

Vorschlag eines Bachelorarbeitsprojekts in Mathematik

Arbeitstitel: **Symbolische Dynamiken für den geodätischen Fluss auf $\mathrm{PG}_0(N)\backslash H$**

Betreuung durch Dr. Anke Pohl, Prof. Dr. Daniel Kressner

Kurzbeschreibung des Projekts:

Dynamische Systeme, wie z.B. geodätische Flüsse auf gekrümmten Flächen, weisen häufig ein kompliziertes (etwa chaotisches) Verhalten auf. Um die Untersuchung einiger ihrer Eigenschaften zu ermöglichen bzw. zu vereinfachen, bedient man sich häufig einer Raum-Zeit-Diskretisierung und symbolischen Darstellung des dynamischen Systems, einer sogenannten symbolischen Dynamik.

In diesem Projekt konzentrieren wir uns auf den Fall des geodätischen Flusses auf den Orbifolds $\mathrm{PG}_0(N)\backslash H$, wobei

$$H := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im} z > 0\}$$

die obere Halbebene (als Modell des zwei-dimensionalen reell hyperbolischen Raumes) bezeichnet und $\mathrm{PG}_0(N)$ ($N \in \mathbb{N}$) die Kongruenzuntergruppe

$$\mathrm{PG}_0(N) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z}) \mid c \equiv 0 \pmod{N} \right\}$$

von $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) = \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})/\{\pm \mathrm{id}\}$ ist.

In [Poh10] ist ein neuer Algorithmus zur Konstruktion von symbolischen Dynamiken für den geodätischen Fluss auf Orbifolds der Form $\Gamma\backslash H$ entwickelt worden. Hierbei muss die Gruppe Γ eine geometrisch endliche Untergruppe von $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ sein, die ∞ als Spitze hat und eine weitere Bedingung namens (A2) (siehe unten) erfüllt. Dieser Algorithmus heißt „Spitzenentwicklung“ aufgrund der speziellen Rolle, die die Spitzen der Gruppe Γ spielen.

Man zeigt sehr leicht, dass für jedes $N \in \mathbb{N}$ die Gruppe $\mathrm{PG}_0(N)$ geometrisch endlich und ∞ eine ihrer Spitzen ist. Für den Fall, dass N eine Primzahl ist, sieht man in [HP08], dass $\mathrm{PG}_0(N)$ die Bedingung (A2) erfüllt. Für andere Werte von N ist es prinzipiell sehr leicht zu überprüfen, ob $\mathrm{PG}_0(N)$ die Bedingung (A2) erfüllt. Leider muss diese Überprüfung zur Zeit für jedes N einzeln manuell gemacht werden und nimmt dementsprechend viel Zeit in Anspruch.

Ziel dieses Projekts ist, ein Programm zu entwickeln, welches bei Eingabe von N überprüft, ob $\mathrm{PG}_0(N)$ die Bedingung (A2) erfüllt oder nicht. Weiterhin soll der Algorithmus zur Konstruktion der symbolischen Dynamiken nach Spitzenentwicklung für $\mathrm{PG}_0(N)$ in ein interaktives Computerprogramm mit graphischer Ausgabe umgesetzt werden.

Konkrete Schritte¹:

- (1) Schreiben eines Programms zur Überprüfung, ob $\mathrm{PG}_0(N)$ die Bedingung (A2) erfüllt. Hierbei soll eine Liste der relevanten isometrischen Sphären erstellt werden und eine Komplexitätsabschätzung des Programms (ich vermute, dass man ohne großen Aufwand eine Laufzeit

¹Weitere Erläuterungen und Definitionen folgen unten.

und einen Speicherbedarf polynomial in N erreichen kann) durchgeführt werden.

- (2) Wenn $\text{P}\Gamma_0(N)$ die Bedingung (A2) erfüllt, Programmierung des Algorithmus zur Erstellung einer symbolischen Dynamik aus [Poh10]. Dieser Algorithmus erlaubt an einigen Stellen Wahlen, die die konkrete symbolische Dynamik beeinflussen. An solchen Stellen soll der Bediener des Programms interaktiv diese Wahlen treffen können. Es soll eine Ausgabe als Vektorgraphik möglich sein, die in eine eps-Datei konvertiert werden kann (dieses sollte sich durch ein Skript erreichen lassen können, welches eine MetaPost- oder asymptote-Datei erzeugt). Weiterhin soll eine Komplexitätsabschätzung des Programms vorgenommen werden.

Weitere Erläuterungen zu Schritt (1): Setze $\Gamma := \text{P}\Gamma_0(N)$.

