1. Wir betrachten die Funktion

$$f(x) = e^{1+x^2} - 20 \qquad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$

a) Bestimmen Sie die Linearisierung von $f(x)$ in $x_0 = 1$. 3 Punkte

b) Was ist der Wertebereich von $f(x)$? 2 Punkte

c) Sei $F(x)$ die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} F'(x) = f(x) \\ F(0) = 2. \end{cases}$$

Ist $F(1)$ grösser oder kleiner als 2? Sie brauchen $F(x)$ **nicht** zu bestimmen. Vergessen Sie nicht, Ihre Antwort zu begründen. 3 Punkte

Lösung. a) Die Linearisierung ist gegeben durch:

$$f(1) + f'(1)\,(x-1)$$

Auswerten zeigt $f(1) = e^2 - 20$ (**1 Punkt**) sowie $f'(x) = 2xe^{1+x^2}$ mit $f'(1) = 2e^2$ (**1 Punkt**). Daher:

$$f(1) + f'(1)\,(x-1) = e^2 - 20 + 2e^2 \cdot x - 2e^2 = 2e^2 \cdot x - e^2 - 20.$$

(**1 Punkt** für das Resultat)

b) Man bemerke, dass das Bild von $1 + x^2$ das ganze Intervall $[1, +\infty[$ ist. Dadurch nimmt e^{1+x^2} alle Werte im Intervall:

$$[e^2, +\infty[,$$

an. Somit ist die Wertemenge von f genau:

$$[e^2 - 20, +\infty[.$$

Je **1 Punkt** für die beiden Intervallgrenzen.

c) Beachte, dass:

$$F'(x) = f(x) = e^{1+x^2} - 20.$$

Wir wollen die Monotonie-Eigenschaften von F und damit die Vorzeichen der Werte von f bestimmen: F ist (streng) monoton fallend auf Intervallen mit $F'(x) = f(x) \leq 0$ bzw. $F'(x) = f(x) < 0$. (**1 Punkt** für die Idee, $f(x) <> 0$ zu untersuchen.) Dies ist der Fall, wenn:

$$e^{1+x^2} - 20 < 0 \Rightarrow 1 + x^2 < \ln(20) \Rightarrow x^2 < \ln(20) - 1 = \ln\left(\frac{20}{e}\right)$$

Man bemerke, dass $1^2 < \ln(20/e)$. Da dasselbe für alle x^2 mit $x \in [0,1]$ gilt, wissen wir: (**1 Punkt**)

$$F \text{ ist streng monoton fallend auf } [0,1].$$

Dadurch gilt aber auch:

$$F(1) < F(0) = 2,$$

also ist $F(1)$ strikt kleiner als 2. (**1 Punkt** für die Schlussfolgerung)

$\square$

2. **a)** Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'' - 2y' + 5y = 8e^{-x} \ .$$

4 Punkte

b) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$2yy' = y^2 + 3, \quad y(0) = 2 \ .$$

4 Punkte

Lösung. a) Die DGL ist hier linear und inhomogen. Entsprechend hat die allgemeine Lösung die folgende Form:

$$y(x) = y_{part}(x) + y_{hom}(x),$$

wobei $y_{part}(x)$ eine beliebige Lösung der DGL ist und $y_{hom}(x)$ die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen DGL:

$$y'' - 2y' + 5y = 0.$$

Betrachten wir zuerst die homogene DGL. Hierbei machen wir wie in der Vorlesung den Ansatz $y(x) = e^{\lambda x}$ und setzen dies ein:

$$y''(x) - 2y'(x) + 5y(x) = e^{\lambda x}\left(\lambda^2 - 2\lambda + 5\right) = 0.$$

Lösen wir nun die Gleichung $\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$, so finden wir:

$$\lambda = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 5}}{2} = 1 \pm \sqrt{-4} = 1 \pm 2i$$

Gemäss der Vorlesung hat also die allgemeine reelle Lösung die Form:

$$y_{hom}(x) = C_1 \cdot e^x \cos(2x) + C_2 \cdot e^x \sin(2x),$$

mit $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ beliebige Parameter. Das Finden der allgemeinen homogenen Lösung gibt **1 Punkt**, auch wenn man direkt das charakteristisches Polynom schreibt (d.h. ohne Ansatz). Um die inhomogene DGL zu lösen, brauchen wir noch eine partikuläre Lösung und dazu machen wir den Ansatz (**1 Punkt** für den Ansatz):

$$y_{part}(x) = A \cdot e^{-x},$$

mit $A \in \mathbb{R}$. Einsetzen zeigt:

$$y''_{part}(x) - 2y'_{part}(x) + 5y_{part}(x) = A \cdot e^{-x}\left((-1)^2 - 2(-1) + 5\right) = 8Ae^{-x} = 8e^{-x}$$

Hieraus ergibt sich die Gleichung $8A = 8$ und somit:

$$y_{part}(x) = e^{-x}.$$

Das Auffinden der speziellen Lösung gibt abermals **1 Punkt**. Einsetzen zeigt nun also:

$$y(x) = e^{-x} + C_1 e^x \cos(2x) + C_2 e^x \sin(2x),$$

für Parameter $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Das gibt nochmals **1 Punkt**, da dies das Verständnis der Struktur der allgemeinen Lösung beweist (Punkt wird auch erteilt, wenn an früherer Stelle die Formel $y(x) = y_{hom}(x) + y_{part}(x)$ angegeben wird).

b) Die DGL ist separierbar und lässt sich wie folgt umschreiben:

$$\frac{2yy'(x)}{y^2+3} = 1.$$

Integrieren auf beiden Seiten ergibt nun:

$$\int \frac{2y}{y^2+3}\, dy = \int 1\, dx + k \qquad \text{mit } k \in \mathbb{R}$$

also

$$\ln(y^2+3) = x + k.$$

Setzen wir den Anfangswert $y(0) = 2$ ein, so finden wir $k = \ln(7)$. Umformen zeigt nun:

$$y^2 + 3 = e^{x+\ln(7)} \qquad \Longleftrightarrow \qquad y^2 = 7e^x - 3.$$

Da $y(0) = 2$ positiv ist, wählen wir die positive Wurzel:

$$y(x) = \sqrt{7e^x - 3} \qquad \text{definiert für } x \geq \tfrac{3}{7}.$$

Hierbei gibt der Ansatz zur Separation **1 Punkt**, eine korrekte Integration auf beiden Seiten ebenfalls **1 Punkt**, das Einsetzen des Anfangswertes erneut **1 Punkt** und der **letzte Punkt** wird für das Auflösen und Finden von $y(x)$ (auch wenn der Definitionsbereich nicht angegeben wird).

