1

Grundbegriffe

1.1 Zur mathematischen Logik

Einige nützliche Zeichen

Die sogenannte mathematische Logik ist ein **Kalkül**, d.h. ein Gebäude von Rechenregeln. Die Objekte $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}(x)$, … dieses Kalküls sind allerdings nicht Zahlen oder Funktionen, sondern Aussagen, Aussageformen und deren Verknüpfungen.

Eine **Aussage** $\mathcal{A}$ ist eine Behauptung oder eine Formel, die so, wie sie da steht, entweder wahr ist oder falsch.

Bsp: "Die Basiswinkel von gleichschenkligen Dreiecken sind gleich", "$10^{100}+1$ ist eine Primzahl", "Camel ist eine Automarke".

Gegebene Aussagen $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ können durch die logischen Operationen

$\Longrightarrow$	hat zur Folge
$\Longleftrightarrow$	gilt genau dann, wenn
$\vee$	oder (gemeint ist: oder/und)
$\wedge$	und
$\neg$	nicht

zu komplizierteren Aussagen verbunden werden. Es geht dann zum Beispiel darum, den "Wahrheitswert" eines so erhaltenen Ausdrucks zu berechnen, wenn die Wahrheitswerte der darin auftretenden Variablen $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, … gegeben sind.

Eine **Aussageform** ist ein Text oder eine Formel mit einer freien Variablen x, die für jeden Wert x eines vereinbarten Grundbereichs in eine wahre oder in eine falsche Aussage übergeht.

Bsp: Die folgenden Aussageformen beziehen sich auf reelle Zahlen x, y und natürliche Zahlen n:

$$x^2 - 5x + 6 = 0\ ,$$
$$x^2 + y^2 < 1\ ,$$
$$1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} = \frac{1-x^n}{1-x}\ .$$

Im Zusammenhang mit Aussageformen treten weitere neuartige Zeichen auf:

$\forall$	für alle
$\exists$	es gibt
$\exists!$	es gibt genau ein
$\nexists$	es gibt kein

Diese sogenannten **Quantoren** erlauben Aussagen der folgenden Art:

Bsp:

$$\begin{aligned} \forall n \geq 1 :& \qquad 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}, \\ \exists!\, t \in [\,0,2\,] :& \qquad \cos t = 0\ , \\ \forall x\ \forall y :& \qquad x\,y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x=0) \vee (y=0)\ . \end{aligned}$$

Anstelle des $\forall$-Zeichens verwenden wir auch die folgende Klammerschreibweise, um den Geltungsbereich einer Formel anzugeben:

$$x^2 \geq 0 \qquad (x \in \mathbb{R})\ ; \qquad x_k \in A \quad (1 \leq k \leq n).$$

Ist aus dem Zusammenhang klar, dass eine Formel "für alle betrachteten x" gilt, so kann das $\forall$-Zeichen oder die Angabe des Geltungsbereichs auch weggelassen werden.

Bsp:

$$x > y > 0 \quad \Rightarrow \quad 0 < \frac{1}{x} < \frac{1}{y}\ .$$

Für unsere Zwecke brauchen wir von der mathematischen Logik nur die angegebenen Zeichen als praktische Abkürzungen sowie vor allem Klarheit über einige wenige Grunderfahrungen (s.u.).

Eine Bemerkung zum Thema "Gleichheitszeichen". In den drei Gleichungen

$$x^2 - 12x + 35 = 0\ , \qquad e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\ , \qquad \sin^2 t + \cos^2 t = 1$$

hat das Zeichen '=' ganz unterschiedliche Bedeutung. Die erste ist eine "Bestimmungsgleichung" und definiert eine gewisse Lösungsmenge. Die zweite ist eine "Definitionsgleichung" und legt das Symbol e als Abkürzung für den rechtsstehenden Ausdruck fest. Die dritte schliesslich ist eine "Identität"; sie gilt für alle t des vereinbarten Grundbereichs (z.B. $\mathbb{R}$). Um die intendierte Bedeutung eines Gleichheitszeichens auch graphisch sichtbar zu machen, verwenden wir in diesem Text die folgenden Schreibweisen:

Wird einer noch freien Variablen ein bestimmter Wert zugewiesen oder wird für ein umständlich dargestelltes Objekt (das Definiens) ein bestimmter Bezeichner (Definiendum) vereinbart, so benutzen wir in der Regel das Zeichen $:=$ bzw. $=:$. Der Doppelpunkt steht dabei auf der Seite des Definiendums. Diese Schreibweise wurde für das Programmieren erfunden und hat sich auch im mathematischen Gebrauch als äusserst praktisch erwiesen.

Bsp:

$$\begin{aligned} x &:= 3\,, \\ f(t) &:= \frac{t^2-1}{t^2+1}\,, \\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} &=: e\ . \end{aligned}$$

Im zweiten Beispiel wird nicht etwa der Variablen t, sondern der Funktionsvariablen f ein bestimmter "Wert" erteilt: f ist jetzt nicht mehr irgendeine Funktion, sondern die bestimmte, durch den angeschriebenen Ausdruck definierte Funktion (wobei sich der Definitionsbereich aus dem Zusammenhang ergeben sollte).

Gilt eine Gleichung für alle Werte der darin auftretenden Variablen, so benutzen wir gelegentlich das Zeichen $\equiv$.

Bsp:

$$\cos^2 t + \sin^2 t \equiv 1\ .$$

Das Zeichen $\doteq$ schliesslich steht für die Vorstellung "ist angenähert gleich". Was das mathematisch genau bedeutet, ist in jedem Fall wieder anders und bleibt ungesagt.

Bsp:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+x} &\doteq 1-x \qquad (x \doteq 0)\,, \\ n! &\doteq \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \qquad (n \to \infty)\ . \end{aligned}$$

Einige logische Grundtatsachen

Nun zu den angekündigten Grunderfahrungen! — Ein mathematischer Sachverhalt kann typischerweise die Gestalt

$$\mathcal{A}$$

annehmen; dabei ist $\mathcal{A}$ eine Aussage.

Bsp: $\mathcal{A}_1$: "Die Winkelsumme im Dreieck beträgt 180°."

$\mathcal{A}_2$: "Für beliebige $x > 0$, $y > 0$ gilt $\sqrt{xy} \leq \dfrac{x+y}{2}$."

Unter einem **direkten Beweis** der Aussage $\mathcal{A}$ versteht man folgendes: Ausgehend von einer Liste (stillschweigend oder ausdrücklich) vereinbarter Axiome wird nach bestimmten Schlussweisen eine Kette von richtigen Aussagen aufgeschrieben, deren letztes Glied mit $\mathcal{A}$ übereinstimmt.

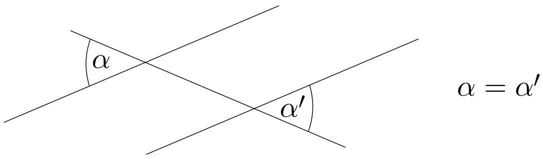

Fig. 1.1.1

Zum Beweis der obigen Aussage $\mathcal{A}_1$ benötigen wir das folgende Axiom: Wechselwinkel an Parallelen sind gleich (Fig. 1.1.1). Der Beweis von $\mathcal{A}_1$ ergibt sich dann unmittelbar aus der Figur 1.1.2; der Leser ist aufgefordert, die einzelnen Sätze der Schlusskette selber zu formulieren.

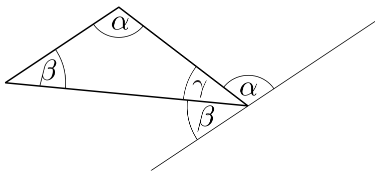

Fig. 1.1.2

Bei einem **indirekten Beweis** der Aussage $\mathcal{A}$ nimmt man ausser den vereinbarten Axiomen zusätzlich an, $\mathcal{A}$ sei falsch, das heisst: man fügt $\neg\mathcal{A}$ als Axiom hinzu, und kommt nach einer Kette von erlaubten Schlüssen zu einer offensichtlich falschen Aussage, etwa zu "$1 = 0$". Dies wird so interpretiert, dass das ursprünglich gegebene (und stillschweigend als widerspruchsfrei angenommene) Axiomensystem durch das offenbar falsche Axiom $\neg\mathcal{A}$ verschmutzt worden ist; und nach dem "Prinzip des ausgeschlossenen Dritten" zieht man daraus den Schluss, dass in Wirklichkeit $\mathcal{A}$ zutrifft.

Die Negation der Aussage $\mathcal{A}_2$ lautet folgendermassen:

$\neg\mathcal{A}_2$: "Es gibt zwei Zahlen $x > 0$ und $y > 0$ mit $\sqrt{xy} > \dfrac{x+y}{2}$."

Hieraus folgt nach den Regeln über das Rechnen mit Ungleichungen nacheinander

$$\begin{aligned} 4xy &> (x+y)^2 \ , \\ 0 &> (x-y)^2 \ . \end{aligned}$$

Die zuletzt angeschriebene Formel widerspricht aber den in $\mathbb{R}$ geltenden Grundsätzen. Folglich muss $\mathcal{A}_2$ zutreffen.

Mathematische Sachverhalte erscheinen weiter in der Form der sogenannten **Implikation**:

$$\mathcal{A} \implies \mathcal{B}\,, \tag{1}$$

zum Beispiel in der Figur "Voraussetzung $\Rightarrow$ Behauptung". Interpretation: Die Aussage $\mathcal{A}$ trifft manchmal zu, manchmal auch nicht. Immer, wenn $\mathcal{A}$ zutrifft, trifft auch $\mathcal{B}$ zu. $\mathcal{B}$ kann aber auch zutreffen, wenn $\mathcal{A}$ nicht zutrifft. In anderen Worten: Ist (1) wahr, so braucht die **Umkehrung**

$$\mathcal{B} \implies \mathcal{A}$$

von (1) noch lange nicht wahr zu sein.

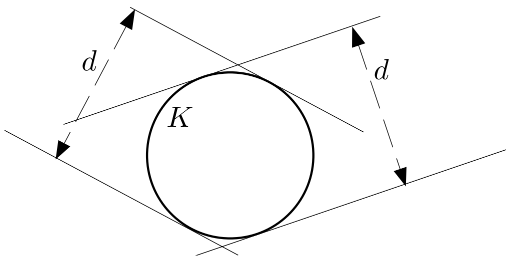

Fig. 1.1.3

① Es geht um konvexe ebene Bereiche K (Fig. 1.1.3). Ein derartiger Bereich besitzt in jedem Randpunkt eine sogenannte **Stützgerade**; das ist eine Gerade, die K trifft, aber nicht zerlegt. Betrachte die beiden folgenden Aussagen:

$\mathcal{A}$: "K ist eine Kreisscheibe."

$\mathcal{B}$: "Je zwei parallele Stützgeraden (Tangenten) von K haben denselben Abstand."

