nicht von den Nägeln $(\pm 1, 0)$ herunterziehen. Folglich ist γ nicht nullhomotop bezüglich Ω . \circ

Wir definieren nunmehr: Eine offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ heisst **einfach zusammenhängend**, wenn jeder geschlossene Streckenzug in Ω nullhomotop ist. Aus technischen Gründen haben wir hier einen im Grunde genommen kontinuierlichen Sachverhalt diskretisiert und einen stetigen Prozess durch eine Folge von zulässigen Operationen ersetzt. Anschaulich gesprochen ist eine offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ genau dann einfach zusammenhängend, wenn sich jede geschlossene Kurve in Ω stetig in einen Punkt zusammenziehen lässt.

③ Eine Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ heisst **sternförmig bezüglich $\mathbf{0}$** , wenn mit jedem Punkt $\mathbf{p} \in \Omega$ die ganze Strecke $[\mathbf{0}, \mathbf{p}]$ in Ω liegt. Wir zeigen: Ein sternförmiges Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ist einfach zusammenhängend.

□ Ist Ω sternförmig bezüglich $\mathbf{0}$, so enthält Ω mit jeder Strecke $[\mathbf{p}, \mathbf{q}]$ das ganze Dreieck Δ mit den Eckpunkten $\mathbf{0}, \mathbf{p}, \mathbf{q}$. Es sei jetzt (2) ein beliebiger geschlossener Streckenzug in Ω . Dann lässt sich γ durch N zulässige Operationen in den Streckenzug

$$[\mathbf{p}_0, \mathbf{0}, \mathbf{p}_1, \mathbf{0}, \mathbf{p}_2, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}, \mathbf{p}_{N-1}, \mathbf{0}, \mathbf{p}_0]$$

und durch weitere $2N - 1$ Operationen via $[\mathbf{p}_0, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}, \mathbf{p}_0]$ in $[\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_0]$ überführen. ┘

Insbesondere ist eine Vollkugel $U_\varepsilon(\mathbf{p})$ einfach zusammenhängend. Die punktierte Ebene $\dot{\mathbb{R}}^2$ (vgl. Beispiel ①) ist jedoch nicht einfach zusammenhängend:

┘ Betrachte den in der Fig. 14.8.3 dargestellten Dreiecksweg

$$\gamma_0 := [\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_0]$$

sowie eine Folge von (bezüglich $\dot{\mathbb{R}}^2$) zulässigen Operationen, die γ_0 nacheinander in die Streckenzüge $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m$ überführt. Ein in $\mathbf{0}$ beginnender Halbstrahl σ , der durch keinen Eckpunkt eines γ_j geht, muss jede auftretende Strecke entweder meiden oder in einem inneren Punkt schneiden. Folglich schneidet σ jedes γ_j in einer wohlbestimmten Anzahl von Punkten. Diese Anzahl beträgt am Anfang 1 und ändert sich bei jeder zulässigen Operation um 0 oder 2 (siehe die Figur). Somit schneidet σ den Streckenzug γ_m in einer ungeraden Anzahl von Punkten, und es ist auf keinen Fall $\gamma_m = [\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_0]$. Die Ausgangskurve γ_0 ist daher nicht nullhomotop. ┘

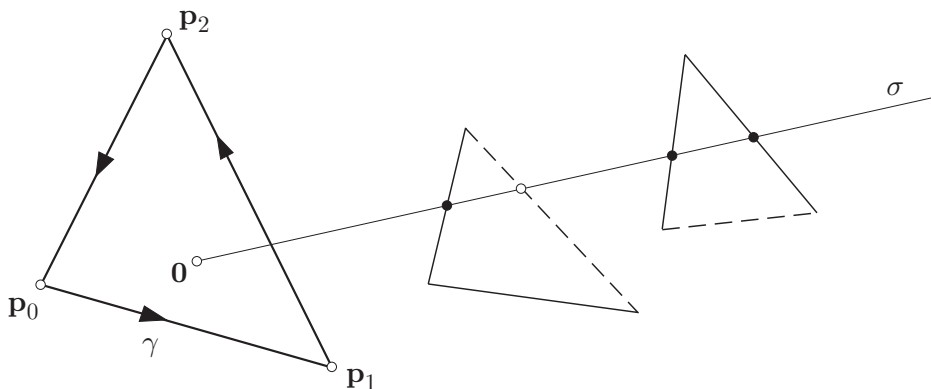


Fig. 14.8.3

In ähnlicher Weise zeigt man, dass die Menge $\mathbb{R}^3 \setminus \{z\text{-Achse}\}$ und der Volltorus nicht einfach zusammenhängend sind. — Die Menge $\Omega := \mathbb{R}^3$ hingegen ist einfach zusammenhängend:

┘ Es sei (2) ein beliebiger geschlossener Streckenzug in Ω . Wähle einen Punkt $\mathbf{p}^* \in \Omega$, der keiner der N Ebenen bzw. Geraden angehört, die durch die Punktetripel

$$\mathbf{0}, \mathbf{p}_{k-1}, \mathbf{p}_k \quad (1 \leq k \leq N), \quad \mathbf{p}_N := \mathbf{p}_0,$$

aufgespannt werden. Dann liegen die N Dreiecke mit den Eckpunkten \mathbf{p}^* , \mathbf{p}_{k-1} und \mathbf{p}_k in Ω , und wir können die für sternförmige Gebiete verwendete Konstruktion mit \mathbf{p}^* anstelle von $\mathbf{0}$ durchführen. ┘



Die Integrabilitätsbedingung

Wir kehren zurück zu den wirbelfreien Vektorfeldern und beweisen zunächst:

(14.36) *Ist \mathbf{K} ein wirbelfreies C^1 -Vektorfeld auf der offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, so gilt für jedes abgeschlossene ebene Dreieck Δ in Ω :*

$$\int_{\partial\Delta} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{x} = 0 .$$

□ Es sei

$$\mathbf{f} : \tilde{\Delta} \rightarrow \Delta, \quad \mathbf{u} \mapsto \mathbf{x} := \mathbf{f}(\mathbf{u})$$

eine (zum Beispiel lineare) Parameterdarstellung von Δ und $\tilde{\mathbf{K}}$ der Pullback von \mathbf{K} auf $\tilde{\Delta}$. Dann gilt nach (14.31) und der Greenschen Formel (14.18):

$$\int_{\partial\Delta} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{x} = \int_{\partial\tilde{\Delta}} \tilde{\mathbf{K}} \cdot d\mathbf{u} = \int_{\tilde{\Delta}} \operatorname{rot} \tilde{\mathbf{K}}(\mathbf{u}) \, d\mu(\mathbf{u}) .$$

Nach Hilfssatz (14.32) und nach Voraussetzung über \mathbf{K} ist aber

$$\operatorname{rot} \tilde{\mathbf{K}}(\mathbf{u}) = \operatorname{Rot} \mathbf{K}(\mathbf{f}(\mathbf{u})) \cdot (\mathbf{f}_{,1}(\mathbf{u}), \mathbf{f}_{,2}(\mathbf{u})) \equiv 0 . \quad \square$$

Damit kommen wir zu dem folgenden Hauptsatz:

(14.37) *Ein C^1 -Vektorfeld \mathbf{K} auf einer einfach zusammenhängenden offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann konservativ, wenn die infinitesimale Zirkulation $\operatorname{Rot} \mathbf{K}$ (in den Fällen $n = 2, 3$ die Rotation $\operatorname{rot} \mathbf{K}$ bzw. $\operatorname{rot} \mathbf{K}$) identisch verschwindet.*

□ Dass ein konservatives Feld wirbelfrei ist, wissen wir schon (Satz (14.10)). Zum Beweis der Umkehrung genügt es, eine Zusammenhangskomponente von Ω zu betrachten. Im weiteren nehmen wir daher an, Ω sei zusammenhängend, und wählen einen festen Punkt $\mathbf{p}_0 \in \Omega$. Jeder Punkt $\mathbf{p} \in \Omega$ ist Endpunkt eines in \mathbf{p}_0 beginnenden Streckenzuges, der ganz in Ω liegt. Sind γ_1 und γ_2 zwei derartige Streckenzüge von \mathbf{p}_0 nach \mathbf{p} , so ist $\gamma_1 - \gamma_2$ ein geschlossener Streckenzug in Ω und damit nach Voraussetzung über Ω nullhomotop. Nach Proposition (14.35) gibt es daher endlich viele Dreiecke $\Delta_j \subset \Omega$ ($1 \leq j \leq s$) mit

$$\gamma_1 - \gamma_2 = \sum_{j=1}^s \pm \partial\Delta_j ,$$

und nach dem eben bewiesenen Hilfssatz (14.36) gilt

$$\int_{\gamma_1 - \gamma_2} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{x} = 0 \quad \text{d.h.} \quad \int_{\gamma_1} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{x} = \int_{\gamma_2} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{x} .$$

Hieraus folgt: Das Integral

$$\int_{[\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}]} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{x} =: f(\mathbf{p})$$

hat für alle in Ω liegenden Streckenzüge von \mathbf{p}_0 nach \mathbf{p} denselben, nur von \mathbf{p} abhängigen Wert. Die angeschriebene Funktion $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ist somit wohldefiniert, und sie besitzt dann auch die Eigenschaft

$$f(\mathbf{p} + \mathbf{X}) = \int_{[\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}]} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{x} + \int_{[\mathbf{p}, \mathbf{p} + \mathbf{X}]} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{x} = f(\mathbf{p}) + \int_{[\mathbf{p}, \mathbf{p} + \mathbf{X}]} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{x} .$$