□

3. Wir betrachten die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Ist das folgende System lösbar?

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Falls ja, bestimmen Sie eine partikuläre Lösung.
Falls nein, erklären Sie warum keine Lösung existiert. 3 Punkte

b) Bestimmen Sie eine Basis der Lösungsmenge des Systems $A\vec{x} = \vec{0}$. 3 Punkte

c) Was ist die Dimension des Raums aller Vektoren $\vec{v}$, für die das System $A\vec{x} = \vec{v}$ lösbar ist? 2 Punkte

Lösung. a) Durch elementare Zeilenumformungen sehen wir:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

Diese ZSF (oder eine äquivalente Vereinfachung) gibt **1 Punkt**. Hieraus erkennt man dank der Zeilenstufenform, dass das System $A\vec{x} = \vec{b}$ für alle $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$ lösbar ist, wie in der Vorlesung gesehen (**1 Punkt**). Eine spezielle Lösung $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ kann man bestimmen, indem man alle Variablen, welche nicht zu Diagonalelementen der Zeilenstufenform gehören (in diesem Fall x_4) gleich Null setzt:

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = 0.$$

Die letzte Gleichung folgt, da wir diesen Eintrag ignoriert haben. Daraus folgt also auch:

$$x_1 = 1 - 2x_2 - 2x_3 = 1 - 2 \cdot (-1) - 2 \cdot 0 = 3.$$

Eine partikuläre Lösung ist also:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Eine partikuläre Lösung gibt **1 Punkt**. Falls nur ene partikuläre Lösung angegeben ist, ohne vorab die Existenz zu begründen, werden trotzdem alle Punkte gegeben.

b) Hierzu betrachten wir abermals die Zeilenstufenform wie vorhin. Jede Spalte, welche nicht zu einem Diagonalenelement in der Zeilenstufenform gehört, gibt uns einen Freiheitsgrad. Also müssen wir das System $A\vec{x} = \vec{0}$, mit $\vec{x}$ wie zuvor, welches wir auch schreiben können als:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & \vdots & 0 \\ 2 & 6 & 6 & 6 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \vdots & 0 \end{pmatrix},$$

nach x_1, x_2 und x_3 in Abhängigkeit von x_4 lösen. Das ergibt die Gleichungen (**1 Punkt** für maximal vereinfachte Gleichungen)

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 + 2x_4 = 0$$

Folglich also $x_2 = 0$ und $x_3 = -2x_4$. Setzt man dies in die erste Gleichung ein, so finden wir:

$$x_1 = -2x_2 - 2x_3 - x_4 = -2 \cdot 0 - 2 \cdot (-2x_4) - x_4 = 3x_4.$$

Die allgemeine Lösung des Systems ist also (**1 Punkt**)

$$\begin{pmatrix} 3x_4 \\ 0 \\ -2x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_4 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Also ist eine Basis des Lösungsraumes (**1 Punkt**) $A\vec{x} = \vec{0}$ gegeben durch:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

c) Die gesuchte Dimension ist die Dimension des Spaltenraums von A, $\dim S(A)$. Gemäss des Rangsatzes gilt

$$4 = \dim \ker(A) + \dim S(A).$$

Es gibt **1 Punkt** für den Rangsatz. Gemäss Teil (b) ist $\dim \ker(A) = 1$. Somit ist $\dim S(A) = 3$. **1 Punkt** für das korrekte Resultat.

Alternativ: Gemäss der Zeilenstufenform wie in der ersten Teilaufgabe finden wir, für ein beliebiges $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)^T \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & \vdots & b_1 \\ 2 & 6 & 6 & 6 & \vdots & b_2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \vdots & b_3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & \vdots & b_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \vdots & b_2 - 2b_1 - 2b_3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \vdots & b_3 \end{pmatrix}$$

Aus der Vorlesung wissen wir, dass aufgrund dieser Zeilenstufenform automatisch der Raum aller $\vec{v}$ mit dieser Eigenschaft $\mathbb{R}^3$ sein muss, also ist die von der Matrix A induzierte lineare Abbildung surjektiv.

$\square$

4. Wir betrachten die Funktion

$$f(x,y) = x^2 + 2y^3 - 3y^2 + 1 \qquad \text{für } (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

a) Bestimmen Sie und klassifizieren Sie die kritischen Punkte von f (als lokales Maximum, lokales Minimum oder Sattelpunkt). 4 Punkte

b) Wir betrachten die Verkettung $f(x(t), y(t))$ von $f(x,y)$ mit der folgenden Parametrisierung vom Einheitskreis:

$$\begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t \end{cases} \qquad \text{für } t \in [0, 2\pi].$$

Bestimmen Sie die Ableitung dieser Verkettung für $t = \pi$. 3 Punkte

c) Sei $\vec{F} = \text{grad}(f)$. Bestimmen Sie das Kurvenintegral vom Vektorfeld $\vec{F}$ längs dem *Viertelkreis* mit der Parametrisierung

$$\begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t \end{cases} \qquad \text{für } t \in [0, \tfrac{\pi}{2}].$$

3 Punkte

Lösung. a) Ein Punkt $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ist genau dann kritisch, wenn:

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

Man kann sehen, dass:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 6y^2 - 6y = 6y(y-1)$$

Dadurch ist klar, dass die einzigen kritischen Punkte genau $(0,0), (0,1)$ sind. **1 Punkt** für beide kritischen Punkte zusammen. Um diese zu klassifizieren, brauchen wir die Hesse-Matrix von f:

$$\text{Hess}_f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12y - 6 \end{pmatrix}$$

Die Hesse-Matrix gibt **1 Punkt**. Durch Einsetzen sehen wir:

$$\text{Hess}_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$$

Dadurch hat die Hesse-Matrix bei $(0,0)$ jedoch eine negative Determinante, also ist $(0,0)$ ein Sattelpunkt. Die Schlussfolgerung für den Sattelpunkt gibt **1 Punkt**. Zudem finden wir bei $(0,1)$:

$$\mathsf{Hess}_f(0,1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Man erkennt leicht, dass $2 > 0$ und die Determinante $2 \cdot 6 > 0$. Also ist die Hesse-Matrix positiv definit und $(0,1)$ ein lokales Minimum. Die Schlussfolgerung für das Minimum gibt **1 Punkt**.