Offensichtlich gilt $\mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{B}$. Die Umkehrung $\mathcal{B} \Longrightarrow \mathcal{A}$ ist aber falsch, denn es gibt **Bereiche konstanter Breite**, die nicht Kreise sind, zum Beispiel das sogenannte **Reuleaux-Dreieck** (Fig. 1.1.4). ○

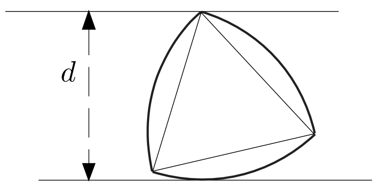

Fig. 1.1.4

Logisch äquivalent zur Implikation (1) ist deren sogenannte **Kontraposition**

$$\neg\mathcal{B} \implies \neg\mathcal{A} . \tag{2}$$

Interpretation: Wenn $\mathcal{B}$ nicht zutrifft, dann sicher auch $\mathcal{A}$ nicht. Der Leser ist aufgefordert, hier einen Moment innezuhalten und sich durch Nachdenken davon zu überzeugen, dass (1) und (2) gleichwertig sind. Oft ist $\mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{B}$ der interessierende und nützliche Sachverhalt, aber die Kontraposition ist leichter zu beweisen.

② Gegeben sind ein gleichseitiges Dreieck D der Seitenlänge 2 in der Ebene sowie ein Vorrat an beweglichen Dreiecken der Seitenlänge $a < 2$. Es geht darum, das grosse Dreieck mit Hilfe von kleinen zu überdecken. (Überlappungen sind ausdrücklich zugelassen, siehe die Fig. 1.1.5) Betrachte die beiden folgenden Aussagen:

$\mathcal{A}$: D lässt sich mit 5 kleinen Dreiecken überdecken.

$\mathcal{B}$: D lässt sich mit 4 kleinen Dreiecken überdecken.

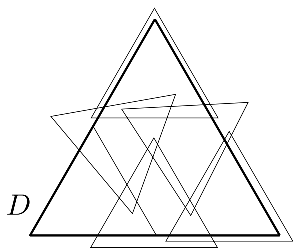

Fig. 1.1.5

Wir behaupten, dass der folgende überraschende Sachverhalt zutrifft:

$$\mathcal{A} \implies \mathcal{B} . \tag{3}$$

Stattdessen beweisen wir die Kontraposition von (3), das heisst: Wir zeigen $\neg\mathcal{B} \Rightarrow \neg\mathcal{A}$.

Angenommen, 4 kleine Dreiecke reichen nicht aus. Ein Blick auf die Fig. 1.1.6 zeigt, dass dann notwendigerweise $a < 1$ ist. Ein gleichseitiges Dreieck der Seitenlänge < 1 kann aber höchstens einen der in Fig. 1.1.6 markierten Punkte überdecken, und da es sechs derartige Punkte hat, reichen 5 Dreiecke nicht aus für eine vollständige Überdeckung von D. ○

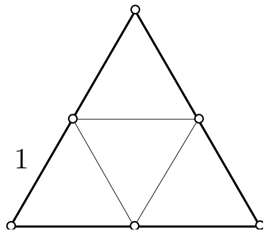

Fig. 1.1.6

Noch ein Wort zum Gebrauch der sogenannten **Quantoren** $\forall$ und $\exists$. Viele mathematische Sachverhalte haben ja die Form

$$\forall x : \ \mathcal{A}(x) \qquad \text{bzw.} \qquad \exists x : \ \mathcal{A}(x) \ .$$

Bsp:

$$\forall n \geq 1 : \quad 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2} \ ,$$
$$\exists t \in [\,0, 2\,] : \quad \cos t = 0 \ .$$

Im allgemeinen werden wir unsere Theoreme (mathematischen Sätze) in Worten formulieren. Das tönt dann typischerweise so: "Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $N \geq 0$, so dass für alle $x \geq N$ gilt: $\ldots$." Wenn man nun diese Verschachtelung logisch analysiert, so stellt man fest, dass da hintereinandergeschaltete Quantoren am Werk sind:

$$\forall \varepsilon > 0 \Bigl(\exists N \geq 0 \ \bigl(\forall x \geq N \ : \ \ \ldots \,\bigr) \Bigr)$$

(die Klammern werden üblicherweise weggelassen). Betreffend den Umgang mit derartigen Verschachtelungen muss man sich folgendes merken:

(a) Zwei *benachbarte gleiche* Quantoren dürfen vertauscht werden.

(b) *Verschiedene* Quantoren dürfen auf keinen Fall vertauscht werden.

③ Werden in der Aussage

$$\forall c \geq 0 \ \ \forall n \geq 1 \ \ \exists! \ \xi \geq 0 \ : \quad \xi^n = c$$

(dieses ξ ist die n**-te Wurzel** aus c) die beiden $\forall$-Quantoren vertauscht, so resultiert die gleichbedeutende Aussage

$$\forall n \geq 1 \ \ \forall c \geq 0 \ \ \exists! \ \xi \geq 0 \ : \quad \xi^n = c \ .$$

○

④ Der bekannte **Fundamentalsatz der Algebra** lautet: Jedes Polynom $p(\cdot)$,

$$p(z) := z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 \ ,$$

mit komplexen Koeffizienten besitzt wenigstens eine Nullstelle $\zeta \in \mathbb{C}$. In Zeichen:

$$\forall p(\cdot) \ \ \exists \zeta \in \mathbb{C} \ : \quad p(\zeta) = 0 \ .$$

Werden hier die Quantoren vertauscht, so kommt offensichtlicher Unsinn heraus:

$$\exists \zeta \in \mathbb{C} \ \ \forall p(\cdot) \ : \quad p(\zeta) = 0 \ .$$

("Es gibt eine komplexe Zahl ζ, so dass jedes Polynom mit komplexen Koeffizienten an der Stelle ζ den Wert 0 hat.") ○

Bei abstrakteren Situationen ist es schon schwieriger, die Reihenfolge der Quantoren im Griff zu behalten:

⑤ Die Definition der Konvergenz von Folgen lautet (wir werden später in aller Ruhe darauf eingehen): Eine Zahlfolge $x_.$ konvergiert gegen die Zahl ξ, wenn es zu jeder vorgegebenen Toleranz $\varepsilon > 0$ ein n_0 gibt, so dass alle x_n mit Nummer $n > n_0$ weniger als ε von ξ entfernt sind (siehe die Fig. 1.1.7). In Zeichen:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists n_0 \ \ \forall n > n_0 \ : \quad |x_n - \xi| < \varepsilon \ .$$

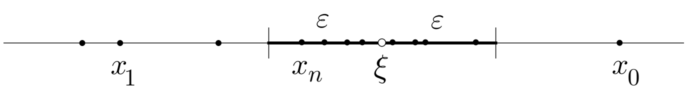

Fig. 1.1.7

Unsinnig ist hingegen die nach Vertauschen der ersten beiden Quantoren resultierende Konvergenzbedingung

$$\exists n_0 \ \ \forall \varepsilon > 0 \ \ \forall n > n_0 \ : \quad |x_n - \xi| < \varepsilon \ ,$$

denn das hiesse ja: Es gibt ein n_0, so dass alle x_n mit Nummer $n > n_0$ jede noch so scharfe Toleranzbedingung erfüllen, und das ist natürlich nur möglich, wenn alle diese x_n gleich ξ sind — eine höchst uninteressante Art von "Konvergenz". ○

Aufgaben

1. Aus einem Zoologiebuch: "Jede ungebrochselte Kalupe ist dorig und jede foberante Kalupe ist dorig. In Quasiland gibt es sowohl dorige wie undorige Kalupen." — Welche der nachstehenden Schlüsse über die Fauna von Quasiland sind zulässig?
   (a) Es gibt sowohl gebrochselte wie ungebrochselte Kalupen.
   (b) Es gibt gebrochselte Kalupen.
   (c) Alle undorigen Kalupen sind gebrochselt.
   (d) Einige gebrochselte Kalupen sind unfoberant.
   (e) Alle gebrochselten Kalupen sind unfoberant.

2. Hier ist eine Aussage über Quorge:
   (a) Ist ein Quorg glavul, so ropanzt er.
   Formuliere (b) die Negation, (c) die Umkehrung, (d) die Kontraposition der Aussage (a). Welche Implikationen bestehen zwischen (a), (b), (c) und (d)?

3. Welche der in Fig. 1.1.8 abgebildeten Spielkarten muss man mindestens umdrehen, um mit Sicherheit die folgende Frage (∗) beantworten zu können?
   (∗) "Sind alle Karten mit schraffierter Rückseite Asse?"

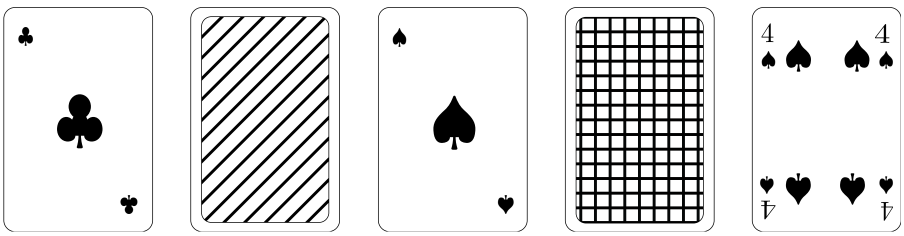

Fig. 1.1.8

4. Von den folgenden Aussagen ist genau eine richtig:
   (a) Fritz hat mehr als tausend Bücher.
   (b) Fritz hat weniger als tausend Bücher.
   (c) Fritz hat mindestens ein Buch.
   Wieviele Bücher hat Fritz?

5. Gegeben sind eine kreisrunde Bisquitdose sowie ein Vorrat von gleichgrossen kreisrunden Plätzchen. Zeige: Lassen sich 6 Plätzchen nebeneinander in die Dose legen, so auch deren 7. *Hinweis:* Beweise die Kontraposition; vgl. Beispiel 2.

6. Die fünf Teile der Figur 1.1.9 bestehen aus insgesamt 26 Einheitsquadraten. Sie sollen "achsenparallel" und ohne Überlappen in eine Schachtel mit quadratischer Grundfläche der Seitenlänge 5.94 gelegt werden. Zeige, dass das nicht geht. *Hinweis:* Es geht nicht einmal dann, wenn man die fünf Teile in ihre Einzelquadrate zerschneiden darf.

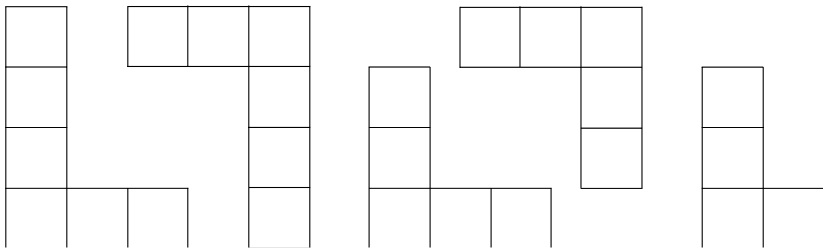

Fig. 1.1.9

1.2 Mengen

Reden über Mengen

Was eine **Menge** ist, bleibt undefiniert. Wir können nur versuchen zu erklären, wie man vernünftig darüber redet. Ein beliebiges Objekt x und eine Menge A stehen *entweder* in der Relation

$x \in A$: "x ist **Element** (auch: **Punkt**) der Menge A", kurz: "x in A",

oder in der Relation

$x \notin A$: "x ist *nicht* Element der Menge A", kurz: "x nicht in A".

