

# Statistique\* et gestion quantitative du risque

(\*incluant la probabilité computationnelle)

Paul Embrechts

Département de mathématiques  
et  
RiskLab  
ETH Zurich, Suisse  
[www.math.ethz.ch/~embrechts](http://www.math.ethz.ch/~embrechts)

Cette présentation s'appuie sur des travaux effectués en collaboration avec :

Guus Balkema

Valérie Chavez-Demoulin

Matthias Degen

Rüdiger Frey

Dominik Lambrigger

Natalia Lysenko

Alexander McNeil

Johanna Nešlehová

Giovanni Puccetti

# L'évolution des outils analytiques de gestion du risque

1938	Durée d'une obligation
1952	Paradigme "moyenne-variance" de Markowitz
1963	Modèle bêta unifactoriel de Sharpe
1966	Modèles multifactoriels
1973	Modèle d'évaluation de Black–Scholes et paramètres grecs
1983	RAROC, rendement ajusté pour le risque
1986	Restrictions imposées sur l'exposition par tranche de durée
1988	Restrictions sur les paramètres grecs, Bâle I
1992	Tests de stress
1993	Valeur-à-risque (VaR)
1994	RiskMetrics
1996	Bâle I 1/2
1997	CreditMetrics
1998-	Intégration des risques de crédit et de marché
2000-	Gestion globale des risques d'entreprise
2000-	Bâle II

(Jorion, 2007)

# Des mathématiques et de la finance (1/3)

Pour plusieurs problèmes d'**économie** ou de **finance**, tels :

- la théorie de non-arbitrage
- le calcul des prix et des couvertures de produits dérivés (options, ...)
- l'information de marché
- les modèles plus réalistes, etc ...

les **mathématiques** fournissent les bons outils :

- la théorie des (semi-)martingales
- les ESD (Lemme de Itô), les EDP, les méthodes de simulation
- les filtrations de sigma-algèbres
- du mouvement brownien aux processus de Lévy généraux

# Des mathématiques et de la finance (2/3)

D'aucuns prétendent que :

Thèse 1: Les mathématiques ont fortement influencé le développement de la finance (appliquée).

Thèse 2: La finance offre des perspectives de recherche intéressantes et exigeantes pour les mathématiques (notamment en modélisation stochastique, en analyse numérique et en recherche opérationnelle).

Cependant, force est de constater que :

Thèse 3: Depuis quelques années, la “finance appliquée” et la “finance mathématique” ont commencé à **diverger**, peut-être simplement en raison d'un processus de maturation.

**Par conséquent :** et en raison d'événements comme les problèmes autour du Long-Term Capital Management (1998), la crise du papier commercial (2007/8), etc...

# Des mathématiques et de la finance (3/3)

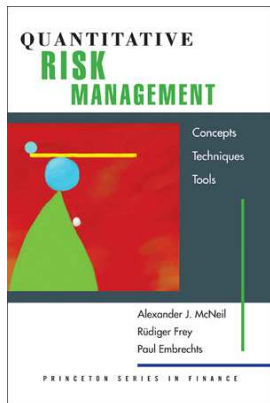
Des critiques ont commencé à se faire entendre (dans la presse) :

- Les mathématiciens menacent les fondements des institutions financières. (LTCM)
- “Le retour des grosses têtes et des maux de tête.” (LTCM)
- Avec leurs expressions branchées et leurs formules clinquantes, les “Quants” étaient les stars de la finance avant que la crise du crédit n'éclate. (*The Economist*)
- Les commentaires en ce sens abondent...

# Mais que dire de la statistique et de la GQR ?

Pour les fins de cette présentation :

$\{\text{Statistique}\} \cup \{\text{Probabilité computationnelle}\} \setminus \{\text{Économétrie}\}$



- La GQR est en pleine croissance.
- Nous fixons des principes fondamentaux.
- Nous abordons des questions pratiques :
  - L'interdépendance et la concentration des risques
  - L'agrégation des risques
  - Les problèmes d'échelle
  - L'importance des extrêmes
  - La multidisciplinarité
- La gestion des risques relève autant du jugement humain que du génie mathématique (*The Economist*, 17.5.07)