Falls falsche kritische Punkte berechnet wurden, aber die Bestimmung des Typs folgerichtig ist, gibt es **1 Punkt** für ein Max bzw Min, und **1 Punkt** für einen Sattelpunkt, allerdings nicht 2 Punkte, falls beide ein Minimum sind.

b) Man beachte, dass (**1 Punkt**):

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}\Bigg|_{t=\pi} = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}\Bigg|_{t=\pi} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Gemäss der Kettenregel gilt (**1 Punkt**):

$$\frac{d}{dt} f(x(t), y(t))\Big|_{t=\pi} = \nabla f(x(\pi), y(\pi)) \cdot \begin{pmatrix} \dot{x}(\pi) \\ \dot{y}(\pi) \end{pmatrix} = \nabla f(-1,0) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Aus der vorherigen Teilaufgabe wissen wir:

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 6y^2 - 6y \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \nabla f(-1,0) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Somit also (**1 Punkt** für das Endresultat):

$$\nabla f(-1,0) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0.$$

c) Man bemerke, dass dann f ein Potential zum Vektorfeld $\vec{F}$ ist. Dadurch gilt also (C ist hierbei der durch $(x(t), y(t))$ parametrisierte Viertelkreis)(**1 Punkt**):

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = f\left(x\left(\tfrac{\pi}{2}\right), y\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\right) - f\left(x(0), y(0)\right).$$

Daher reicht es also, f an diesen zwei Stellen auszuwerten. Man sieht:

$$\left(x\left(\tfrac{\pi}{2}\right), y\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\right) = f(0,1) = 0.$$

Ferner:

$$f(x(0), y(0)) = f(1, 0) = 2.$$

Daher gilt also:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0 - 2 = -2.$$

Es gibt **2 Punkte** für das Resultat inklusive ersichtlicher Berechnung. 1 Punkt Abzug für Rechnungsfehler.

$\square$

5. Die Ebene mit der Gleichung $y = 2z$ schneidet den massiven geraden Kreiszylinder $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$ in einer Fläche S.

a) Parametrisieren Sie S mit Zylinderkoordinaten. 2 Punkte

b) Bestimmen Sie den Flächeninhalt von S. 4 Punkte

c) Mithilfe des Satzes von Stokes bestimmen Sie die Arbeit $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, die das Vektorfeld

$$\vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} yz \\ 2xz \\ x \end{pmatrix} \qquad \text{für } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

leistet bei einem Umlauf längs der Randkurve C von S im positiven Sinn, wenn von ganz oben beobachtet. 4 Punkte

Lösung. a) In Zylinderkoordinaten haben wir:

$$\begin{aligned} x &= r\cos(\theta) \\ y &= r\sin(\theta) \\ z &= h \end{aligned}$$

mit $r \geq 0, \theta \in [0, 2\pi[, h \in \mathbb{R}$. Nun sehen wir also, dass die (Un-)Gleichungen uns zu folgenden (Un-)Gleichungen in Zylinderkoordinaten führen:

$$y = r\sin(\theta) = 2h = 2z, \quad x^2+y^2 = r^2 \leq 4 \Rightarrow 0 \leq r \leq 2, \quad r\sin(\theta) = 2h$$

Dadurch parametrisieren wir die Fläche S in Abhängigkeit von r, θ wie folgt:

$$\Phi :]0, 2[\times]0, 2\pi[\to \mathbb{R}^3, \quad \Phi(r, \theta) := \begin{pmatrix} r\cos(\theta) \\ r\sin(\theta) \\ \frac{1}{2}r\sin(\theta) \end{pmatrix}$$

1 Punkt für $0 \leq r \leq 2$ und **1 Punkt** für $z = \frac{1}{2}r\sin(\theta)$.

b) Man bemerke, dass:

$$\begin{aligned} \Phi_r(r, \theta) \times \Phi_\theta(r, \theta) &= \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \\ \frac{1}{2}\sin(\theta) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r\sin(\theta) \\ r\cos(\theta) \\ \frac{1}{2}r\cos(\theta) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sin(\theta) \cdot \frac{1}{2}r\cos(\theta) - \frac{1}{2}\sin(\theta) \cdot r\cos(\theta) \\ \frac{1}{2}\sin(\theta) \cdot (-r)\sin(\theta) - \cos(\theta) \cdot \frac{1}{2}r\cos(\theta) \\ \cos(\theta) \cdot r\cos(\theta) - \sin(\theta) \cdot (-r)\sin(\theta) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2}r \\ r \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Also:

$$|\Phi_r \times \Phi_\theta| = \frac{\sqrt{5}}{2} r$$

(**2 Punkte**, davon 1 Punkt für das Kreuzprodukt, 1 Punkt für den Betrag)
Der Flächeninhalt ist also:

$$\begin{aligned}\iint_S 1 \; dA &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} 1 \cdot \tfrac{\sqrt{5}}{2} r \, d\theta \, dr \\ &= \sqrt{5}\pi \int_0^2 r \, dr = \frac{\sqrt{5}}{2}\pi \cdot \left(2^2 - 0^2\right) = 2\sqrt{5}\pi.\end{aligned}$$

1 Punkt für das korrekte Resultat, **1 Punkt** für die korrekte allgemeine Form des Integrals inklusive korrekte Grenzen und Integrand.

c) Gemäss Satz von Stokes gilt (**1 Punkt**):

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dA$$

Wir berechnen die Rotation von $\vec{F}$ (**1 Punkt**):

$$\operatorname{rot} \vec{F}(x,y,z) := \begin{pmatrix} 0 - 2x \\ y - 1 \\ 2z - z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x \\ y - 1 \\ z \end{pmatrix}$$

Daher, mithilfe der Parametrisierung $\Phi(r,\theta)$ aus der letzten Teilaufgabe:

$$\begin{aligned}\iint_S \operatorname{rot} \vec{F} \cdot d\vec{A} &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -2r\cos(\theta) \\ r\sin(\theta) - 1 \\ \frac{1}{2} r \sin(\theta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} r \\ r \end{pmatrix} d\theta \, dr \\ &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} -\frac{1}{2} r^2 \sin(\theta) + \frac{1}{2} r + \frac{1}{2} r^2 \sin(\theta) \, d\theta \, dr \\ &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} \tfrac{1}{2} r \, d\theta \, dr \\ &= 2\pi.\end{aligned}$$

1 Punkt für das korrekte Resultat, inklusive Rechnung, bis auf Vorzeichen;
1 Punkt für das korrekte Vorzeichen.

□

6. Betrachten Sie das folgende Vektorfeld

$$\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} y - \frac{y}{x^2+y^2} \\ x + \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix},$$

welches für $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ definiert ist.

a) Ist $\vec{F}$ ein Gradientenfeld auf dem ersten Quadranten 3 Punkte

$$Q := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x, y > 0\right\}?$$

Ja: ☐ Nein: ☐

Begründung:

Lösung. Ja (1 **Punkt**): Wir berechnen zuerst die Vorticity des Vektorfeldes:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x}\left(x + \frac{x}{x^2+y^2}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(y - \frac{y}{x^2+y^2}\right) \\
&= \left(1 + \frac{(x^2+y^2) - x \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}\right) - \left(1 - \frac{(x^2+y^2) - y \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}\right) \\
&= \frac{2}{x^2+y^2} - \frac{2x^2+2y^2}{(x^2+y^2)^2} = 0.
\end{aligned}$$

(**1 Punkt** für die Rechnung.) Daher ist das Vektorfeld $\vec{F}$ auf einfach zusammenhängenden Gebieten jeweils ein Gradientenfeld. Da Q einfach zusammenhängend ist, ist $\vec{F}$ auf Q ein Gradientenfeld. (**1 Punkt** für die Schlussfolgerung.) □

b) Ist $\vec{F}$ ein Gradientenfeld auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$? 3 Punkte

Ja: ☐ Nein: ☐

Begründung:

Lösung. Nein (**1 Punkt**): Da $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ nicht einfach zusammenhängend ist, berechnen wir das Integral entlang des Kreises C mit Radius 1 um $(0,0)$. Diesen parametrisieren wir wie üblich mittels:

$$\vec{r} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad \vec{r}(t) = (\cos(t), \sin(t))$$

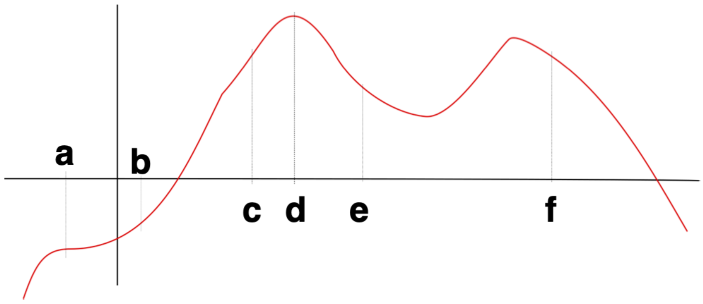
Es gilt:

$$\begin{aligned}\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_0^{2\pi} \vec{F}(\cos(t), \sin(t)) \cdot \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^{2\pi} 1 \, dt = 2\pi \neq 0.\end{aligned}$$

(**1 Punkt** für die Rechnung.) Dies beweist, dass das Vektorfeld $\vec{F}$ **kein** Gradientenfeld auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ist. (**1 Punkt** für die Schlussfolgerung.) □

Für Aufgaben 7-31: Es gibt pro Frage zwei Punkte. Falsche oder mehrere Antworten werden mit null Punkten bewertet. **Nur** Antworten **auf dem Abgabeblatt** werden gezählt.

7. Wir betrachten die zweimal stetig differenzierbare Funktion f mit folgendem Graph. Wählen Sie die richtige Aussage:



(a) f' besitzt mindestens 5 Nullstellen.

(b) f' besitzt mindestens 2 Sattelpunkte.

(c) Es gilt: $f'(e) \cdot f''(e) \leq 0$.

(d) Es gilt: $f''(d) \geq f''(b)$.

Lösung. Man bemerke, dass in **a** ein Sattelpunkt ist, in **d** ein lokales Maximum und zwischen **e** und **f** ein lokales Maximum und ein lokales Minimum existieren. Soweit ersichtlich gibt es keine anderen kritischen Punkte, also hat f' nur 4 Nullstellen mit Sicherheit. Ebenso wird aus obiger Beschreibung klar, dass nur ein garantierter Sattelpunkt existiert. In **d** haben wir ein lokales Maximum, also:

$$f''(d) \leq 0.$$

Andererseits ist f nahe **b** (strikt) konvex, also:

$$f''(b) > 0.$$

Somit ist auch $f''(d) < f''(b)$. Man bemerke aber, dass wir in **e** fallend sind, also $f'(e) \leq 0$ und die Funktion dort in einer Umgebung auch konvex ist, also $f''(e) \geq 0$. Daraus folgt:

$$f'(e) \cdot f''(e) \leq 0.$$

□

8. Was ist der Grenzwert

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\frac{4}{x}} \quad ?$$

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) $+\infty$

Lösung. Wir sehen:

$$x^{\frac{4}{x}} = e^{\frac{4}{x}\ln(x)}$$

Da $t \mapsto e^t$ stetig ist, reicht es also, den Grenzwert:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{4}{x}\ln(x),$$

zu bestimmen und das Resultat in die Exponentialfunktion einzusetzen, um den gesuchten Grenzwert zu bestimmen. Man bemerke, dass:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty, \quad \lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty,$$

und somit:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{4}{x}\ln(x) = -\infty.$$

Daher folgt auch:

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\frac{4}{x}} = 0.$$

□

9. Sei $g(y)$ die Umkehrfunktion der Funktion

$$y = f(x) = x^3 + e^{(x+1)^5-1}.$$

Was ist der Wert der Ableitung von g an der Stelle $y = f(0) = 1$?

(a) $g'(1) = -5$

(b) $g'(1) = \frac{1}{5}$

(c) $g'(1) = -\frac{1}{5}$

(d) $g'(1) = 5$

Lösung. Da g die Umkehrfunktion zu f ist, wissen wir:

$$g'(1) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{5},$$

denn:

$$f'(x) = 3x^2 + 5(x+1)^4 e^{(x+1)^5-1} \Rightarrow f'(0) = 5.$$

□

10. Wie viele Nullstellen besitzt die Funktion $f(x) = 2e^x - x - 2$ für $x \in \mathbb{R}$?

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3

Lösung. Man betrachte die Ableitung von f:

$$f'(x) = 2e^x - 1.$$

Dadurch ist klar, dass:

- Wenn $x > \ln\left(\frac{1}{2}\right)$, dann ist f streng monoton wachsend.
- Wenn $x < \ln\left(\frac{1}{2}\right)$, dann ist f streng monoton fallend.

Also ist f auf $]-\infty, -\ln(2)]$ streng monoton fallend und auf $[-\ln(2), +\infty[$ streng monoton wachsend. Zudem gilt

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

Folglich nimmt die Funktion in $x = -\ln(2)$ ihr globales Minimum an und jeden Wert, der grösser als dieses Minimum ist, genau zweimal an. Nun ist:

$$f(-\ln(2)) = 2 \cdot \frac{1}{2} - (-\ln(2)) - 2 = 1 + \ln(2) - 2 = \ln(2) - 1 < 0.$$

Somit liegt 0 im Bild über dem globalen Minimum und dieser Wert wird zweimal angenommen von f.