Sind a, b, c, d, …, p, q gegebene Objekte, so bezeichnet zum Beispiel

$$\{a, c, p\}$$

die Menge, die genau die Objekte a, c und p umfasst, und

$$\{a, b, \ldots, q\}$$

die Menge, die die sämtlichen Objekte a, b, …, q umfasst. Insbesondere ist $\{a\}$ die Menge, die aus dem einzigen Element a besteht (das ist nicht dasselbe wie der *Punkt* a). Merke: Ein Objekt kommt in einer Menge höchstens einmal vor, auch wenn die Ausgangsliste Mehrfachnennungen aufweist.

Das Symbol $\emptyset$ bezeichnet die **leere Menge**. Eine Menge A, die den Test

$$A \neq \emptyset\,, \qquad x \in A \;\wedge\; y \in A \quad \Rightarrow \quad x = y \tag{1}$$

besteht, heisst ein **Singleton**; denn sie enthält genau ein Element. Mit der Bezeichnung $\}A\{$ wird dieses Element aus A extrahiert.

Bsp: $\}\{a\}\{ = a$

Ist X eine beliebige Menge und ist $\mathcal{A}(x)$ eine Aussageform mit einer freien Variablen x, die für jedes $x \in X$ entweder zutrifft oder nicht, so bezeichnet

$$\bigl\{x \in X \mid \mathcal{A}(x)\bigr\}$$

die Menge derjenigen $x \in X$, für die $\mathcal{A}(x)$ zutrifft. Besteht kein Zweifel (oder will man im Unbestimmten lassen), welche "Grundmenge" X gemeint ist, so schreibt man einfach $\bigl\{x \bigm| \mathcal{A}(x)\bigr\}$.

Für gewisse Standardmengen haben sich Standardbezeichnungen eingebürgert, nämlich $\mathbb{N}$ für die (Menge der) natürlichen Zahlen inklusive 0, $\mathbb{Z}$ für die ganzen Zahlen, $\mathbb{Q}$ für die rationalen Zahlen, $\mathbb{R}$ für die reellen Zahlen und $\mathbb{C}$ für die komplexen Zahlen. Von diesen Zahlensystemen wird in den folgenden Kapiteln ausführlich die Rede sein; der Leser ist aber sicher soweit mit ihnen vertraut, dass wir schon jetzt in Beispielen darauf Bezug nehmen dürfen. — Die zweielementige Menge $\{0, 1\}$ bezeichnen wir mit $\mathbb{B}$ (für *Bits*).

Bsp: $0 \in \mathbb{N}, \quad x \in \mathbb{N} \;\Rightarrow\; x+1 \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{2} \notin \mathbb{N}\,;$

$$x,\ y \in \mathbb{Z} \;\Rightarrow\; x \cdot y \in \mathbb{Z}, \qquad x \in \mathbb{Z} \;\Rightarrow\; \frac{x(x+1)(x+2)}{6} \in \mathbb{Z}\,;$$

$$-\tfrac{3}{5} \in \mathbb{Q}, \quad \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}, \quad a \in \mathbb{Q} \;\Rightarrow\; \frac{2a}{a^2+1} \in \mathbb{Q}\,;$$

$$\big\{x \in \mathbb{R} \;\big|\; x^4 - 2x^2 = 0\big\} = \{0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\}\,,$$

$$\big\{x \in \mathbb{Q} \;\big|\; x^4 - 2x^2 = 0\big\} = \{0\}\,;$$

$$\big\{z \in \mathbb{C} \;\big|\; z = \bar{z} \;\;\wedge\;\; z^2 = -4\big\} = \emptyset\,.$$

Die Menge A ist eine **Teilmenge** der Menge B, in Zeichen:

$$A \subset B\,,$$

wenn aus $x \in A$ folgt: $x \in B$. Die hiermit erklärte **Inklusion**, eine Relation zwischen Mengen, ist **transitiv**: Aus $A \subset B$ und $B \subset C$ folgt $A \subset C$.

Zwei Mengen A und B sind **gleich**, in Zeichen:

$$A = B\,,$$

wenn jede eine Teilmenge der andern ist:

$$A = B \qquad :\Longleftrightarrow \qquad A \subset B \;\;\wedge\;\; B \subset A\,.$$

Die Gleichheit von zwei auf verschiedene Arten beschriebenen Mengen lässt sich in einfachen Fällen durch eine Schlusskette der Gestalt

$$x \in A \iff \ldots \iff \ldots \qquad \ldots \iff x \in B$$

beweisen; in schwierigeren Fällen braucht es zwei über getrennte Wege laufende Ketten

$$x \in A \Longrightarrow \ldots \Longrightarrow \ldots \qquad \ldots \Longrightarrow x \in B$$

und

$$x \in B \Longrightarrow \ldots \Longrightarrow \ldots \qquad \ldots \Longrightarrow x \in A\,.$$

1 Die folgende Situation kommt immer wieder vor: Wir sollen eine Gleichung oder ein Gleichungssystem auflösen. Was ist damit gemeint? Die gegebene Gleichung,

Bsp: $$\sqrt{2x-1} = x - 2\,,$$

definiert eine Lösungsmenge L. Anstelle dieser "impliziten" Darstellung von L ist eine "explizite" Darstellung in der Form einer Liste verlangt. Typischer

Weise wird man nun mit Hilfe von geeigneten algebraischen Operationen aus den gegebenen Gleichungen neue, einfachere Gleichungen herleiten, an denen die gewünschte Liste unmittelbar abgelesen werden kann. In unserem Beispiel erhält man so nacheinander folgendes:

$$\sqrt{2x-1} = x-2 \quad\Longrightarrow\quad 2x-1 = x^2-4x+4 \quad\Longrightarrow$$
$$x^2-6x+5=0 \quad\Longrightarrow\quad x = \frac{6 \pm \sqrt{36-20}}{2} \quad\Longrightarrow\quad x=5 \ \vee\ x=1\,,$$

worauf man die Liste $L' := \{5,1\}$ als Lösungsmenge präsentieren wird. In Wirklichkeit hat man aber nur $L \subset L'$ bewiesen und muss nun durch Einsetzen verifizieren, dass die umgekehrte Inklusion $L' \subset L$ ebenfalls zutrifft. Dabei stellt man fest, dass die Zahl 5 die gegebene Gleichung erfüllt, die Zahl 1 aber nicht. Folglich ist $L = \{5\}$. $\bigcirc$

Mengenoperationen

Die folgenden Verknüpfungsoperationen erlauben, aus gegebenen Mengen neue Mengen zu bilden:

— Die **Vereinigung** $A \cup B$ umfasst alle Objekte, die mindestens einer der beiden Mengen A und B angehören:

$$x \in A \cup B \qquad :\Longleftrightarrow \qquad x \in A \ \ \vee\ \ x \in B\ .$$

— Der **Durchschnitt** $A \cap B$ umfasst alle Objekte, die sowohl der Menge A wie der Menge B angehören:

$$x \in A \cap B \qquad :\Longleftrightarrow \qquad x \in A \ \ \wedge\ \ x \in B\ .$$

Zwei Mengen A und B sind **disjunkt**, in Zeichen:

$$A \supset\!\subset B\,,$$

falls ihr Durchschnitt $A \cap B$ leer ist; die beiden Mengen **schneiden sich**, in Zeichen:

$$A \supset\!\!\!\subset B\,,$$

falls es wenigstens einen Punkt x gibt, der beiden Mengen angehört.

— Die **Differenzmenge** $A \backslash B$ enthält diejenigen Objekte, die wohl der Menge A, nicht aber der Menge B angehören:

$$x \in A \setminus B \qquad :\Longleftrightarrow \qquad x \in A \ \ \wedge\ \ x \notin B\ .$$

Sind alle betrachteten Mengen Teilmengen einer vereinbarten "Grundmenge" X, so heisst $\complement A := X \setminus A$ das **Komplement** der Menge A.

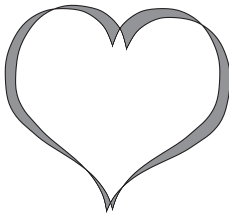

Fig. 1.2.1

— Die **symmetrische Differenz** $A \vartriangle B$ zweier Mengen A und B besteht aus denjenigen x, die genau einer der beiden Mengen angehören:

$$A \vartriangle B := (A \cup B) \setminus (A \cap B) \ .$$

Die symmetrische Differenz ist "klein", wenn die beiden Mengen "fast übereinstimmen" (Fig. 1.2.1).

Die Verknüpfungsoperationen gehorchen gewissen Rechengesetzen. Wir zählen einige davon auf:

$$A \cup B = B \cup A, \qquad A \cap B = B \cap A \qquad (\textbf{Kommutativität})\ ,$$

$$(A\cup B)\cup C = A\cup(B\cup C), \qquad (A\cap B)\cap C = A\cap(B\cap C) \qquad (\textbf{Assoziativität}),$$

$$\left.\begin{aligned} A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C)\ , \\ A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C) \end{aligned}\right\} \quad (\textbf{Distributivgesetze});$$

$$A \cup \complement A = X\ , \qquad A \supset\subset \complement A\ , \qquad \complement\,(\complement A) = A\ ,$$

$$\complement(A \cup B) = \complement A \cap \complement B\ , \qquad \complement(A \cap B) = \complement A \cup \complement B\ , \tag{2}$$

$$A \setminus (A \setminus B) = A \cap B\ . \tag{3}$$

⌜ Kommutativität und Assoziativität von $\cup$ und $\cap$ ergeben sich unmittelbar aus den entsprechenden Eigenschaften der "logischen Verknüpfungen" $\vee$ und $\wedge$. Letztere sind Grunderfahrungen des Denkens und lassen sich nicht weiter zurückführen.

Wir überspringen einige der angeführten Regeln und beweisen gleich die erste Formel (2): Ein Element $x \in X$ gehört genau dann zu $\complement(A\cup B)$, wenn es nicht in $A \cup B$, das heisst: weder in A noch in B liegt, und dies wiederum trifft genau dann zu, wenn x sowohl der Menge $\complement A$ wie der Menge $\complement B$ angehört.

Die beiden Mengen $A \setminus B$ und $A \cap B$ sind disjunkt, und ihre Vereinigung ist A. Hieraus folgt (3). ⌟

Es sei X eine beliebige Menge. Die Menge $\mathcal{P}(X)$ aller verschiedenen Teilmengen von X, inklusive $\emptyset$ und X, heisst **Potenzmenge** von X. Auch die Bezeichnung 2^X ist üblich. $\mathcal{P}(X)$ ist nicht eine Vereinigung von Mengen, sondern eine Menge von Mengen.