# Examinons quelques questions très concrètes de GQR

- Comité de Bâle (CB) et Accords (I, Amendement (I 1/2), II):
  - Le CB a été créé en 1974 par les gouverneurs des banques centrales du “Groupe des 10.”
  - Il formule des **normes internationales d'adéquation du capital** pour les institutions financières désignées jusqu'ici sous le nom des Accords de Bâle  $x$ ,  $x \in \{I, I\ 1/2, II\}$ .
  - Son objectif principal : éviter les **risques systémiques**.
- Les notions statistiques font **partie intégrante** de la loi!
  - La **valeur-à-risque** au niveau de confiance  $\alpha$  sur la période  $d$

$$\text{VaR}_{\alpha,d}(X) = \inf\{x \geq 0 : \mathbb{P}(X \geq x) \geq \alpha\}$$

$X$  : un aléa dénotant la (min -) valeur de la position au terme de la période  $[0, d]$ ,  $0 =$  aujourd'hui,  $d =$  horizon

Notation : souvent  $\text{VaR}_{\alpha}(X)$ ,  $\text{VaR}_{\alpha}$ ,  $\text{VaR} \dots (\$)$

En termes statistiques :

la VaR n'est rien d'autre qu'un quantile ... (⚡)

Cependant :

- Risque de marché (RM) :  $\alpha = 0.99$ ,  $d = 10$  jours
- Restrictions pour les courtiers (RM) :  $\alpha = 0.95$ ,  $d = 1$  jour
- Risque de crédit (RC) :  $\alpha = 0.999$ ,  $d = 1$  an
- Risque opérationnel (RO) :  $\alpha = 0.999$ ,  $d = 1$  an
- Capital économique (CE) :  $\alpha = 0.9997$ ,  $d = 1$  an

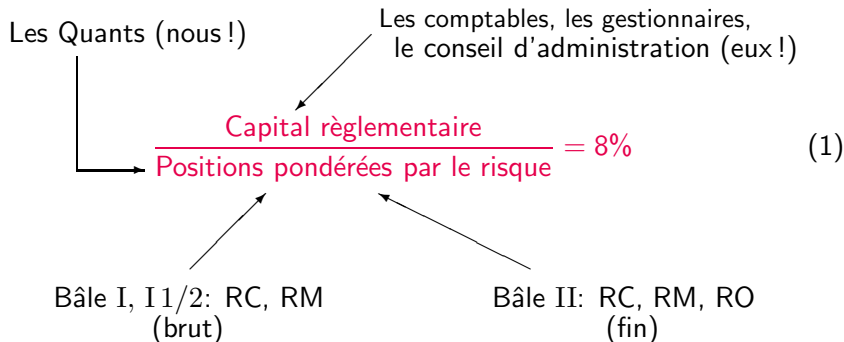
Donc :

la VaR est typiquement un quantile extrême !

Mais :

Que peut-on en faire ?

# Adéquation de capital minimal : le ratio de Cook



## Remarque importante

Les plus grandes banques internationales ont leurs **propres modèles**, ce qui ouvre la porte à des applications non triviales des mathématiques et de la statistique.

## Un exemple du dénominateur pour le RM au jour $t$ :

$$CR_{MI}^t(RM) = \max \left\{ \text{VaR}_{0.99, 10}^t, \frac{k}{60} \sum_{i=1}^{60} \text{VaR}_{0.99, 10}^{t-i+1} \right\} + CR_{RS}^t \quad (2)$$

$CR$  = Capital de risque

$MI$  = Modèle interne

$k \in [3, 5]$  Facteur de stress

$RM$  = Risque de marché

$RS$  = Risque spécifique

### Remarques :

- Toutes ces quantités sont estimées statistiquement.
- $k$  dépend du **backtesting statistique** et de **la qualité** de la **méthodologie statistique** utilisée.
- Une explication détaillée de (2) prend un cours entier !
- La v.a. sous-jacente  $X$  dépend typiquement (mais aussi dynamiquement) de plusieurs centaines (ou plus) de facteurs/séries temporelles.