Alternativ: Man kann die Schnittpunkte zwischen $f_1(x) = e^x$ und $f_2(x) = \frac{1}{2}x+1$ analysieren und feststellen, dass genau zwei solche existieren. □

11. Was ist der Wert der Ableitung der Funktion

$$f(x) = \int_0^{2x} \ln(t^4 + e^4)\, dt$$

im Ursprung?

(a) $f'(0) = 0$

(b) $f'(0) = 2$

(c) $f'(0) = 4$

(d) $f'(0) = 8$

Lösung. Mit der Kettenregel und dem Hauptsatz der Analysis finden wir

$$f'(x) = 2\ln((2x)^4 + e^4).$$

Im Ursprung dann gilt $f'(0) = 2\ln(e^4) = 8$.

Alternativ: Man beachte, dass gemäss Hauptsatz der Analysis, wenn F die Stammfunktion zu $\ln(x^4 + e^4)$ mit $F(0) = 0$ ist, die Funktion f gerade $F(2x)$ ist. Daher gilt:

$$f'(x) = 2F'(2x) = 2\ln((2x)^4 + e^4) \Rightarrow f'(0) = 2\ln(e^4) = 8.$$

□

12. Welche der folgenden Aussagen über die Funktion

$$f(x) = x^4 + x^3$$

auf dem Intervall $[-1, 0]$ ist richtig?

(a) f nimmt auf $[-1, 0]$ ihr globales Minimum im Punkt $x = -\frac{1}{3}$ an.

(b) f nimmt auf $[-1, 0]$ ihr globales Minimum im Punkt $x = -\frac{3}{4}$ an.

(c) f nimmt auf $[-1, 0]$ ihr globales Maximum im Punkt $x = -\frac{3}{4}$ an.

(d) f nimmt auf $[-1, 0]$ ihr globales Maximum im Punkt $x = -\frac{1}{3}$ an.

Lösung. Wir sehen, dass die kritischen Punkte in $]-1, 0[$ gerade die Nullstellen von $f'(x) = 4x^3 + 3x^2 = x^2(4x + 3)$ sind. Daher sind diese:

$$x^2(4x + 3) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ oder } x = -\frac{3}{4}$$

Dadurch sind die Kandidaten für das globale Minimum und Maximum (welche in $[-1, 0]$ gemäss Extremwertsatz angenommen werden) genau $-1, -\frac{3}{4}$ und 0. Nun wissen wir aber:

$$f(-1) = 1 - 1 = 0, \quad f(-\tfrac{3}{4}) = \tfrac{81}{256} - \tfrac{27}{64} = -\tfrac{27}{256}, \quad f(0) = 0.$$

(Nur das Vorzeichen von $f(-\frac{3}{4})$ ist hier relevant, so dass man weiss, dass $f(-\frac{3}{4}) < f(-1) = f(0)$.) Dadurch wird das globale Minimum in $x = -\frac{3}{4}$ angenommen. □

13. Die Nullstellen des Polynoms $p(\lambda) = \lambda^4 + 81$ sind:

(a) $-3, 3, -3i, 3i$

(b) $3e^{i\frac{\pi}{4}}, 3e^{i\frac{3\pi}{4}}, 3e^{i\frac{5\pi}{4}}, 3e^{i\frac{7\pi}{4}}$

(c) $-9, 9, -9i, 9i$

(d) $9e^{i\frac{\pi}{4}}, 9e^{i\frac{3\pi}{4}}, 9e^{i\frac{5\pi}{4}}, 9e^{i\frac{7\pi}{4}}$

Lösung. Wir wollen die Gleichung:

$$\lambda^4 = -81 = 3^4 e^{i\pi},$$

für $\lambda = re^{i\varphi}$ lösen. Nun folgt also:

$$\lambda^4 = r^4 e^{i\cdot 4\varphi} = 3^4 e^{i\pi}.$$

Somit $r = 3$ und:

$$4\varphi = \pi, 3\pi, 5\pi, 7\pi, \ldots$$

Das bedeutet:

$$\varphi = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$$

Die Lösungen sind somit:

$$3e^{i\frac{\pi}{4}}, 3e^{i\frac{3\pi}{4}}, 3e^{i\frac{5\pi}{4}}, 3e^{i\frac{7\pi}{4}}$$

□

14. Die Determinante der Matrix $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ist

Lösung. Mit Laplace'schen Entwicklungen zuerst nach der 4. Spalte und danach nach der 3. Spalte, finden wir:

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = 6 - 2 = 4.$$

Alternativ: Da die Determinante alternierend ist, gilt:

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = 4 \cdot 1 = 4.$$

□

(a) $-4.$ (b) $-1.$ (c) $1.$ (d) $4.$

15. Welche Gleichung stellt die Ebene in $\mathbb{R}^3$ durch den Punkt $(1, 0, -1)$ und senkrecht zum Vektor $(6, 5, 4)$ dar?

(a) $x + 2y + 3z = 0$

(b) $x + 2y + 3z = -2$

(c) $6x + 5y + 4z = 0$

(d) $6x + 5y + 4z = 2$

Lösung. Da $(6, 5, 4)^T$ der Normalvektor zur Ebene ist, gilt:

$$6x + 5y + 4z = c.$$

Hierbei ist c ein reeller Parameter, der durch Einsetzen von $(1, 0, -1)$ bestimmt werden kann:

$$c = 6 \cdot 1 + 5 \cdot 0 + 4 \cdot (-1) = 6 - 4 = 2.$$

Daher ist die gesuchte Gleichung $6x + 5y + 4z = 2$. □

16. Für welchen Wert vom Parameter $c \in \mathbb{R}$ hat die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} c & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ \pi & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

mindestens einen Eigenwert, der *nicht reell* ist?

(a) $c = 1$ (b) $c = 2$ (c) $c = 3$ (d) $c = 4$

Lösung. Um die Eigenwerte zu bestimmen, benutzen wir das charakteristische Polynom:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} c-\lambda & 1 & 0 \\ -1 & -\lambda & 0 \\ \pi & 2 & 3-\lambda \end{pmatrix} &= (3-\lambda) \det \begin{pmatrix} c-\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} \\ &= (3-\lambda) \left(\lambda^2 - c\lambda + 1 \right) \end{aligned}$$

Damit ein nicht-reeller Eigenwert existiert, muss also nun gelten, dass $\lambda^2 - c\lambda + 1$ keine reellen Nullstellen hat. Dazu muss gelten:

$$(-c)^2 - 4 < 0 \Rightarrow c^2 < 4 \Rightarrow |c| < 2.$$

Also für $c = 1$. □

17. Wir betrachten das Anfangswertproblem:

$$\dot{\vec{y}}(t) = A\vec{y}(t), \qquad \vec{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

wobei die Koeffizientmatrix A reell ist und $3i - 4$ ein Eigenwert von A ist. Welche der folgenden Aussagen über die Lösung $\vec{y}(t)$ dieses AWPs ist korrekt?