② Die Potenzmenge $\mathcal{P}(\emptyset)$ besteht aus dem einzigen Element $\emptyset$. Die Menge $\mathcal{P}(\{0\})$ besteht aus zwei Elementen, nämlich $\emptyset$ und $\{0\}$. Die Menge $\mathcal{P}(\mathbb{B})$ besitzt die vier Elemente $\emptyset$, $\{0\}$, $\{1\}$ und $\mathbb{B}$. — Allgemein besitzt eine n-elementige Menge genau 2^n verschiedene Teilmengen. ○

Kartesisches Produkt

Die Zusammenfassung von zwei beliebigen Objekten a und b zu einem einzigen zweistelligen Objekt (a, b) wird als **Paarbildung** bezeichnet. Das **geordnete Paar** (a, b) besitzt eine wohlbestimmte **erste Komponente** a und eine wohlbestimmte **zweite Komponente** b; zwei Paare sind genau dann gleich, wenn sie komponentenweise übereinstimmen:

$$(a, b) = (c, d) \qquad \Longleftrightarrow \qquad a = c \quad \wedge \quad b = d \; . \tag{4}$$

Der Paarbegriff lässt sich zum Beispiel folgendermassen auf schon erklärte Mengenbildungen zurückführen:

$$(a, b) := \big\{\{a, 0\}, \{b, 1\}\big\} \; .$$

⌜ Wir müssen zeigen, dass hiermit (4) garantiert ist. Ist $a = c$ und $b = d$, so trifft natürlich auch

$$\big\{\{a, 0\}, \{b, 1\}\big\} = \{\{c, 0\}, \{d, 1\}\} \tag{5}$$

zu. — Gilt umgekehrt (5), so ist von vorneherein $\{a, 0\} = \{c, 0\}$, oder es gilt gleichzeitig

$$\{a, 0\} = \{d, 1\} \; , \qquad \{c, 0\} = \{b, 1\} \; .$$

Im ersten Fall folgt $a = c$ oder $a = 0$ und dann auch $c = 0$; im zweiten Fall müssen a und c beide $= 1$ sein. Jedenfalls ist $a = c$, und analog beweist man $b = d$. ⌟

③ Die beiden Lösungen der quadratischen Gleichung $x^2 - 5x + 6 = 0$ bilden die zweielementige Menge $\{2, 3\}$; die Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x + 2y &= 5 \\ 4x - y &= 2 \end{aligned}$$

hingegen ist das geordnete Paar $(x, y) := (1, 2)$. ○

Sind A und B zwei beliebige Mengen, so lässt sich die Menge aller aus je einem Element von A und von B bestehenden Paare konstruieren. Diese Menge

$$A \times B := \{(a, b) \mid a \in A,\ b \in B\}$$

heisst das **kartesische Produkt** der Mengen A und B, da Descartes mit der Erfindung des Koordinatenkreuzes (Fig. 1.2.2) als erster die Ebene als Produkt von zwei reellen Achsen aufgefasst hat. (Es gab natürlich schon Vorläufer.)

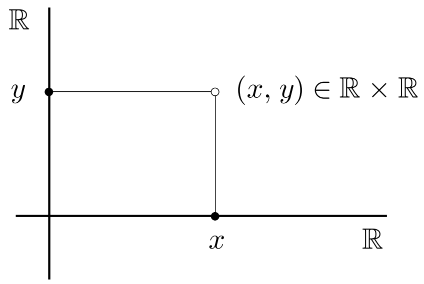

Fig. 1.2.2

③ Das kartesische Produkt der beiden Mengen $M := \{a, b, c\}$ und $\mathbb{B}$ ist die sechselementige Menge

$$M \times \mathbb{B} = \{(a,0), (a,1), (b,0), (b,1), (c,0), (c,1)\}\ .$$

○

Die natürliche Fortsetzung des Paarbegriffs ist der Begriff des "geordneten n-Tupels". Wir werden darauf zurückkommen.

Aufgaben

1. Stelle die folgenden Mengen in geeigneten Figuren anschaulich dar:
   (a) $\{t \in \mathbb{R} \mid 4 < t^2 \le 16\}$, (b) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| + |z+1| = 8\}$,
   (c) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0,\ x + y + z = 1\}$,
   (d) $\left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \dfrac{1}{1-x} < 1 - \dfrac{x}{2}\right\}$,
   (e) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \le |x| + |y| \le 2\}$,
   (f) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x - y| + 2 \le |x|\}$.
2. Zwei an sich unabhängige reelle Grössen x und y sind miteinander verknüpft durch die Einschränkung

$$x^2 + 6x \ \le\ 8y - y^2\ . \qquad (*)$$

(a) Man verschaffe sich eine Übersicht über die Gesamtheit der möglichen "Zustände" (x, y). Gemeint ist: Man zeichne eine Figur.

(b) Welchen Wert kann die Grösse x unter der Bedingung $(*)$ höchstens annehmen, und wie müsste y gewählt werden, damit dieser Maximalwert von x tatsächlich realisiert werden kann?

3. Es sei A das Innere des Oktaeders mit den Ecken $(\pm 1, 0, 0)$, $(0, \pm 1, 0)$, $(0, 0, \pm 1)$. Man stelle A auf möglichst einfache Weise in der Form $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \ldots\}$ dar.

4. Naef (ein Spielzeugfabrikant) produziert einen kugelförmigen Spielwürfel, auf dem die Zahlen von 1 bis 6 aufgemalt sind. Wenn dieser "Würfel" auf einer horizontalen Ebene zur Ruhe kommt, ist allemal eine Zahl zuoberst. Überlege, wie dieses Objekt funktioniert, und stelle dessen Hauptkomponente in der Form $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \ldots\}$ dar.

5. Es sei S die Menge aller natürlichen Zahlen ohne quadratischen Teiler, T die Menge aller natürlichen Zahlen mit genau drei Primfaktoren (1 ist keine Primzahl) und U die Menge aller natürlichen Zahlen ≤ 200. Bestimme $S \cap T \cap U$.

6. Bestimme die Lösungsmenge $L \subset \mathbb{R}^2$ des folgenden Gleichungssystems:

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{x+1} + y &= 1 \\ 2x - \sqrt{24y + 25} &= 5 \end{aligned}\right\} .$$

Hinweis: $\sqrt{c}$ ist nur für $c \geq 0$ definiert und bezeichnet die nichtnegative Lösung t der Gleichung $t^2 = c$.

7. Erfinde einen Test im Sinn von 1.2.(1), der die zweielementigen Mengen charakterisiert.

8. Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{Z}$ heisst **periodisch**, wenn es eine ganze Zahl $p > 0$ gibt mit

$$x \in A \quad \Longleftrightarrow \quad x + p \in A .$$

(a) Zeige: Die periodischen Teilmengen von $\mathbb{Z}$ bilden eine **Algebra**, das heisst: Sind A und B periodische Teilmengen von $\mathbb{Z}$ mit Perioden p und q, so sind auch die Mengen $\complement A$, $A \cup B$ und $A \cap B$ periodisch.

(b) Zeige: Es gibt unendlich viele Primzahlen. *Hinweis:* Die Menge N_p der nicht durch p teilbaren Zahlen ist periodisch. Argumentiere über die Menge U der Zahlen ohne Primteiler.

1.3 Relationen

Beziehungen zwischen Individuen

Es sei X eine beliebige endliche oder unendliche Menge. Eine **Relation**, genau: eine **zweistellige** oder **binäre Relation** auf X ist nichts anderes als eine Teilmenge $R \subset X \times X$, mit der aber besondere Absichten verfolgt werden: Die Teilmenge R codiert eine bestimmte "Beziehung", die zwischen je zwei Individuen $x \in X$ und $y \in X$ vorliegen kann oder auch nicht. Im Sinn dieser Interpretation schreibt man $x\,R\,y$, gelesen "x steht in der Relation R zu y", anstelle von $(x, y) \in R$ und $x \not R\, y$ anstelle von $(x, y) \notin R$. Wir verwenden hier und im folgenden den Buchstaben R als Variable für eine beliebige Relation. Sobald aber eine ganz bestimmte Relation gemeint ist, tritt an die Stelle von R ein suggestives Zeichen wie

$$= \,,\ < \,,\ \sim \,,\ \mapsto \,,\ \subset \,,\ \not\simeq \,,\ \perp \,,\ \asymp \,,\ \ldots \quad .$$

Es folgt eine Liste der wichtigsten Eigenschaften, die Relationen haben können:

Die Relation R ist **reflexiv**, wenn für alle $x \in X$ gilt: $x\,R\,x$.

R ist **symmetrisch**, wenn aus $x\,R\,y$ folgt: $y\,R\,x$.

R ist **transitiv**, wenn aus $x\,R\,y$ und $y\,R\,z$ folgt: $x\,R\,z$.

R ist **identitiv**, auch: **antisymmetrisch**, wenn aus $x\,R\,y$ und $y\,R\,x$ folgt: $x = y$.

Ordnungsrelationen

Eine Ureigenschaft jeder Art von "Ordnung" ist natürlich die Transitivität:

$$xRy \quad \wedge \quad yRz \qquad \Longrightarrow \qquad xRz\ .$$

Je nach Zusatzeigenschaften unterscheidet man im weiteren verschiedene Typen von solchen "Ordnungen" (schwache Ordnung, Halbordnung und andere). Man verwendet dafür suggestive Zeichen wie

$$< \,, \quad \leq \,, \quad \subset \,, \quad \triangleleft\,;$$

dabei sollen $x < y$ und $y > x$ (analog für die übrigen) dasselbe bedeuten.

Für uns wichtig ist der Begriff der **totalen Ordnung**. Eine Menge X heisst **total** oder **linear geordnet**, kurz: **geordnet**, durch die transitive Relation '$<$', falls für je zwei Elemente x, $y \in X$ genau eines der folgenden zutrifft:

$$x < y\,, \qquad x = y\,, \qquad x > y\ .$$

Für den Sachverhalt '$x < y \quad \vee \quad x = y$' schreibt man '$x \leq y$'.

① Die "gewöhnliche" Ordnung der natürlichen oder auch der reellen Zahlen ist eine totale Ordnung im definierten Sinn. ○

② Es sei A eine vorgegebene geordnete Menge, zum Beispiel

$$A := \{\square,\ \mathtt{a},\ \mathtt{b},\ \mathtt{c},\ \ldots,\ \mathtt{z},\ \mathtt{0},\ \mathtt{1},\ \ldots,\ \mathtt{9}\}\ .$$

Ein **Wort** der **Länge** n über dem **Alphabet** A ist nichts anderes als ein n-Tupel $(x_1, \ldots, x_n) \in A^n$ (für den Begriff des n-Tupels siehe Abschnitt 1.4). Um die Menge aller denkbaren Worte linear zu ordnen, bringen wir alle auf dieselbe (unendliche) Länge, indem wir jedem Wort eine unendliche Folge $\square, \square, \square, \ldots$ von Leerschlägen anhängen. Die entstehende Menge von "Buchstabenfolgen"

$$x. := (x_1, x_2, x_3, \ldots)\ , \qquad x_k \in A \quad (k \geq 1)\ ,$$

wird durch folgende Vorschrift **lexikographisch geordnet**:

$$x. < y. \qquad :\Longleftrightarrow \qquad \exists k_0 \geq 1 : \quad x_k = y_k\ (k < k_0) \quad \wedge \quad x_{k_0} < y_{k_0}\ .$$

○

Äquivalenzrelationen

Eine reflexive, symmetrische und transitive Relation $\sim$ auf einer Menge X wird **Äquivalenzrelation** genannt. Die "feinste" Äquivalenzrelation ist die Gleichheit:

$$x \sim y \qquad :\Longleftrightarrow \qquad x = y\ .$$

Im allgemeinen stellt aber eine Äquivalenzrelation eine Art "abgeschwächte Gleichheit" dar; man verwendet dafür suggestive Zeichen wie $\sim$, $\equiv$, $\approx$, $\|$ usw. Definitionsgemäss besitzt also eine Äquivalenzrelation $\sim$ die folgenden drei Eigenschaften:

(A1) $$x \sim x\ ,$$

(A2) $$x \sim y \qquad \Longrightarrow \qquad y \sim x\ ,$$

(A3) $$x \sim y \quad \wedge \quad y \sim z \qquad \Longrightarrow \qquad x \sim z\ .$$

③ Betrachte auf $\mathbb{Z}$ die Relation

$$x \sim y \quad :\Longleftrightarrow \quad x - y \text{ ist durch 7 teilbar.} \tag{1}$$

Dies ist offensichtlich eine Äquivalenzrelation $\bigl($z.B. die Transitivität: Sind $x - y$ und $y - z$ durch 7 teilbar, so auch $x - z = (x - y) + (y - z)\bigr)$. Zwei Zahlen x und y sind hiernach äquivalent, wenn sie denselben Siebenerrest besitzen. Zwei Zahlen mit demselben Siebenerrest sind zwar nicht gleich, aber allemal gleicher als solche mit verschiedenem Siebenerrest (zum Beispiel fallen sie auf den gleichen Wochentag ...).