## 190<sup>e</sup> Rapport annuel – 2007

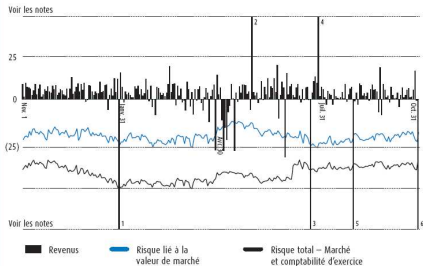


BMO  Groupe financier

Le ratio de capital de première catégorie est notre principale mesure de la suffisance du capital. Ce ratio a baissé, passant de 10,22 % il y a un an à 9,51 %, en raison de la forte croissance de l'actif pondéré en fonction des risques, partiellement neutralisée par l'augmentation du capital de première catégorie. Le ratio demeure solide et a été nettement supérieur à notre politique qui consistait à maintenir un ratio d'au moins 8,0 % en 2007. En 2008, notre cible consiste à maintenir un ratio du capital de première catégorie d'au moins 8,0 %.

## Négociation et prise ferme – Revenus nets par rapport au risque lié à la valeur de marché

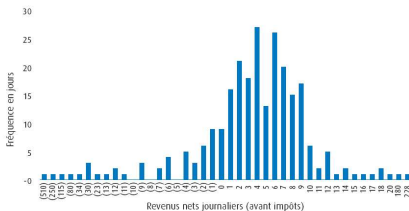
Du 1<sup>er</sup> novembre 2006 au 31 octobre 2007 (en millions de dollars canadiens)



- 31 janvier 2007 : Reflète principalement le retraitement des résultats du premier trimestre de l'ordre de (509) millions de dollars pour tenir compte de l'incidence de l'application d'une méthode plus appropriée d'évaluation du portefeuille de produits de base en fonction du marché. Revenus nets journaliers : (506) millions.
- 31 mai 2007 : Reflète principalement l'incidence de l'application d'une méthode plus appropriée d'évaluation du portefeuille de produits de base en fonction du marché. Revenus nets journaliers : 182 millions.
- 24 juillet 2007 : Reflète principalement les pertes enregistrées dans le portefeuille de produits de base pour supprimer une position importante prise pour notre propre compte. La perte comptabilisée exclut les rajustements d'évaluation touchant ces positions. Revenus nets journaliers : (250) millions.
- 31 juillet 2007 : Reflète principalement la comptabilisation de la contrepassation des rajustements d'évaluation touchant les positions sur produits de base qui ont été supprimées le 24 juillet 2007. Revenus nets journaliers : 229 millions.
- 31 août 2007 : Reflète principalement les rajustements d'évaluation touchant les positions de négociation et de crédits structurés. Revenus nets journaliers : (80) millions.

## Répartition des revenus nets journaliers selon la fréquence

Du 1<sup>er</sup> novembre 2006 au 31 octobre 2007 (en millions de dollars canadiens)



La répartition des revenus nets journaliers des portefeuilles reflète l'impact du retraitement des données relatives à notre portefeuille de produits de base et des rajustements d'évaluation périodiques, comme il est mentionné dans les notes relatives au graphique précédent, Négociation et prise ferme – Revenus nets par rapport au risque lié à la valeur de marché.

## Maintenant que nous avons une vue globale, énumérons quelques thèmes concrets de recherche :

- théorie axiomatique et estimation des mesures de risque
- backtesting de performance de mesures de risque
- estimation d'événements rares et TVE(M)
- une théorie statistique de scénarios de stress
- fusion de données internes, externes et d'experts (Bayes !)
- échelonnage des mesures de risque, p.ex.

$$\text{VaR}_{\alpha_1, T_1} \rightarrow \text{VaR}_{\alpha_2, T_2}$$

- agrégation des risques, p.ex.  
$$\text{VaR}_{\alpha_1, T_1}^{RM} + \text{VaR}_{\alpha_2, T_2}^{RC} + \text{VaR}_{\alpha_3, T_3}^{RO} (+?)$$
- étude de la diversification et de la concentration du risque
- estimation robuste de la dépendance
- estimation de matrices de covariance de grande taille
- problèmes d'espace de Fréchet, ...