(a) $|\vec{y}(t)|$ bleibt für hinreichend grosse t immer grösser als 10.

(b) $|\vec{y}(t)|$ bleibt für hinreichend grosse t immer kleiner als $\frac{1}{10}$.

(c) $|\vec{y}(t)|$ bleibt stets konstant gleich $\sqrt{2}$.

(d) $|\vec{y}(t)|$ oszilliert zwischen Werten grösser als 10 und kleiner als $\frac{1}{10}$.

Lösung. Man beachte, dass in diesem Fall genau $-4+3i$ und $-4-3i$ die Eigenwerte der Matrix A sind, denn A ist reell. Daraus folgt aber auch, dass:

$$y(t) = k_1 e^{-4t}\left(\cos(3t)\vec{u} - \sin(3t)\vec{s}\right) + k_2 e^{-4t}\left(\sin(3t)\vec{u} + \cos(3t)\vec{s}\right),$$

wobei $\vec{u} + i\vec{s}$ Eigenvektor zum Eigenwert $-4+3i$ ist und $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$. Daraus ist aber sofort ersichtlich, wegen des exponentiellen Zerfalls von e^{-4t}, dass der Wert von $|y(t)|$ für grosse t beliebig klein und somit insbesondere kleiner als $1/10$ wird. □

18. Welchen Wert besitzt die Lösung des folgenden Anfangswertproblems zur Zeit $t = 1$?

$$\dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} -4(e^{-4t}+t) \\ 6t^2 - 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{r}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

(a) $\vec{r}(1) = \begin{pmatrix} -e^4 - 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

(b) $\vec{r}(1) = \begin{pmatrix} -e^4 - 2 \\ 6 \end{pmatrix}$

(c) $\vec{r}(1) = \begin{pmatrix} \frac{1}{e^4} - 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

(d) $\vec{r}(1) = \begin{pmatrix} \frac{1}{e^4} - 2 \\ 6 \end{pmatrix}$

Lösung. Integration zeigt:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 1 + \int_0^t -4(e^{-4s}+s)ds \\ 5 + \int_0^t 6s^2 - 1ds \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-4t} - 2t^2 \\ 2t^3 - t + 5 \end{pmatrix}$$

Daher folgt:

$$\vec{r}(1) = \begin{pmatrix} e^{-4} - 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

□

19. Welches Integral berechnet die Bogenlänge der Spirale mit Polargleichung

$$r = \theta^2\ , \quad 0 \le \theta \le 3\ ?$$

(a) $\displaystyle\int_0^3 \theta\sqrt{\theta^2+4}\, d\theta$

(b) $\displaystyle\int_0^3 \theta^2\sqrt{\theta^2+4}\, d\theta$

(c) $\displaystyle\int_0^9 \theta\sqrt{9-\theta}\, d\theta$

(d) $\displaystyle\int_0^9 \theta^2\sqrt{9-\theta}\, d\theta$

Lösung. Man parametrisiert die Kurve mittels:

$$\gamma(\theta) = (\theta^2\cos(\theta), \theta^2\sin(\theta))$$

Dann gilt für die Bogenlänge:

$$\begin{aligned}\int_0^3 |\dot\gamma(\theta)| d\theta &= \int_0^3 \left| \begin{pmatrix} 2\theta\cos(\theta) - \theta^2\sin(\theta) \\ 2\theta\sin(\theta) + \theta^2\cos(\theta)\end{pmatrix} \right| d\theta \\ &= \int_0^3 \sqrt{4\theta^2+\theta^4} d\theta \\ &= \int_0^3 \theta\sqrt{4+\theta^2} d\theta\end{aligned}$$

Alternativ: Man benutzt direkt die Formel für die Bogenlänge in Polarkoordinaten:

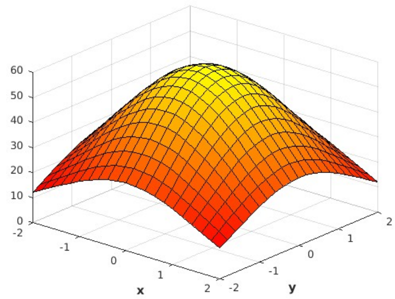
$$\int_0^3 \sqrt{[r(\theta)]^2 + [\dot r(\theta)]^2}\, d\theta = \int_0^3 \sqrt{\theta^4+4\theta^2}\, d\theta.$$

□

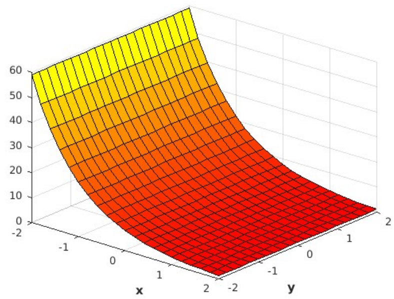
20. Welcher Graph passt zur Funktion

$$f(x, y) = e^{-x-y} \;?$$

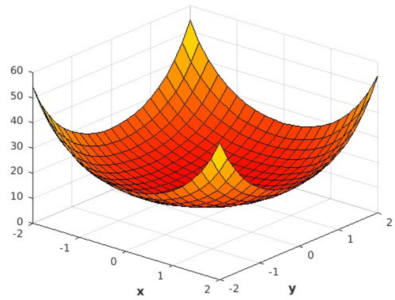
(a)



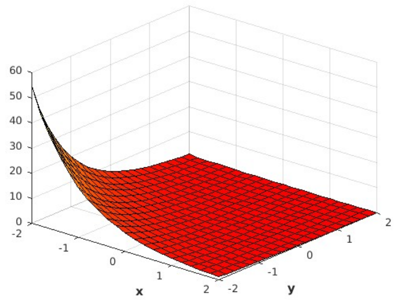
(c)



(b)



(d)



Lösung. Man beachte, dass $f(x, y) = C$ genau dann, wenn:

$$-x - y = \ln(C)$$

Also sind die Niveaulinien Geraden in der Ebene mit Steigung -1 (wenn man diese als Funktion in x betrachtet). Dies schliesst (a) und (b) bereits aus. Zumal die Funktion wächst, wenn entweder x oder y kleiner werden, folgt, dass (d) die korrekte Antwort ist. $\square$

21. Für welchen Wert vom Parameter b stellt die Gleichung

$$2x + by + 3z = 11$$

die Tangentialebene vom Graphen der Funktion

$$f(x, y) = 4 - \sqrt{1 + x^2 + y^2}$$

an der Stelle $(x_0, y_0) = (2, -2)$ dar?