- (i) Einige Definitionen und Bemerkungen: Die Wirkung von Γ auf H ist gegeben durch

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Diese setzt stetig auf den geodätischen Abschluss von H , d.h. auf $H \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, fort. Es ist

$$\Gamma_\infty = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma \mid c = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Die *isometrische Sphäre* von $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma \setminus \Gamma_\infty$ ist

$$I(g) := \{z \in H \mid |cz + d| = 1\}.$$

Die *Gipfelstelle* von $I(g)$ ist der Punkt

$$s := -\frac{d}{c} + i\frac{1}{c}.$$

Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass $c > 0$ ist. Dann ist $I(g)$ offensichtlich die (euklidische) Halbsphäre mit Radius $\frac{1}{c}$ und Mittelpunkt $-\frac{d}{c}$. Die Gipfelstelle ist also der Punkt auf $I(g)$ maximaler Höhe.

Das *Äußere* von $I(g)$ ist die Menge

$$\text{ext } I(g) := \{z \in H \mid |cz + d| > 1\}.$$

Setze

$$\mathcal{K} := \bigcap_{g \in \Gamma \setminus \Gamma_\infty} \text{ext } I(g).$$

Die Menge \mathcal{K} ist ein hyperbolischer Polyeder. Ihr Rand $\partial\mathcal{K}$ ist in der Vereinigung aller isometrischen Sphären enthalten.

Eine isometrische Sphäre $I(g)$ heißt *relevant*, wenn $I(g) \cap \partial\mathcal{K}$ mehr als einen Punkt enthält. Die Gruppe Γ erfüllt die *Bedingung (A2)*, wenn die Gipfelstelle jeder relevanten isometrischen Sphäre in $\partial\mathcal{K}$ liegt, aber keine Ecke von \mathcal{K} ist.

- (ii) mögliche Strategie zur Lösung: Man ermittle zunächst die relevanten isometrischen Sphären.
- (i) Wenn (c, d) ein Paar ganzer teilerfremder Zahlen ist und c durch N teilbar, dann gibt es in Γ ein Element der Form $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
- (ii) Da \mathcal{K} 1-periodisch ist, reicht es, die isometrischen Sphären mit Mittelpunkt in $[0, 1]$ zu betrachten.

- (iii) Es bezeichne $I(c, d)$ die isometrische Sphäre $\{z \in H \mid |cz + d| = 1\}$.
- (iv) Man muss also nur die isometrischen Sphären $I(c, d)$ mit $c > 0$, N teilt c und $0 < -d < c$ betrachten.
- (v) Sei (c, d) eines der zu betrachtenden Paare. Dann ist die isometrische Sphäre $I(kc, f)$ nicht relevant, wenn $k \in \mathbb{N}$ und $f \in [kd - k + 1, kd + k - 1]$.
- (vi) Allgemeiner: Sei (c, d) eines der zu betrachtenden Paare. Dann ist die isometrische Sphäre $I(e, f)$ nicht relevant, wenn

$$\frac{-d-1}{c} \leq \frac{-f-1}{e} < \frac{-f+1}{e} \leq \frac{-d+1}{c}.$$
- (vii) Es sind also nur endliche viele isometrische Sphären $I(c, d)$ auf Relevanz zu untersuchen.
- (viii) Man kann jetzt iterativ $c = N, 2N, 3N, 4N, \dots$ durchgehen und nach „sinnvollen“ isometrischen Sphären der Form $I(c, d)$ überprüfen.
- (ix) Nun untersuche man die Lage der Gipfelstellen der relevanten isometrischen Sphären zu den anderen relevanten isometrischen Sphären, um Bedingung (A2) zu überprüfen.

Weitere Erläuterungen zu Schritt (2) folgen nach Bearbeitung von Schritt (1). Die recht kurze Arbeit [HP08] enthält die Konstruktion einer symbolischen Dynamik nach Spitzenentwicklung für $\mathrm{P}\Gamma_0(N)$, N prim, wobei die Wahlmöglichkeiten nicht diskutiert werden. Der vollständige Algorithmus ist ein Spezialfall von [Poh10].

LITERATUR

- [HP08] J. Hilgert and A. Pohl, *Symbolic dynamics for the geodesic flow on locally symmetric orbifolds of rank one*, Infinite Dimensional Harmonic Analysis IV, World Scientific, 2008.
- [Poh10] A. Pohl, *Symbolic dynamics for the geodesic flow on two-dimensional hyperbolic good orbifolds*, 2010, arXiv:1008.0367v1.