# I. Un problème de type Fréchet

$d$  risques sur une seule période :

$$\text{v.a. } X_i : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \rightarrow \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, d$$

une position financière en  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_d)^T$  :

$$\Psi(\mathbf{X}) \text{ où } \Psi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable}$$

une mesure de risque  $\mathcal{R}$  :

$$\mathcal{R} : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathcal{C} \subset L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \text{ un cône, } \mathbf{X} \in \mathcal{C}^d$$

Supposons :

$$X_i \sim F_i \text{ (ou } \hat{F}_i) \quad i = 1, \dots, d \quad (\mathcal{A})$$

une idée de dépendance

Tâche : Calculer  $\mathcal{R}(\Psi(\mathbf{X}))$  sous  $(\mathcal{A})$

(3)

En général (3) n'est pas bien défini (une, aucune ou une **infinité** de solutions), donc dans le dernier cas calculer les bornes appelées **bornes de Fréchet** :

$$\mathcal{R}_{\text{inf}} \leq \mathcal{R}(\Psi(\mathbf{X})) \leq \mathcal{R}_{\text{sup}}$$

où

$$\mathcal{R}_{\text{inf}} = \inf \{ \mathcal{R}(\Psi(\mathbf{X})) \text{ sous } (\mathcal{A}) \}$$

$$\mathcal{R}_{\text{sup}} = \sup \{ \mathcal{R}(\Psi(\mathbf{X})) \text{ sous } (\mathcal{A}) \}$$

Prouver l'**optimalité** de ces bornes et les **calculer**.

**Remarque :**

Remplacer dans  $(\mathcal{A})$  la connaissance sur  $\{F_i : i = 1, \dots, d\}$  par la connaissance sur le **recouvrement** ou le **non-recouvrement des sous-vecteurs**  $\{\mathbf{F}_j : j = 1, \dots, \ell\}$ .

Si  $d = 3$ , par exemple :

Scénario 1: ( $\mathbf{F}_1 = F_1, \mathbf{F}_2 = F_2, \mathbf{F}_3 = F_3$ )

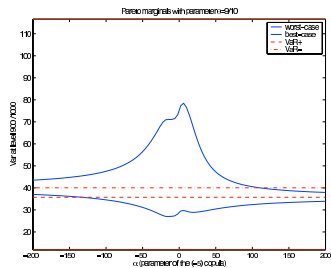
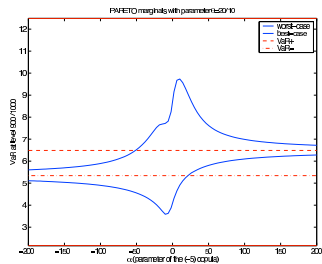
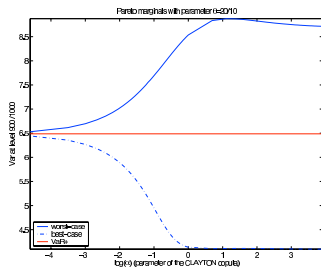
Scénario 2: ( $\mathbf{F}_1 = F_{12}, \mathbf{F}_2 = F_3$ ) + dépendance

Scénario 3: ( $\mathbf{F}_1 = F_{12}, \mathbf{F}_2 = F_{23}$ )

## Théorème (Rüschendorf (1991))

$$\inf_{\mathcal{F}(F_{12}, F_{23})} \mathbb{P}(X_1 + X_2 + X_3 < s) = \int \inf_{\mathcal{F}(F_{12|x_2}, F_{23|x_2})} \mathbb{P}(X_1 + X_3 < s - x_2) dF_2(x_2)$$

# Exemples : Scénario 3



## II. Risque opérationnel

### Définition selon Bâle II

“Le risque de pertes provenant de processus internes inadéquats ou défaillants, de personnes et systèmes ou d'événements externes.”  
Cette définition inclut les risques légaux, mais exclut les risques stratégiques et liés à la réputation.