(a) $b = -4$

(b) $b = -2$

(c) $b = 3$

(d) $b = 5$

Lösung. Die Tangentialebene hat die Formel:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(2,-2)(x-2) + \frac{\partial f}{\partial y}(2,-2)(y+2) - z = -f(2,-2)$$

Ausrechnen zeigt:

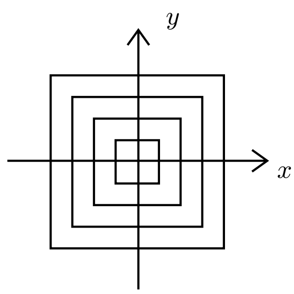
$$\frac{\partial f}{\partial x}(2,-2) = -\frac{2}{\sqrt{1+2^2+(-2)^2}} = -\frac{2}{3}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(2,-2) = \frac{2}{\sqrt{1+2^2+(-2)^2}} = \frac{2}{3}$$

Zudem $f(2,-2) = 4 - 3 = 1$. Also:

$$-\frac{2}{3}(x-2) + \frac{2}{3}(x+2) - z = -1 \Rightarrow 2x - 2y + 3z = 11$$

Also $b = -2$. □

22. Das folgende Bild stellt Niveaulinien einer Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dar.



Welche der folgenden Funktionen hat Niveaulinien wie im Bild?

(a) $f(x,y) = |x| + |y|$

(b) $f(x,y) = |x| - |y|$

(c) $f(x,y) = |x+y| + |x-y|$

(d) $f(x,y) = |x+y| - |x-y|$

Lösung. Bei $|x| - |y|$ wäre $x = y$ und $x = -y$ zwei Niveaulinien. Analog wären bei $|x+y| - |x-y|$ die Geraden $y = 0$ und $x = 0$, also die Koordinatenachsen, Niveaulinien. Bei $|x| + |y|$ würde $(x,y) = (t, 1-t)$ für $t \in [0,1]$ ein Teil einer Niveaulinie sein. Zuletzt kann man sehen, dass wenn $x \geq y \geq 0$, dann:

$$|x+y| + |x-y| = x + y + x - y = 2x.$$

Analog kann man sehen, dass $|x+y| + |x-y| = \max\{2|x|, 2|y|\}$ und die Niveaulinien dieser Funktion sind genau wie in der Skizze. □

23. Die Lemniskate $y^2(1-y^2) = x^2$ lässt sich...

(a) in der Nähe des Punktes $(1,0)$ als Graph einer Funktion von x darstellen.

(b) in der Nähe des Punktes $(1,0)$ als Graph einer Funktion von y darstellen.

(c) in der Nähe des Punktes $(0,1)$ als Graph einer Funktion von x darstellen.

(d) in der Nähe des Punktes $(0,1)$ als Graph einer Funktion von y darstellen.

Lösung. Man beachte, dass $(1,0)$ nicht auf der Lemniskate liegt. Daher bleibt es, den Punkt $(0,1)$ zu betrachten. Wenn $f(x,y) = y^2(1-y^2) - x^2$, dann:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y(1-y^2) - 2y^3$$

Man sieht also, dass:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,1) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,1) = -2$$

Daraus folgt, mit dem Satz über implizite Funktionen, dass (c) korrekt ist. □

24. Was ist der Koeffizient c im quadratischen Taylor Polynom

$$1 + x - y + cxy + \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$$

der Funktion $f(x,y) = e^{x-y}$ um den Entwicklungspunkt $(0,0)$?

(a) $c = -1$ (b) $c = -\frac{1}{2}$ (c) $c = \frac{1}{4}$ (d) $c = 2$

Lösung. Man kann die Taylorentwicklung mithilfe partieller Ableitungen bestimmen und sehen, dass:

$$c = \frac{1}{2!} \cdot 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = -e^{0-0} = -1.$$

Alternativ: Mit der ganzen Taylorreihe der Exponentialfunktion findet man

$$e^{x-y} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-y)^k}{k!} = 1+(x-y)+\frac{1}{2}(x-y)^2+\ldots = 1+x-y+\frac{1}{2}x^2-xy+\frac{1}{2}y^2+\ldots$$

Also ist $c = -1$. □

25. Von welcher Differentialgleichung ist die Funktion

$$f(t,x) = \cos(x-3t) + e^{x+3t}$$

eine Lösung?

(a) $f_{tt} - 3f_x = 0$

(b) $f_{tt} + 3f_x = 0$

(c) $f_{tt} - 9f_{xx} = 0$

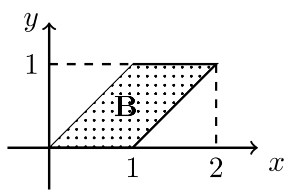
(d) $f_{tt} + 9f_{xx} = 0$

Lösung. Wir berechnen direkt:

$$\begin{aligned} f_t(t,x) &= 3\sin(x-3t) + 3e^{x+3t} \\ f_x(t,x) &= -\sin(x-3t) + e^{x+3t} \\ f_{tt}(t,x) &= -9\cos(x-3t) + 9e^{x+3t} \\ f_{xx}(t,x) &= -\cos(x-3t) + e^{x+3t} \end{aligned}$$

Vergleichen zeigt nun, dass $f_{tt} - 9f_{xx} = 0$. □

26. Welcher Ausdruck berechnet das Integral einer beliebigen integrierbaren Funktion $f(x,y)$ über das dargestellte Gebiet B?