Hieraus folgt mit Lemma (14.8), dass f tatsächlich ein Potential von \mathbf{K} ist; das heisst, es gilt $\nabla f = \mathbf{K}$. Dies impliziert nach (14.4), dass \mathbf{K} konservativ ist. ┘

Beispiel ① zeigt, dass auf die Voraussetzung des einfachen Zusammenhangs nicht verzichtet werden kann. Für beliebige offene Mengen haben wir immerhin die folgende schwächere Aussage:

(14.38) Ein wirbelfreies C^1 -Vektorfeld \mathbf{K} auf einer offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ besitzt lokal ein Potential, das heisst: Zu jedem Punkt $\mathbf{p} \in \Omega$ gibt es eine Umgebung U dieses Punktes und eine Funktion $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\nabla f = \mathbf{K}|_U$.

┘ Jeder Punkt $\mathbf{p} \in \Omega$ besitzt eine einfach zusammenhängende Umgebung $U := U_\varepsilon(\mathbf{p}) \subset \Omega$. Wende nun den Satz (14.37) auf $\mathbf{K}|_U$ an. ┘

① (Forts.) Das Feld \mathbf{A} besitzt kein Potential, aber jeder Punkt $(x_0, y_0) \neq \mathbf{0}$ besitzt eine Umgebung $U := \{(x, y) \mid x_0x + y_0y > 0\}$, in der ein stetiges Argument $(x, y) \mapsto \phi(x, y)$ erklärt werden kann. Für dieses ϕ gilt $\nabla \phi = \mathbf{A}$. ○

Die Bedingung

$$\text{Rot } \mathbf{K} \equiv \mathbf{0} \quad (\text{bzw. } \text{rot } \mathbf{K} \equiv 0, \quad \mathbf{rot } \mathbf{K} \equiv \mathbf{0}) \quad (3)$$

ist also lokal für die Existenz eines Potentials notwendig und hinreichend. Sie erlaubt, durch Differenzieren nachzuprüfen, ob das Feld \mathbf{K} ein “unbestimmtes Integral” besitzt, und heisst daher **Integrabilitätsbedingung**. Wir wollen zum Schluss noch einmal darauf hinweisen, was (3) für die partiellen Ableitungen der Komponenten $K_i(x_1, \dots, x_n)$ ($1 \leq i \leq n$) von \mathbf{K} bedeutet (vgl. den Beweis von (14.10)): Die Bedingung (3) ist genau dann erfüllt, wenn für alle \mathbf{x} und für alle i und k gilt

$$\text{Rot } \mathbf{K}(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_k) = \frac{\partial K_k}{\partial x_i} - \frac{\partial K_i}{\partial x_k} = 0 .$$

Aus Symmetriegründen genügt es, die Indexvariablen den Bereich $1 \leq i < k \leq n$ durchlaufen zu lassen. Die so erhaltenen $\binom{n}{2}$ Gleichungen

$$\frac{\partial K_k}{\partial x_i} - \frac{\partial K_i}{\partial x_k} \equiv 0 \quad (1 \leq i < k \leq n)$$

drücken nichts anderes aus, als dass zusammengehörige Paare von gemischten zweiten Ableitungen eines allfälligen Potentials f übereinstimmen müssen.

④ Das im ganzen (x, y, z) -Raum definierte Feld

$$\mathbf{K} = (P, Q, R) := (4x^3 + 4xy^2 + 3yz^2, 4x^2y + 3xz^2, 6xyz)$$

genügt der Integrabilitätsbedingung: Es ist (vgl. (14.14))

$$R_y - Q_z = 6xz - 6xz \equiv 0$$

und in ähnlicher Weise

$$P_z - R_x \equiv 0, \quad Q_x - P_y \equiv 0.$$

Folglich ist \mathbf{K} konservativ, \mathbb{R}^3 ist ja einfach zusammenhängend. Ein Potential f von \mathbf{K} erhalten wir nach (14.7) wie folgt: Wir wählen $\mathbf{0}$ als Nullpunkt des Potentials und setzen

$$f(\mathbf{x}) := \int_{[\mathbf{0}, \mathbf{x}]} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{x} = \int_0^1 \mathbf{K}(t\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x} dt; \quad (4)$$

dabei haben wir für die Verbindungsstrecke $[\mathbf{0}, \mathbf{x}]$ die Parameterdarstellung $t \mapsto t\mathbf{x}$ ($0 \leq t \leq 1$) zugrundegelegt; der Punkt $\mathbf{x} = (x, y, z)$ ist im Augenblick fest. Man berechnet

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(t\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x} &= (4x^3 + 4xy^2 + 3yz^2)t^3 \cdot x + (4x^2y + 3xz^2)t^3 \cdot y + 6xyzt^3 \cdot z \\ &= (4x^4 + 8x^2y^2 + 12xyz^2)t^3, \end{aligned}$$

ferner $\int_0^1 t^3 dt = \frac{1}{4}$. Tragen wir dies in (4) ein, so ergibt sich f zu

$$f(x, y, z) = x^4 + 2x^2y^2 + 3xyz^2;$$

das allgemeinste Potential von \mathbf{K} unterscheidet sich hiervon um eine Konstante.