○

Sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf der Grundmenge X. Zu jedem $x \in X$ gehört die Menge

$$[\,x\,] := \{\, x' \in X \mid x' \sim x \,\}$$

der zu x äquivalenten Elemente, genannt die von x **erzeugte** oder **repräsentierte Äquivalenzklasse**. Die Klasse $[x]$ ist nicht leer: Aufgrund der Reflexivität ist jedenfalls $x \in [x]$. Vor allem gilt:

$$\begin{aligned} x \sim y \quad &\Longrightarrow \quad [x] = [y], \\ x \not\sim y \quad &\Longrightarrow \quad [x] \supset\!\subset [y]. \end{aligned}$$

⌜ Es sei $x \sim y$. Aus $x' \in [x]$, d.h. $x' \sim x$ folgt dann mit Transitivität: $x' \sim y$, d.h. $x' \in [y]$. Somit ist $[x] \subset [y]$, und aus Symmetriegründen gilt dann auch die umgekehrte Inklusion. — Gilt $[x] \not\supset\!\subset [y]$, so gibt es ein z mit $z \sim x \ \wedge \ z \sim y$. Hieraus folgt aber $x \sim y$. ⌟

Damit haben wir den folgenden fundamentalen Satz bewiesen:

(1.1) *Eine Äquivalenzrelation auf der Menge X bewirkt eine Zerlegung von X in disjunkte nichtleere Äquivalenzklassen. Zwei Elemente x, $y \in X$ liegen genau dann in derselben Klasse, wenn sie äquivalent sind.*

Es geht aber noch weiter: Die verschiedenen Äquivalenzklassen sind zunächst Teilmengen von X. Man kann sie aber als neuartige “Einzelobjekte einer höheren Stufe” betrachten und dann von der Menge (nicht der Vereinigung!) der Äquivalenzklassen sprechen. Diese Menge heisst **Quotientenmenge von** X **modulo '**$\sim$**'** und wird mit $X\,/\!\sim$ (oder ähnlich) bezeichnet.

③ (Forts.) Die von der Zahl $x_0 \in \mathbb{Z}$ erzeugte Äquivalenzklasse ist die Menge

$$[x_0] = \{\, z \in \mathbb{Z} \mid z = x_0 + 7k,\ \ k \in \mathbb{Z} \,\}\,;$$

das sind die sämtlichen ganzen Zahlen, die denselben Siebenerrest haben wie x_0. Es gibt genau sieben verschiedene Äquivalenzklassen; die Quotientenmenge ist gegeben durch

$$\mathbb{Z}\,/\!\sim\ = \{\,[0], [1], \ldots, [6]\,\}\ .$$

○

Dieses Beispiel lässt sich offensichtlich verallgemeinern: Es sei $q \geq 1$ eine beliebige natürliche Zahl; dieses q wird im weiteren festgehalten. Wir schreiben $q \lhd z$ für den Sachverhalt “q teilt z” und definieren in Analogie zu (1) die folgende Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$:

$$x = y \pmod q \qquad :\Longleftrightarrow \qquad q \ \lhd \ x - y. \tag{2}$$

Die Formel linker Hand bezeichnet den Sachverhalt "$x \sim y$" und wird folgendermassen gelesen: "x ist gleich y modulo q". Bilden wir die Menge

$$q\mathbb{Z} := \{\, z \in \mathbb{Z} \mid z = kq,\ k \in \mathbb{Z} \,\},$$

so können wir die Definition (2) auch folgendermassen formulieren:

$$x = y \pmod q \qquad :\Longleftrightarrow \qquad x - y \in q\mathbb{Z}.$$

Die von der Zahl $x_0 \in \mathbb{Z}$ repräsentierte Äquivalenzklasse ist die Menge

$$[x_0] = \{\, z \in \mathbb{Z} \mid z = x_0 + kq,\ k \in \mathbb{Z} \,\} \qquad \bigl(=: x_0 + q\mathbb{Z}\bigr).$$

Die Quotientenmenge wird mit $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ oder einfach mit $\mathbb{Z}_q$ bezeichnet; sie besteht aus q Elementen:

$$\mathbb{Z}_q = \{\, [0], [1], \ldots, [q-1] \,\}.$$

Wir behaupten: Durch die Festsetzung

$$[x] + [y] := [x + y], \qquad [x] \cdot [y] := [x \cdot y]. \tag{3}$$

wird $\mathbb{Z}_q$ zu einem Ring mit Nullelement [0] und Einselement [1], genannt der **Restklassenring modulo** q. (Unter einem **Ring** versteht man eine algebraische Struktur, in der eine Addition und eine Multiplikation definiert sind, so dass die üblichen Rechengesetze — ohne die Existenz von multiplikativen Inversen — gelten.) Zum Beweis muss man in erster Linie verifizieren, dass die Rechenoperationen durch (3) wohldefiniert sind; die Rechengesetze selbst werden dann einfach von $\mathbb{Z}$ nach $\mathbb{Z}_q$ "vererbt". Also: Ist $[x'] = [x]$ und $[y'] = [y]$, so gilt

$$(x' + y') - (x + y) = (x' - x) + (y' - y) \ \in q\mathbb{Z}\ ;$$

folglich ist dann auch $[x' + y'] = [x + y]$. Ähnlich schliesst man für die Multiplikation.

Bemerkung: Die eben vollzogene Denkbewegung ist für den Umgang mit Äquivalenzklassen typisch. Sie ist jedesmal dann erforderlich, wenn auf der Grundmenge vorhandene Strukturen zu Konstruktionen auf der Quotientenmenge herangezogen werden.

(4) Wir beschreiben die Einführung des "Bruchrechnens". Hierzu gehen wir aus von Zahlenpaaren $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, die wir aber von Anfang an in der Form p/q schreiben. (Mit $\mathbb{N}^*$ bezeichnen wir die Menge der natürlichen Zahlen exklusive 0.) Da wir zwei Brüche, die nach Gleichnamigmachen übereinstimmen, als gleich ansehen möchten, definieren wir

$$p/q \ \sim\ p'/q' \qquad :\Longleftrightarrow \qquad \begin{array}{l} pq' = p'q \\ (\Leftrightarrow pq' - p'q = 0) \end{array}$$

und behaupten: '$\sim$' ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$.

⌜ Nur die Transitivität ist problematisch. Ist $p/q \sim p'/q'$ und $p'/q' \sim p''/q''$, so gilt

$$pq' - p'q = 0\,, \qquad p'q'' - p''q' = 0$$

und folglich

$$(pq'' - p''q)\,q' = (pq' - p'q)\,q'' + (p'q'' - p''q')\,q = 0\ .$$

Wegen $q' \neq 0$ muss daher $pq'' - p''q = 0$ sein, und das heisst $p/q \sim p''/q''$. (Wir haben hier wesentlich benützt, dass in $\mathbb{Z}$ die Regel ‘$xy = 0 \ \Rightarrow\ x = 0 \ \vee\ y = 0$’ gilt.) ⌟

Damit zerfällt $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ in disjunkte Äquivalenzklassen. Die Quotientenmenge

$$\mathbb{Q} := (\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*)/\sim$$

ist die Menge der **rationalen Zahlen**. Durch

$$\begin{aligned} [p/q] + [r/s] &:= [(ps + rq)/(qs)]\ , \\ [p/q] \cdot [r/s] &:= [(pr)/(qs)]\ , \\ [p/q] < [r/s] \quad &:\Longleftrightarrow \quad ps < rq \\ &\qquad\quad (\Leftrightarrow rq - ps > 0) \end{aligned}$$

wird auf $\mathbb{Q}$ eine Addition, eine Multiplikation und eine Ordnung definiert.

⌜ Wir beweisen das für die Ordnung und überlassen den Rest dem Leser. — Ist $p'/q' \sim p/q$ und $r'/s' \sim r/s$, so gilt

$$pq' = p'q\ , \qquad rs' = r's$$

und folglich

$$(r'q' - p's')qs = r'sqq' - p'qss' = rs'qq' - pq'ss' = (rq - ps)s'q'\ .$$

Die beiden Zahlen $r'q' - p's'$ und $rq - ps$ sind somit gleichzeitig < 0, $= 0$ oder > 0. Hieraus folgt schon: Die Relation $<$ zwischen den Äquivalenzklassen ist wohldefiniert und “total”. Weiter: Sind p/q, r/s und u/v drei Brüche mit $rq - ps > 0$ und $us - rv > 0$, so gilt auch

$$(uq - pv)s = (us - rv)q + (rq - ps)v > 0\ ,$$

also $uq - pv > 0$. Dies beweist die Transitivität der Relation $<$ auf $\mathbb{Q}$. ⌟

○

Weitere Beispiele von Äquivalenzrelationen werden sich im folgenden von selbst ergeben.

Aufgaben

1. Auf der Menge $\dot{\mathbb{R}}^2 := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ wird folgende Relation definiert:

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \qquad :\Longleftrightarrow \qquad \exists \lambda > 0 : \quad (x_2, y_2) = (\lambda x_1, \lambda y_1) \ .$$

   (a) Zeige, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.

   (b) Deute die Äquivalenzklassen $\big[(x, y)\big]$ geometrisch.

   (c) Zeige, dass die folgende Operation wohldefiniert ist:

$$\big[(x_1, y_1)\big] * \big[(x_2, y_2)\big] \ := \ \big[(x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)\big] \ .$$

   (d) Deute die Operation $*$ geometrisch.

2. Auf der Potenzmenge $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ werden folgende Relationen betrachtet:

   (a) $A \sim_1 B$, falls $A \setminus B$ endlich ist;

   (b) $A \sim_2 B$, falls $A \vartriangle B$ endlich ist;

   (c) $A \sim_3 B$, falls $A \cap B$ endlich ist.

   Untersuche, welche der Äquivalenzaxiome (A1), (A2), (A3) in diesen drei Fällen erfüllt sind.

3. "Aus (A2) und (A3) folgt mit $z := x$ die Reflexivität. Man kann daher auf (A1) verzichten." — Wo steckt der Trugschluss? Man produziere ein möglichst einfaches Gegenbeispiel.

4. Auf wieviele verschiedene Arten lässt sich eine Menge von $n = 1, 2, \ldots, 5$ Elementen in Äquivalenzklassen einteilen?