### Exemples :

- Barings Bank (1995) : \$ 1.33 bn (cependant ...)
- London Stock Exchange (1997) : \$ 630 m
- Bank of New York (9/11/2001) : \$ 242 m
- Société Générale (2008) : \$7.5 bn

### Comment mesurer :

- Valeur-à-risque
  - 1 an
  - 99.9%
- } Approche par la distribution des pertes (ADP)

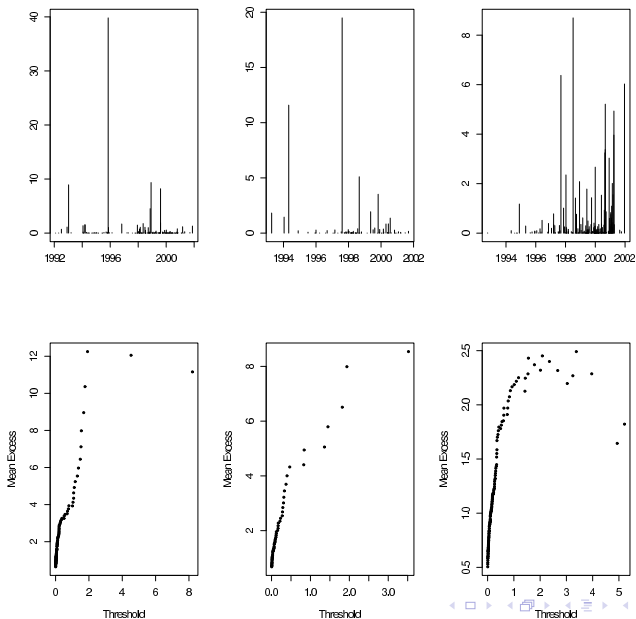
## La structure des données (1/2)

	$RT_1$	...	$RT_r$	...	$RT_7$	
$BL_1$						
$\vdots$						
$BL_b$			$L_{b,r}^t$			
$\vdots$						
$BL_8$						
						$L^t$

$$\mathfrak{X} = \{X_k^{t-i,b,r} : i = 1, \dots, T; b = 1, \dots, 8; r = 1, \dots, 7; k = 1, \dots, N_{b,r}^{t-i}\}$$

$$L^t = \sum_{b=1}^8 \sum_{r=1}^7 L_{b,r}^t = \sum_{b=1}^8 \sum_{r=1}^7 \left( \sum_{k=1}^{N_{b,r}^t} X_k^{t,b,r} \right)$$

# La structure des données (2/2)



# ADP en pratique (données internes)

Étape 1 Fusionner les données des divers secteurs de l'entreprise

Étape 2 Estimer  $\widehat{\text{VaR}}_1, \dots, \widehat{\text{VaR}}_8$  (99.9%, 1 an)

Étape 3 Faire la somme (comonotonicité):  $\widehat{\text{VaR}}_+ = \sum_{b=1}^8 \widehat{\text{VaR}}_b$

Étape 4 Utiliser l'argument de diversification pour rapporter

$$\text{VaR}_{\text{rapporté}} = (1 - \delta)\widehat{\text{VaR}}_+, \quad 0 < \delta < 1$$

(souvent  $\delta \in [0.1, 0.3]$ )

**Question :** quels sont les enjeux statistiques ?

Étape 1 Hétérogénéité des données : estimation de  $\widehat{\text{VaR}}_t$

Étape 2 Quelle méthode utiliser :

(M1) TVE, méthode de seuillage

(M2) Des modèles paramétriques spécifiques

- log-normale, log-gamma

- loi  $g$ -et- $h$  de Tukey

$$X = a + b \frac{e^{gZ} - 1}{g} e^{\frac{h}{2} Z^2}, \quad Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

Étape 3 ✓

Étape 4 - Justifier  $\delta > 0$

- Il est possible que  $\delta < 0$  : alors la  $\text{VaR}$  n'est pas sous-additive !

**Estimation d'événements rares :** la TVE est un outil canonique !

**Données :**  $X_1, \dots, X_n$  iid  $\sim F$  continue,  $M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$

**FdR des excès :**  $F_u(x) = \mathbb{P}(X - u \leq x | X > u)$ ,  $x \geq 0$

**Bases de la TVE :**  $\{H_\xi : \xi \in \mathbb{R}\}$  FdR de valeurs extrêmes généralisées

$$F \in MDA(H_\xi) \Leftrightarrow \exists c_n > 0, d_n \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\frac{M_n - d_n}{c_n} \leq x\right) = H_\xi(x)$$

## Théorème de base (Pickands–Balkema–de Haan)

$$F \in MDA(H_\xi)$$

$\Leftrightarrow$

$$\lim_{u \rightarrow x_F} \sup_{0 \leq x < x_F - u} |F_u(x) - G_{\xi, \beta(u)}(x)| = 0 \quad (4)$$

pour une fonction mesurable  $\beta$  et une FdR (Pareto généralisée)

$G_{\xi, \beta}$ .