Anstelle der Strecke $[\mathbf{0}, \mathbf{x}]$ kann man auch einen aus drei achsenparallelen Strecken bestehenden Integrationsweg verwenden (Fig. 14.8.4). Die Rechnung gestaltet sich dann folgendermassen:

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= \int_0^x P(x', 0, 0) dx' + \int_0^y Q(x, y', 0) dy' + \int_0^z R(x, y, z') dz' \\ &= \int_0^x 4x'^3 dx' + \int_0^y 4x^2y' dy' + \int_0^z 6xyz' dz' \\ &= x^4 + 2x^2y^2 + 3xyz^2, \end{aligned}$$

wie vorher. ○

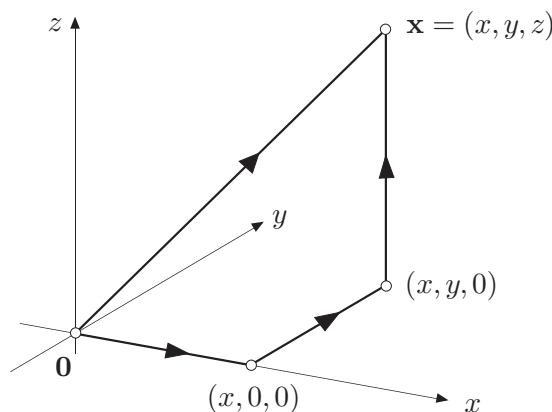


Fig. 14.8.4

Aufgaben

1. (a) Eine nichtverschwindende C^1 -Funktion f heisst ein **integrierender Faktor** für das C^1 -Vektorfeld \mathbf{K} , wenn das Feld $f\mathbf{K}$ wirbelfrei (und damit lokal "integabel") ist. Zeige: Besitzt \mathbf{K} einen integrierenden Faktor, so gilt notwendigerweise $\mathbf{K} \cdot \text{rot } \mathbf{K} = 0$. *Hinweis:* Benütze die in Aufgabe 14.3.1(b) gefundene Identität.
- (b) Verifiziere: Das Feld $\mathbf{K}(x, y, z) := (xyz + yz, xz, xy)$ erfüllt die Bedingung $\mathbf{K} \cdot \text{rot } \mathbf{K} = 0$. Dieses Feld besitzt in der Tat einen integrierenden Faktor f , der glücklicherweise nur von x abhängt. Bestimme f sowie ein Potential des Feldes $f\mathbf{K}$.
2. Lege die Parameter α, β, γ so fest, dass das Feld

$$\mathbf{K}(x, y, z) := (x + 2y + \alpha z, \beta x - 3y - z, 4x + \gamma y + 2z)$$

wirbelfrei wird. Das so erhaltene Feld besitzt ein Potential f . Bestimme f durch Integration von $\mathbf{0}$ aus.

3. Betrachte in der punktierten (x, y) -Ebene das Feld

$$\mathbf{K}(x, y) := \left(\frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}, \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \right).$$

- (a) Verifiziere: $\text{rot } \mathbf{K} \equiv 0$.
- (b) Berechne das Umlaufintegral $\int_{\gamma} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{z}$ für einen Kreis γ vom Radius $r > 0$ um $\mathbf{0}$.
- (c) Zeige: \mathbf{K} ist konservativ. *Hinweis:* Ein Potential lässt sich explizit angeben.

4. Beweise den folgenden Satz: Es sei \mathbf{K} ein wirbelfreies C^1 -Vektorfeld auf dem Kreisring $\Omega := \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^2 \mid a < |\mathbf{z}| < b\}$ in der Ebene, und die Bedingung

$$\int_{\gamma} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{z} = 0$$

sei für wenigstens einen umlaufenden Kreis γ erfüllt. Dann besitzt \mathbf{K} ein Potential auf Ω . *Hinweis:* Das Feld \mathbf{K} besitzt in einfach zusammenhängenden Teilgebieten $\Omega' \subset \Omega$ "lokale Potentiale". Man zeige mit möglichst wenig Aufwand, dass sich daraus ein auf ganz Ω definiertes Potential zusammensetzen lässt.