1.4 Funktionen

Begriff der Funktion

Zu Eulers Zeiten verstand man unter einer “Funktion $f(x)$” einen mehr oder weniger komplizierten “Ausdruck” oder **Funktionsterm**, zum Beispiel

$$f(x) := \frac{e^{\sqrt{1-x^2}}}{2+\cos x} \qquad (-1 \le x \le 1)\,,$$

in der unabhängigen Variablen x. Es handelt sich dabei um eine formelmässige Anweisung, wie für eine gegebene Zahl x der wohlbestimmte Funktionswert $f(x)$ auszurechnen ist.

Seither ist diese Vorstellung umfassend verallgemeinert und auch präzisiert worden. Insbesondere ist man heute gewohnt, die eigentliche Funktion, das “Rechengesetz”, mit f oder mit $f(\cdot)$ zu bezeichnen und nur dann $f(x)$ zu schreiben, wenn tatsächlich der Funktionswert an der Stelle x gemeint ist. Diese Linie lässt sich allerdings nicht immer durchziehen; so sprechen wir etwa von der “Funktion e^t” oder der “Funktion t^n”, wenn wir im Grunde genommen die Funktionen $t \mapsto e^t$ bzw. $t \mapsto t^n$ meinen.

Also: Sind A und B beliebige Mengen, so versteht man unter einer **Funktion** oder **Abbildung f von A nach B** eine Vorschrift (Formel oder Text), die für jeden Punkt $x \in A$ einen bestimmten Punkt $y \in B$ als **Funktionswert** oder **Bildpunkt** festlegt. Ist y der Bildpunkt von x, so schreiben wir $y = f(x)$; ferner zeichnen wir Flussdiagramme der folgenden Art:

$$f: \quad A \to B\,, \qquad x \mapsto f(x)\ .$$

Die Menge $A =: \mathrm{dom}\,(f)$ heisst der **Definitionsbereich** (englisch: *domain*) von f, die Menge B der **Zielbereich** (englisch: *range*) oder **Wertevorrat** von f. Die Menge

$$\mathrm{im}\,(f) := \bigl\{y \in B \bigm| \exists x \in A:\ y = f(x)\bigr\}$$

(englisch: *image*) der tatsächlich angenommenen Werte ist im allgemeinen eine echte Teilmenge des Wertevorrats B und heisst **Bildmenge** oder **Wertemenge** von f.

① Durch

$$\sin: \quad \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \qquad t \mapsto \sin t := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} t^{2k+1}$$

wird eine Funktion ‘ sin ’ mit Definitionsbereich $\mathbb{R}$ und Zielbereich $\mathbb{R}$ festgelegt. Diese Funktion besitzt die Wertemenge $\mathrm{im}\,(\sin) = [-1, 1\,]$. ○

Hat eine Funktion einen Namen, der nicht gerade "*functionlike*" ist, etwa 'p', so können wir mit der Schreibweise $p(\cdot)$ anstelle von p deutlich machen, dass hier von einer Funktion die Rede ist. In ähnlicher Weise schreiben wir $x(\cdot)$, wenn die vorher unabhängige Variable x in neuem Zusammenhang als Funktion einer anderen Variablen, etwa der "Zeit" t aufgefasst werden soll.

Mit der Schreibweise

$$f: \quad \mathbb{R} \curvearrowright \mathbb{R}$$

drücken wir aus, dass f auf einer nicht näher spezifizierten, aber "vernünftigen" Teilmenge von $\mathbb{R}$, etwa auf einem Intervall, definiert ist. In diesem Sinne lebt eine Funktion $f: \mathbb{R}^3 \curvearrowright \mathbb{R}$ typischer Weise auf einer offenen (s.u.) Teilmenge des dreidimensionalen Raums.

Wir haben hier den fundamentalen Begriff der Funktion mit Hilfe von bürgerlichen Vorstellungen ("Vorschrift", "festlegen") erklärt. Das wäre an sich nicht nötig gewesen: Wie wir gleich sehen werden, lässt sich der Funktionsbegriff auch direkt auf schon eingeführte Begriffe abstützen.

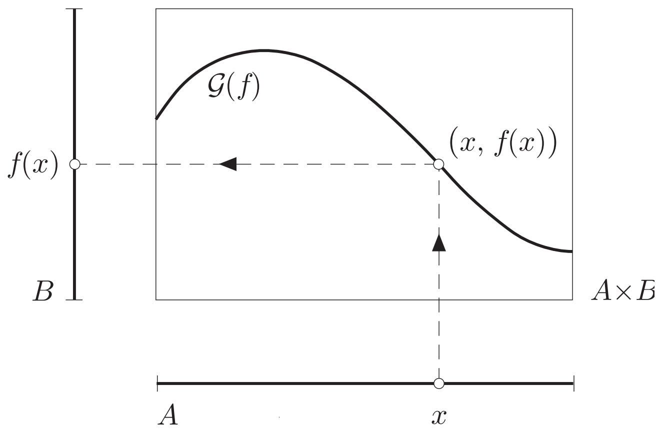

Fig. 1.4.1

Eine auf einem reellen Intervall definierte Funktion f wird bekanntlich durch eine Kurve in der (x, y)-Ebene "dargestellt", die Funktion $f : x \mapsto x^2$ zum Beispiel durch die Parabel $y = x^2$. Diese Idee lässt sich verallgemeinern: Zu jeder Funktion $f: A \to B$ gehört ihr **Graph**

$$\mathcal{G}(f) := \bigl\{(x, y) \in A \times B \bigm| x \in A,\ y = f(x)\bigr\}\ ,$$

eine wohlbestimmte Teilmenge von $A \times B$ (siehe die Figuren 1.4.1 und 1.4.2). Der Graph $\mathcal{G}(f) =: \mathcal{G}$ besitzt folgende charakteristische Eigenschaft:

$(*)$ Zu jedem $x \in A$ gibt es genau ein $y \in B$ mit $(x, y) \in \mathcal{G}$.

Umgekehrt: Ist $\mathcal{G}$ eine beliebige Teilmenge von $A \times B$ mit der Eigenschaft $(*)$, so gibt es eine wohlbestimmte Funktion $f: A \to B$ mit $\mathcal{G}(f) = \mathcal{G}$: Für jedes $x \in A$ ist der Funktionswert $f(x)$ das eindeutig bestimmte $y \in B$ mit $(x, y) \in \mathcal{G}$.

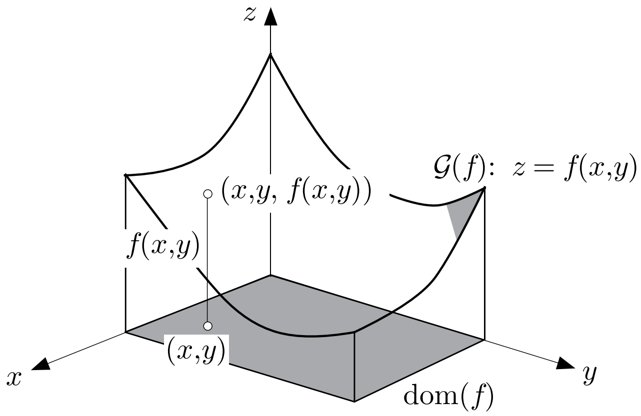

Fig. 1.4.2

Da also Funktion und Graph einander gegenseitig bestimmen, werden sie zuweilen als ein und dasselbe betrachtet. In dieser Weise gelangt man zu der folgenden “relationalen Version” des Funktionsbegriffs: Eine **Funktion** $f: A \to B$ ist eine Relation $\mathcal{G}$ zwischen A und B (gemeint ist: eine Teilmenge $\mathcal{G} \subset A \times B$), die die Eigenschaft $(*)$ besitzt.

Bilder und Urbilder von Teilmengen

Eine Funktion $f: A \to B$ “wirkt” zunächst einmal auf die einzelnen Punkte $x \in A$. Es liegt nahe, das **Bild** einer beliebigen Teilmenge $X \subset A$ folgendermassen zu definieren:

$$f(X) := \bigl\{ y \in B \bigm| \exists x \in X\colon\ y = f(x) \bigr\} \qquad (\subset B)\,,$$

oder kürzer: $f(X) := \bigl\{ f(x) \bigm| x \in X \bigr\}$.

Streng genommen müsste man ein neues Symbol, etwa $\tilde{f}$, verwenden. Gegeben war eine Funktion $f: A \to B$, und wir haben mit ihrer Hilfe eine neue Funktion $\tilde{f}: \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B)$ konstruiert.

Eine Funktion oder Abbildung $f: A \to B$ ist von ihrer Natur her eine “Vorwärtsbewegung”. Man kann aber auch nach rückwärts schauen. Ist ein beliebiger Punkt $y \in B$ gegeben, so kann man nach Punkten $x \in A$ fragen, die durch f auf y geworfen werden. Jedes derartige x ist ein **Urbildpunkt** von y. Vielleicht gibt es keinen solchen Punkt, vielleicht genau einen, vielleicht mehrere. In anderen Worten: Das **Urbild** der einpunktigen Menge $\{y\}$ ist eine gewisse, unter Umständen leere, Teilmenge von A; wir schreiben dafür

$$f^{-1}\big(\{y\}\big) \;:=\; \big\{x \in A \;\big|\; f(x) = y\big\}\ .$$

Das wollen wir gleich verallgemeinern: Ist eine beliebige Teilmenge $Y \subset B$ gegeben, so können wir nach der Gesamtheit aller Punkte $x \in A$ fragen, deren Bildpunkt $f(x)$ in Y liegt. Die Menge dieser Punkte ist das **(volle) Urbild** der Teilmenge $Y \subset B$ und wird mit $f^{-1}(Y)$ bezeichnet:

$$f^{-1}(Y) \;:=\; \big\{x \in A \;\big|\; f(x) \in Y\big\}\ .$$

Ausgehend von der Abbildung $f\colon A \to B$ haben wir damit eine "nach rückwärts gerichtete" Abbildung $f^{-1}\colon \mathcal{P}(B) \to \mathcal{P}(A)$ konstruiert. Diese Urbild-Abbildung ist immer (gemeint ist: ohne weitere Voraussetzungen über f) vorhanden und mit den Mengenoperationen "kompatibel"; siehe dazu die Aufgaben.

Surjektiv, injektiv, bijektiv

Eine Funktion (Abbildung) $f : A \to B$ heisst **surjektiv**, altmodisch: eine Abbildung von A **auf** B, falls

$$f(A) = B \qquad \text{bzw.} \qquad \operatorname{im}(f) = B$$

ist. Es gibt dann zu jedem Punkt $y \in B$ wenigstens einen Punkt $x \in A$ mit $f(x) = y$.

Eine Funktion (Abbildung) $f : A \to B$ heisst **injektiv**, altmodisch: **eineindeutig**, wenn sie in verschiedenen Punkten $x_1,\ x_2 \in A$ verschiedene Werte annimmt — bzw. andersherum: wenn aus $f(x_1) = f(x_2)$ folgt: $x_1 = x_2$.

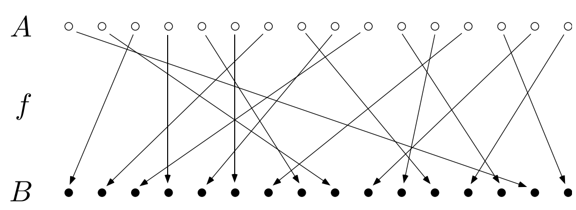

Fig. 1.4.3

Ist f: $A \to B$ surjektiv *und* injektiv, so heisst f **bijektiv**. In diesem Fall tritt jeder Punkt $y \in B$ genau einmal als Bildpunkt auf: wenigstens einmal wegen der Surjektivität und höchstens einmal wegen der Injektivität. In anderen Worten: Eine bijektive Abbildung verheiratet die Elemente von A monogam mit denjenigen von B, so dass am Schluss von keiner Sorte eines überzählig ist (Fig. 1.4.3).