## Le cas Fréchet, $\xi > 0$ (Gnedenko):

$$F \in MDA(H_\xi) \Leftrightarrow \bar{F}(x) = 1 - F(x) = x^{-1/\xi} L(x)$$

$L$  (Karamata-) croissance lente:

$$\forall t > 0 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{L(tx)}{L(x)} = 1 \quad (5)$$

- **Remarque:** Contrairement au TCL, le rapport de convergence de (4) pour  $u \rightarrow x_F = \infty$  ( $\xi > 0$ ) peut être **arbitrairement lent**; tout dépend de  $L$  dans (5)!
- **Pertinence pour la pratique** (Risque opérationnel)
  - Débat actuel: TVE-seuillage versus  $g$ -et- $h$
  - Basé sur QISs:
    - ★ Comité de Bâle (47 000 observations)
    - ★ Fed-Boston (53 000 observations)

- Valeurs typiques de  $(g, h)$  pour le RO :  $g \approx 2.4$ ,  $h \approx 0.2$

## Théorème (Degen–Embrechts–Lambrigger)

Pour  $g, h > 0$ ,  $\bar{F}_{g,h}(x) = x^{-1/h} L_{g,h}(x)$

$$L_{g,h}(x) \propto \frac{e^{\sqrt{\log x}}}{\sqrt{\log x}}$$

rapport de convergence dans (4) =  $O((\log u)^{-1/2})$

- **Conclusion** : dans un monde de  $g$ -et- $h$  ( $h > 0$ ), les estimateurs convergent **très lentement**.
- **Cependant** : attention aux “modèles venus de nulle part” !

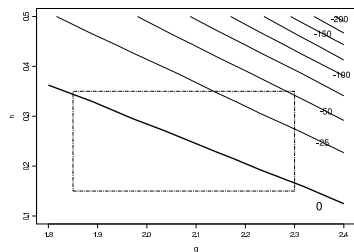
# Quelques commentaires sur la diversification

$X_1, X_2$  iid,  $g$ -et- $h$ ,  $\delta_{g,h}(\alpha) = \text{VaR}_\alpha(X_1) + \text{VaR}_\alpha(X_2) - \text{VaR}_\alpha(X_1 + X_2)$

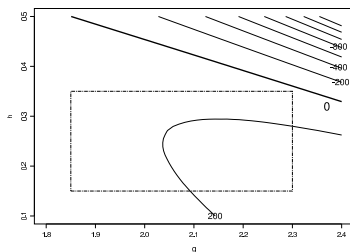
Rappelons que

$$\delta_{g,h}(\alpha) \begin{cases} > 0 & \text{potentiel de diversification} \\ = 0 & \text{comonotonicité} \\ < 0 & \text{non-cohérence} \end{cases}$$

$\alpha = 0.99$

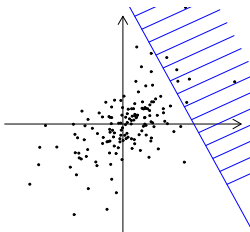
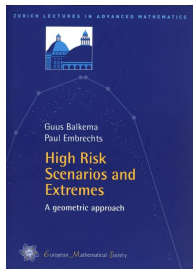


$\alpha = 0.999$



### III. Théorie des valeurs extrêmes multivariées

- Rappelons-nous du théorème de Pickands–Balkema–de Haan ( $d = 1$ ).
- Question : comment généraliser à  $d \geq 2$ ?
  - **approche composant par composant** impliquant variation multivariée régulière, décomposition spectrale et copules de valeurs extrêmes
  - **approche géométrique**



# TVEM : Approche géométrique

- $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_d)$
- $H$ : hyper-espace dans  $\mathbb{R}^d$
- $\mathbf{X}^H$ : vecteur avec FdR conditionnelle connue  $\{\mathbf{X} \in H\}$
- $\beta_H$ : transformations affines
- Étudions :

$$\mathbf{W}_H = \beta_H^{-1}(\mathbf{X}^H) \xrightarrow{d} \mathbf{W} \text{ pour } \mathbb{P}(\mathbf{X} \in H) \rightarrow 0$$