(a) $\int_0^1 \int_{1-x}^2 f(x,y)\,dy\,dx$

(b) $\int_0^1 \int_y^{1+y} f(x,y)\,dx\,dy$

(c) $\int_0^2 \int_x^{2-x} f(x,y)\,dy\,dx$

(d) $\int_0^2 \int_1^{y-1} f(x,y)\,dx\,dy$

Lösung. Das Gebiet ist beschrieben durch die folgenden Ungleichungen:

$$0 \le y \le 1, \quad y \le x \le 1+y$$

Also:

$$\int_0^1 \int_y^{1+y} f(x,y)dxdy$$

□

27. Welches Integral ist im Allgemeinen gleich

$$\int_0^{\sqrt{2}} \int_0^x f(x,y)\,dy\,dx\ ?$$

(a) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{\cos\theta}} rf(r\cos\theta, r\sin\theta)\,dr\,d\theta.$

(b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_{\frac{\sqrt{2}}{\sin\theta}}^{2} r f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, dr\, d\theta.$

(c) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{\sin\theta}} r f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, dr\, d\theta.$

(d) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{\sqrt{2}}{\cos\theta}}^{2} r f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, dr\, d\theta.$

Lösung. In dem Integrationsgebiet gilt:

$$0 \le x \le \sqrt{2}, \quad 0 \le y \le x$$

Übersetzt man dies in Polarkoordinaten $x = r\cos(\theta), y = r\sin(\theta)$, so sieht man:

$$0 \le y = r\sin(\theta) \le r\cos(\theta) \le x \le \sqrt{2} \Rightarrow \tan(\theta) \le 1 \Rightarrow 0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}$$

Für ein gegebenes $\theta \in [0, \frac{\pi}{4}]$ haben wir nun:

$$r\cos(\theta) \le \sqrt{2} \Rightarrow r \le \frac{\sqrt{2}}{\cos(\theta)}$$

Das Integral ist also:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{\cos(\theta)}} r f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) dr d\theta$$

□

28. Welche der folgenden Gleichungen erfüllt die Fläche mit der Parametrisierung

$$\vec{r}(u,t) = \begin{pmatrix} 1 + u\cos t \\ -1 + u\sin t \\ \ln(u^2+1) \end{pmatrix}, \quad \text{für } u \ge 0, 0 \le t \le 2\pi\ ?$$

(a) $(x+1)^2 + (y-1)^2 = e^{z-1}$.

(b) $(x-1)^2 + (y+1)^2 = e^z - 1$.

(c) $\sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2} = e^z - 1$.

(d) $\sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2} = e^{z-1}$.

Lösung. Man sieht direkt:

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 = u^2\cos(t)^2 + u^2\sin(t)^2 = u^2$$

Ebenso:

$$e^z = u^2 + 1 \Rightarrow e^z - 1 = u^2 = (x-1)^2 + (y+1)^2$$

□

29. Das räumliche Gebiet V wird in kartesischen Koordinaten durch die folgenden Ungleichungen beschrieben:

$$2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, \quad z^2 \leq x^2 + y^2.$$

Welche der folgenden Ungleichungen beschreibt V in Kugelkoordinaten?

(a) $2 \leq \rho \leq 4, \quad \frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$

(b) $2 \leq \rho \leq 4, \quad \frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{4}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$

(c) $\sqrt{2} \leq \rho \leq 2, \quad \frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$

(d) $\sqrt{2} \leq \rho \leq 2, \quad \frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{4}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$

Lösung. In Kugelkoordinaten gilt $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$, also:

$$\sqrt{2} \leq \rho \leq 2$$

Ferner:

$$z^2 = \rho^2 \cos(\varphi)^2 \leq \rho^2 \sin(\varphi)^2 = x^2 + y^2$$

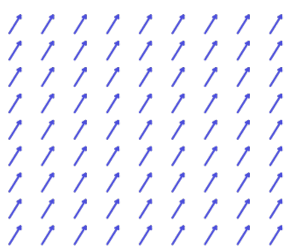
Daraus folgt:

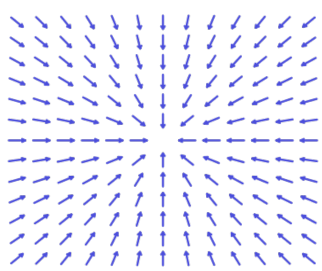
$$1 \leq \frac{\sin(\varphi)^2}{\cos(\varphi)^2} \Rightarrow \tan(\varphi) \geq 1 \text{ oder } \tan(\varphi) \leq -1$$

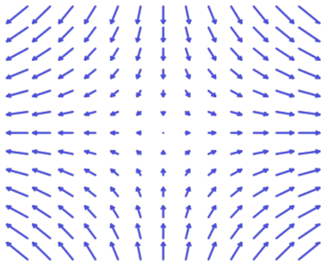
Dies gilt genau, wenn $\varphi \in [\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$. □

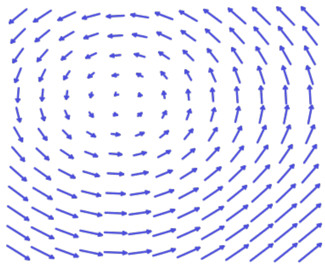
30. Welche Abbildung passt zur Vektorfeld

$$\vec{F}(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} ?$$

(a) 

(b) 

(c) 

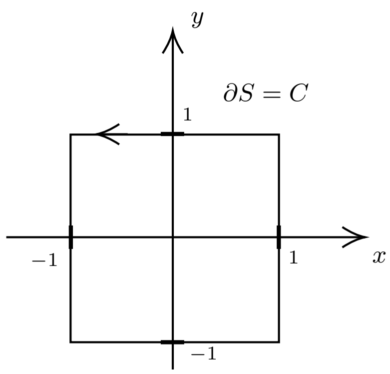
(d) 

Lösung. Man bemerke, dass das Vektorfeld entlang die Koordinatenachsen parallel zu diesen zeigt: Entlang der y-Achse gegen den Ursprung und entlang der x-Achse auswärts. Das entspricht dem Bild (c).

□

---

31. Gegeben seien das Quadrat S mit Randkurve C wie in der folgenden Figur dargestellt,



sowie das vom Parameter $a \in \mathbb{R}$ abhängendes Vektorfeld

$$\vec{F}_a(x,y) = \begin{pmatrix} x - 4xy - 2y \\ 2a(3x - y) \end{pmatrix}.$$

Für welches a ist die Arbeit von $\vec{F}_a$ entlang der Kurve C im Gegenuhrzeigersinn gleich 4? Das heisst, für welche a gilt $\oint_C \vec{F}_a \cdot d\vec{r} = 4$?

(a) $a = -\frac{1}{2}$

(b) $a = -\frac{1}{6}$

(c) $a = \frac{1}{6}$

(d) $a = \frac{1}{2}$

Lösung. Gemäss des Satzes von Green wissen wir:

$$\begin{aligned} \oint_C \vec{F}_a \cdot d\vec{r} &= \iint_S \frac{\partial}{\partial x}(2a(3x-y)) - \frac{\partial}{\partial y}(x - 4xy - 2y)\; dy\, dx \\ &= \iint_S 6a + 4x + 2\, dy\, dx = (6a+2)\cdot 4 = 24a + 8 = 4 \end{aligned}$$

Daher also:

$$24a + 8 = 4 \quad \Rightarrow \quad 24a = -4 \quad \Rightarrow \quad a = -\tfrac{1}{6}.$$

$\square$