2 Die reelle Funktion

$$g\colon \quad \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \qquad x \mapsto g(x) := x^3 - 2x$$

(Fig. 1.4.4) ist surjektiv, aber nicht injektiv; so wird etwa der Wert y_1 an drei verschiedenen Stellen angenommen.

Die Funktion sin: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist weder surjektiv noch injektiv: Der Wert 2 wird keinmal und der Wert 0 wird unendlich oft angenommen.

Parameterdarstellungen (s.u.) von Kurven, Flächen oder räumlichen Bereichen sind “im wesentlichen” injektiv.

Die Funktionen tan: $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ und tanh: $\mathbb{R} \to]-1,1[$ (s.u.) sind bijektiv.

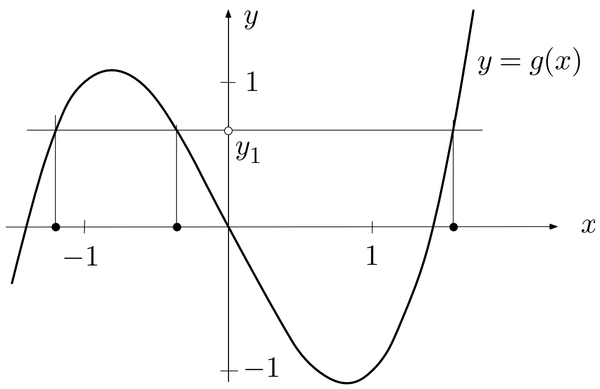

Fig. 1.4.4

Umkehrfunktion

Eine bijektive Abbildung $f\colon A \to B$ legt nicht nur für jedes $x \in A = \operatorname{dom}(f)$ ein $y \in B = \operatorname{im}(f)$ fest, sondern auch für jedes $y \in B$ ein $x \in A$, denn das Urbild $f^{-1}\big(\{y\}\big)$ ist ein Singleton $\{x\}$. In anderen Worten: Zu jeder bijektiven Abbildung $f\colon A \to B$ gibt es von selbst die **Umkehrfunktion** oder **Umkehrabbildung**

$$f^{-1}: \quad B \to A \qquad y \mapsto x := \big\}f^{-1}\big(\{y\}\big)\big\{ \quad .$$

Die Umkehrabbildung ist selbst wieder bijektiv, und es gilt $(f^{-1})^{-1} = f$.

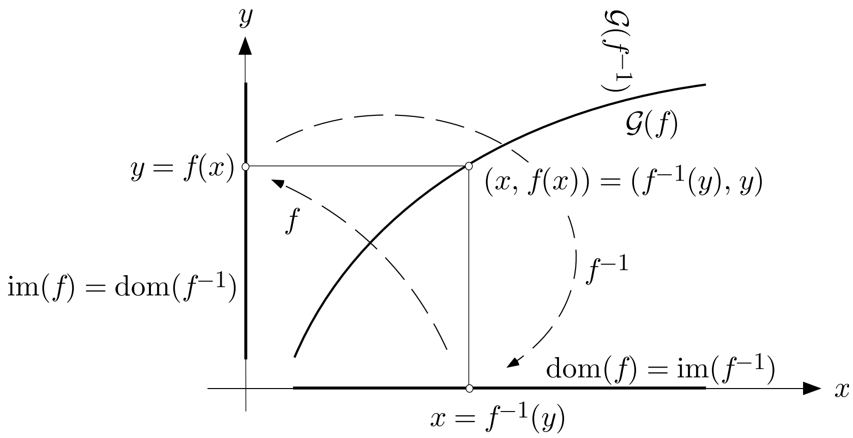

Fig. 1.4.5

Fig. 1.4.5 zeigt f und f^{-1} im Graphenbild. Der Graph von f kann also auch als Graph von f^{-1} dienen; dabei muss man nur den Kopf etwas schräg halten.

Anmerkung: Werden f und f^{-1} gleichzeitig betrachtet, so behält man mit Vorteil x als Variable in $\mathrm{dom}\,(f) = \mathrm{im}\,(f^{-1})$ und y als Variable in $\mathrm{im}\,(f) = \mathrm{dom}\,(f^{-1})$ bei; insbesondere ist dann y die unabhängige Variable von f^{-1}. Interessiert das f nicht mehr, so kann man den Graphen von f^{-1} in die übliche Position bringen, d.h. f^{-1} als Funktion einer neuen, horizontal skalierten Variablen x darstellen.

Liegt f als Funktionsterm vor, so erhält man den Funktionsterm für f^{-1}, wenn es gelingt, die Gleichung $f(x) = y$ für unbestimmtes y formelmässig nach x aufzulösen.

③ Es sei

$$f(x) := \frac{3x+7}{5x-2}\,,$$

wobei wir uns um den genauen Definitionsbereich im Augenblick nicht kümmern. Die folgende Kette von Gleichungen liefert den Funktionsterm für f^{-1}:

$$y = \frac{3x+7}{5x-2} \quad\Rightarrow\quad (5x-2)y = 3x+7 \quad\Rightarrow\quad x(5y-3) = 2y+7 \quad\Rightarrow$$
$$x = \frac{2y+7}{5y-3} \quad\Rightarrow\quad \underline{f^{-1}(y) = \frac{2y+7}{5y-3}}\,.$$

○

Beachte: Die Umkehrfunktion “existiert” unter den angeführten Umständen, auch wenn es nicht möglich ist, sie formelmässig mit Hilfe von “schon vorhandenen” Funktionen darzustellen. Viele wichtige Funktionen, zum Beispiel die Arcus-Funktionen oder der Logarithmus, sind ausdrücklich als Umkehrfunktionen von anderen Funktionen definiert und zunächst nicht anderweitig darstellbar.

④ Es sei $n \geq 1$. Die Potenzfunktion

$$\mathrm{pot}_n\colon \quad \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}\,, \qquad x \mapsto y := x^n$$

ist injektiv: Aus $0 \leq x' < x$ folgt

$$x^n - x'^n = (x^{n-1} + x^{n-2}x' + \ldots + x'^{n-1})\,(x - x') \ > \ 0\,,$$

insbesondere $x^n \neq x'^n$. Ferner ist pot_n auch surjektiv (wird später bewiesen). Es gibt daher eine Umkehrfunktion, genannt n**-te Wurzel**:

$$\mathrm{wrz}_n\colon \quad \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}\,, \qquad y \mapsto x := \mathrm{wrz}_n(y)\ .$$

Anstelle von $\mathrm{wrz}_n(y)$ schreibt natürlich jedermann $\sqrt[n]{y}$. ○

Einschränkungen und Fortsetzungen

Eine wenigstens injektive Abbildung $f\colon A \to B$ wird durch Einschränkung des Wertevorrats auf $B' := \mathrm{im}\,(f) \subset B$ zu einer bijektiven Abbildung $f\colon A \to B'$, und es gibt dann eine wohlbestimmte Umkehrabbildung $f^{-1}\colon B' \to A$.

Weiter: Wird eine gegebene Funktion $f\colon A \to B$ für gewisse Zwecke nur auf einer Teilmenge $A' \subset A$ betrachtet und auf der Restmenge $A \backslash A'$ “vergessen”, so spricht man von der **Einschränkung von f auf A'** und bezeichnet diese Einschränkung, wenn nötig, mit $f\restriction A'$. Diese Idee ist z.B. in dem folgenden Zusammenhang nützlich: Die betrachtete Funktion $f : A \to B$ ist leider nicht injektiv; es gibt aber einen interessanten Teilbereich $A' \subset A$, auf dem f injektiv ist. Indem man zur Einschränkung $f\restriction A'$ übergeht, lässt sich die Existenz einer Umkehrfunktion wenigstens für diesen “Teil” von f erzwingen.

Bsp: Die Einschränkung $\sin\colon \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \left[-1, 1\right]$ ist bijektiv; somit existiert die zugehörige Umkehrfunktion, genannt Arcussinus (s.u.).

Und schliesslich: Ist $\tilde{A}$ eine **Obermenge** von A, das heisst: $\tilde{A} \supset A$, und ist $\tilde{f} : \tilde{A} \to B$ eine Funktion, die auf A mit $f\colon A \to B$ übereinstimmt: $\tilde{f}\restriction A = f$, so heisst $\tilde{f}$ eine **Fortsetzung von f auf die Menge $\tilde{A}$**. Im allgemeinen wird eine derartige Fortsetzung kurzer Hand wieder mit f bezeichnet.

⑤ Die Winkelfunktionen cos und sin werden im Elementarunterricht mit Hilfe von rechtwinkligen Dreiecken zunächst nur für Winkel zwischen 0 und 90° erklärt. Bekanntlich lassen sich diese Funktionen "in natürlicher Weise" auf die ganze reelle Achse fortsetzen. Die "natürliche" Fortsetzung ist unter allen möglichen Fortsetzungen dadurch ausgezeichnet, dass sie zu einer besonders schönen Theorie der betreffenden Funktionen führt. ○

Implizite Funktionen

Gelegentlich sind zwei (an sich "gleichberechtigte") reelle Grössen x, y verknüpft durch eine Gleichung

$$F(x,y) \;=\; 0\;. \tag{1}$$

Bsp:

$$\begin{aligned} &x^2 + y^2 = 1\;,\\ &x^3 + y^3 = 3axy\;, \qquad a > 0 \text{ fest.}\end{aligned}$$

In diesem Fall sind x und y nicht mehr unabhängig voneinander beliebig wählbar; vielmehr legt (1) eine bestimmte Teilmenge $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ von "zulässigen Paaren" (x,y) fest — in aller Regel eine Kurve.

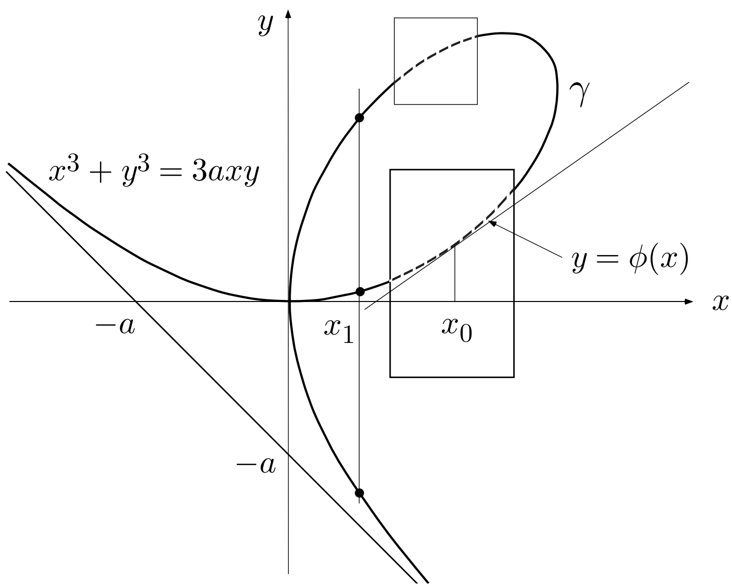

Fig. 1.4.6

Die zwischen x und y bestehende Abhängigkeit lässt sich im allgemeinen nicht als globale Funktion $x \mapsto f(x) := y$ auffassen, da zu einem gegebenen x-Wert ohne weiteres verschiedene y-Werte gehören können (siehe zum Beispiel die

Stelle x_1 in Fig. 1.4.6). Trotzdem sagt man, eine Gleichung (1) definiere **implizit** Funktionen $x \mapsto y := \phi(x)$ $\bigl($bzw. Funktionen $y \mapsto x := \psi(y)\bigr)$, und zwar auch dann, wenn es nicht gelingt, die Variable y formelmässig durch x (oder x durch y) auszudrücken. Diese Funktionen $\phi(\cdot)$ bzw. $\psi(\cdot)$ sind nur *lokal*, das heisst: innerhalb eines "Fensters" erklärt, siehe die Fig. 1.4.6. Man kann sie diskutieren und zum Beispiel die Ableitung $\phi'(x_0)$ oder Extremalwerte ausrechnen, ohne die definierende Gleichung $F(x, y) = 0$ tatsächlich für variable x nach y aufzulösen. — Offiziell eingeführt und drangenommen werden die "impliziten Funktionen" in Abschnitt 12.5.