## Questions fondamentales :

- déterminer toutes les limites non-dégénérées  $\mathbf{W}$
- étant donné  $\mathbf{W}$ , déterminer  $\beta_H$
- caractériser les domaines d'attraction de toutes les limites possibles

# TVEM : Approche géométrique

Caractérisation des lois limites ( $d = h + 1$ ,  $\tau = \tau(\lambda, h)$ ):

$$g_0(\mathbf{u}, v) = e^{-(v + \mathbf{u}^T \mathbf{u}/2)} \quad \mathbf{w} = (\mathbf{u}, v) \in \mathbb{R}^{h+1} \quad (6)$$

$$g_\tau(\mathbf{w}) = 1/\|\mathbf{w}\|^{d+\lambda} \quad \mathbf{w} \neq \mathbf{0} \quad (7)$$

$$g_\tau(\mathbf{u}, v) = (-v - \mathbf{u}^T \mathbf{u}/2)_+^{\lambda-1} \quad v < -\mathbf{u}^T \mathbf{u}/2 \quad (8)$$

Exemples de lois situées dans le domaine d'attraction :

- distribution normale multivariée pour (6)
- distribution de Student multivariée pour (7)
- distribution uniforme sur une boule pour (8)
- et distributions dans un “voisinage” de celles-ci

# Les sujets de recherche pertinents sont :

- **exemples concrets**  
p.ex. distributions meta, distributions anti-symétriques,  
... (Balkema, Lysenko, Roy)
- **estimation** d'événements rares multivariés  
(largement ouvert dans le contexte, p.ex. Fougères, Soulier,  
...)
- **simulation stochastique** de tels événements (McLeish)

## Changement de paradigme :

- regarder les **densités** plutôt que les fonctions de répartition ;  
ici intervient la **géométrie** ;
- nouvelle terminologie : données “**bland** (insipides),” ensembles  
à niveaux “**rotund** (circulaires),” ...

## IV. Deux résultats classiques de mathématiques

### Théorème 1

Dans l'espace  $L^p$  avec  $0 < p < 1$ , les seuls ensembles convexes ouverts sont  $\emptyset$  et  $L^p$ .

### Théorème 2 (paradoxe de Banach–Tarski)

Étant donné n'importe quels sous-ensembles bornés  $A, B \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 3$ ,  $\text{int}(A) \neq \emptyset$  et  $\text{int}(B) \neq \emptyset$ , il existe des partitions  $A = A_1 \cup \dots \cup A_k$ ,  $B = B_1 \cup \dots \cup B_k$  telles que pour tout  $1 \leq i \leq k$ ,  $A_i$  et  $B_i$  sont **congruents**.

## Et leurs conséquences

- (Théorème 1) Sur n'importe quel espace avec risques d'espérance infinie, il n'existe aucune mesure de risque non triviale (sous de faibles conditions de continuité).  
(Attention: Risque opérationnel : travail conjoint avec Valérie Chavez-Demoulin et Johanna Nešlehová)
- (Théorème 2) Les mathématiques présentent une vue idéalisée du monde réel ; dans la pratique, il importe de comprendre les conditions d'application des résultats.  
(Attention : CDOs; mark-to-market, mark-to-model, mark-to-myth !)



# Conclusions

- La GQR est un domaine d'application passionnant comportant de nombreux problèmes ouverts et intéressants.
- Son applicabilité s'étend bien au-delà du secteur financier.
- Les années à venir verront certainement une importance croissante de la statistique en finance en général et pour la GQR en particulier.
- Mots clefs : extrêmes, événements rares, multidimensionnalité, structures de données complexes, grands ensembles de données, mesures de risque dynamiques/multipériodes
- (Enseignement / recherche / communication ) concernant ces techniques et résultats recèlent de nombreux défis.
- En tant que scientifique : Restons modestes face aux applications pratiques.

En passant, si vous voulez savoir comment la statistique est de plus en plus utilisée dans le monde économique, tapez dans Google :

- Super Crunchers

Ceci en relation avec l'analyse de

- grands ensembles de données
- Loi de Kryder

Mais tapez aussi dans Google

- George Orwell, *1984*

Merci beaucoup !