Zusammensetzung von Abbildungen

Es sei A eine beliebige Menge. Die spezielle Abbildung

$$\mathrm{id}_A : \quad A \to A\,, \qquad x \mapsto x$$

heisst **identische Abbildung** von A. Anstelle von id_A schreibt man einfach id, wenn sich der Definitionsbereich aus dem Zusammenhang ergibt. Der zu $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ gehörige Funktionsterm ist 't'.

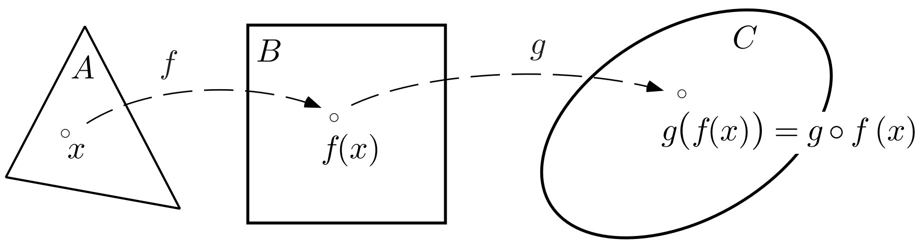

Fig. 1.4.7

Sind $f : A \to B$ und $g : B \to C$ zwei Funktionen, so ist für jedes $x \in A$ zunächst durch f der Punkt $f(x) \in B$ festgelegt und zu diesem dann durch g der Punkt $g\bigl(f(x)\bigr) \in C$. Damit entsteht von selbst die **aus** f **und** g **zusammengesetzte Abbildung**

$$g \circ f : \quad A \to C\,, \qquad x \mapsto g\bigl(f(x)\bigr)$$

(Fig. 1.4.7). Man beachte: $g \circ f$ bedeutet "erst f, dann g", entgegen der üblichen Lesrichtung. Sind f und g zwei Abbildungen von A nach A, so sind sowohl $g \circ f$ wie $f \circ g$ definiert; aber im allgemeinen ist $f \circ g \neq g \circ f$.

6 Die beiden möglichen Zusammensetzungen der Funktionen $f_1(t) := 1 - t$ und $f_2(t) := 2t$ sind

$$f_2 \circ f_1 : \qquad t \mapsto f_2\bigl(f_1(t)\bigr) = 2(1 - t)\,,$$
$$f_1 \circ f_2 : \qquad t \mapsto f_1\bigl(f_2(t)\bigr) = 1 - 2t\,,$$

und diese beiden Funktionen sind voneinander verschieden: Ihre Werte an der Stelle $t := 0$ sind 2 und 1. ○

Ist $f : A \to B$ bijektiv, so gilt

$$f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_A , \qquad f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_B ;$$

in Worten: f^{-1} macht die Wirkung von f wieder rückgängig. Ist weiter auch $g : B \to C$ bijektiv, so gilt

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1} .$$

Die letzte Formel ist eine mathematische Grunderfahrung, die der Leser am besten anhand von Fig. 1.4.7 nachvollzieht.

Familien und Tupel

Steht bei einer Funktion $f\colon I \to X$ weder der Definitionsbereich I noch das "Rechengesetz" im Vordergrund des Interesses, sondern die durch I strukturierte "Liste" der Funktionswerte

$$x_\iota := f(\iota) \qquad (\iota \in I) ,$$

so spricht man von einer **(X-wertigen) Familie** und bezeichnet die angesprochene "Liste" mit

$$\bigl(x_\iota\bigr)_{\iota \in I} \quad \text{oder} \quad \bigl(x_\iota \bigm| \iota \in I\bigr) .$$

Die Menge I ist zur **Indexmenge** dieser Familie degradiert worden.

⑦ Es sei X eine vereinbarte "Grundmenge". Ist für jedes ι einer gewissen Indexmenge I eine Teilmenge $A_\iota \subset X$ festgelegt, so ist $\bigl(A_\iota \bigm| \iota \in I\bigr)$ eine **Familie von Mengen**, und es hat zum Beispiel einen Sinn, von der **Vereinigung**

$$\bigcup\nolimits_{\iota \in I} A_\iota := \bigl\{x \in X \bigm| \exists \iota \in I\colon\ x \in A_\iota\bigr\}$$

zu sprechen. Die Regeln der Mengenalgebra gelten sinngemäss. So ist zum Beispiel

$$\complement\Bigl(\bigcup\nolimits_{\iota \in I} A_\iota\Bigr) = \bigcap\nolimits_{\iota \in I} \complement A_\iota .$$

○

Es sei $n \geq 1$ eine vorgegebene natürliche Zahl und $[n] := \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ die Menge der Zahlen von 1 bis n. Ist für jedes $k \in [n]$ ein Element $x_k \in X$ festgelegt, so heisst die Familie

$$\bigl(x_k \bigm| k \in [n]\bigr) =: (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

ein **(geordnetes) n-Tupel** (von Elementen aus X). Zwei geordnete n-Tupel

$$\mathbf{x} := (x_1, \ldots, x_n)\,, \quad \mathbf{y} := (y_1, \ldots y_n)$$

sind genau dann gleich, wenn sie Wertetabellen ein und derselben Funktion $f\colon [n] \to X$ sind, und dies ist genau dann der Fall, wenn sie koordinatenweise übereinstimmen:

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} \qquad \Longleftrightarrow \qquad x_k = y_k \quad (1 \leq k \leq n)\ .$$

Ein 2-Tupel (x_1, x_2) ist also nichts anderes als ein geordnetes Paar von Elementen aus X. Analog zum kartesischen Produkt von zwei Mengen A und B definiert man jetzt das **n-fache kartesische Produkt** einer Menge X:

$$X^n := \bigl\{\mathbf{x} \bigm| \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)\,,\ x_k \in X\ (1 \leq k \leq n)\bigr\}\ .$$

8 $\mathbb{R}^2$ ist die **Koordinatenebene**, auch **(x, y)-Ebene** genannt, $\mathbb{R}^3$ der **dreidimensionale Koordinatenraum**. $\mathbb{Z}^2$ ist die Menge aller Paare ganzer Zahlen oder die Menge der **Gitterpunkte** in der Ebene $\mathbb{R}^2$ (Fig. 1.4.8). ○

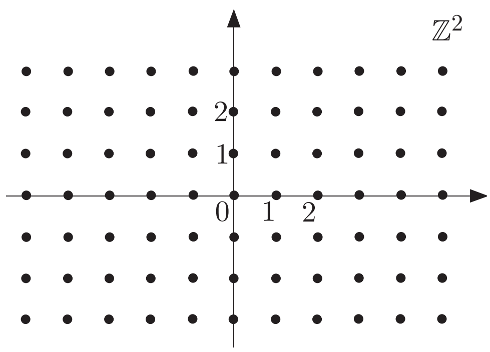

Fig. 1.4.8

Eine Funktion

$$x_.:\quad \mathbb{N} \to X\,, \qquad k \mapsto x_k\,,$$

die also für jede natürliche Zahl k einen Punkt $x_k \in X$ festlegt, heisst eine **(unendliche) Folge auf** X (oder auch **in** X). Sie ist bestimmt durch ihre Wertetabelle

$$\bigl(x_k \bigm| k \geq 0\bigr) = (x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots\ )\ .$$

Wir schreiben im allgemeinen $x_.$, wenn wir die ganze Folge meinen; es ist aber auch klar, was zum Beispiel mit der "Folge $x_k := k/(k+1)$" gemeint ist.

⑨ Die Folge $x_k := (-1)^k$ nimmt nur die beiden Werte 1 und -1 an. — Durch

$$A_k := \bigl\{z \in \mathbb{C} \bigm| z^k = 1\bigr\} \qquad (k \geq 1)$$

wird eine Folge von Teilmengen $A_k \subset \mathbb{C}$ definiert. (A_k ist die Menge der sogenannten **k-ten Einheitswurzeln**.) ○

Aufgaben

1. Im folgenden ist $f : A \to B$ eine Abbildung, und X, X' bzw. Y, Y' sind Teilmengen von A bzw. B. Beweise die folgenden Identitäten:
   (a) $f(X \cup X') = f(X) \cup f(X')$,
   (b) $f(X \cap X') \subset f(X) \cap f(X') \qquad (!)$,
   (c) $f^{-1}(Y \cup Y') = f^{-1}(Y) \cup f^{-1}(Y')$,
   (d) $f^{-1}(Y \cap Y') = f^{-1}(Y) \cap f^{-1}(Y')$,
   (e) $f^{-1}(\complement Y) = \complement\bigl(f^{-1}(Y)\bigr)$.
2. Es seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to X$ Abbildungen, so dass gilt:

   $$g \circ f = \mathrm{id}_X \ .$$

   Beweise oder widerlege:
   (a) f ist injektiv, (b) f ist surjektiv,
   (c) g ist injektiv, (d) g ist surjektiv,
   (e) $f \circ g = \mathrm{id}_Y$.
3. Es sei $f(x) := x^2 + 2x + 2$. Man bestimme, so weit möglich, die Umkehrfunktionen der Einschränkungen
   (a) $f{\restriction}[0,\infty[$, (b) $f{\restriction}[-2,0]$, (c) $f{\restriction}]-\infty,-2]$.
4. Zwei reelle Grössen x und y sind durch die Beziehung

   $$\sqrt{1+x} + \sqrt{1+y} = 2$$

   aneinander gekoppelt. Ist diese Beziehung monoton? Welche Intervalle der x- und der y-Achse werden dadurch aufeinander abgebildet? Figur!
5. Die Funktion

   $$f : \quad x \mapsto \sqrt{9 - \sqrt{25 - \sqrt{x}}}$$

   wird als reellwertige Funktion der reellen Variablen x betrachtet.

(a) Bestimme den Definitionsbereich $\operatorname{dom}(f) =: D$ sowie die Wertemenge $\operatorname{im}(f) =: W$.

(b) Überlege: f ist Zusammensetzung von streng monotonen Funktionen und damit injektiv.

(c) Bestimme den Funktionsterm der Umkehrfunktion $f^{-1} : W \to D$.