Musterlösungen Basisprüfung Winter 2021

1. Wir betrachten die Funktion

$$f(x) = \frac{e^{3x}}{x} \text{ für } x \textbf{ positiv}.$$

   (a) Bestimmen und klassifizieren Sie die lokalen Extremstellen von $f(x)$.

   (b) Was ist der Wertebereich von $f(x)$?

   (c) Sei $F(x),\ x > 0$ eine Funktion mit

$$\begin{cases} F'(x) = f(x) \\ F(1) = 0 \end{cases}$$

   und sei $G(x)$ die Umkehrfunktion von $F(x)$. Dann gilt $G(0) = 1$. Bestimmen Sie $G'(0)$. Sie brauchen **nicht** $F(x)$ zu bestimmen.

Lösung:

(a) Wir haben

$$f'(x) = \frac{e^{3x}(3x-1)}{x^2}.$$

Es gilt $f'(x) = 0$ genau dann wenn $e^{3x}(3x-1) = 0$ ist, also wenn $3x-1 = 0$ ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn $x = \frac{1}{3}$ ist. Das Vorzeichen der ersten Ableitung ist

x	$0 < x < \frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$x > \frac{1}{3}$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

Somit nimmt die Funktion $f(x)$ bei $x = \frac{1}{3}$ ein Minimum an.

(b) Aus Teilaufgabe a) folgt, dass $f(x)$ bei $x = \frac{1}{3}$ ihr *globales* Minimum annimmt, weil sie im Intervall $\left]0, \frac{1}{3}\right[$ abnimmt und im Intervall $\left]\frac{1}{3}, +\infty\right[$ steigt. Daher ist die untere Grenze des Wertebereichs gegeben durch $f\left(\frac{1}{3}\right) = 3e$. Ausserdem erhalten wir mit Bernoulli-de l'Hopital

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{3x}}{x} = \lim_{x \to +\infty} 3e^{3x} = +\infty.$$

Da die Funktion $f(x)$ mit $x > 0$ stetig ist, ist der Wertebereich W gegeben durch

$$W = [3e, +\infty[$$

(c) Mit der Umkehrformel erhalten wir

$$G'(0) = \frac{1}{F'(1)} = \frac{1}{f(1)} = \frac{1}{e^3}.$$

---

2. Bestimmen Sie jeweils die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichungen:

(a) $y'' + 2\sqrt{2}y' + 2 = 0$

(b) $y' - 2xy - x = 0$ für $x > 0$.

Lösung:

(a) Wir lösen zunächst die zugehörige homogene DGL: $y'' + 2\sqrt{2}y' = 0$. Die charakteristische Gleichung ist gegeben durch

$$r^2 + 2\sqrt{2}r = r(r + 2\sqrt{2}) = 0.$$

Die Nullstellen sind $r_1 = 0$ und $r_2 = -2\sqrt{2}$. Somit erhalten wir

$$y_{hom}(x) = C_1 + C_2 e^{-2\sqrt{2}x}.$$

Die spezielle Lösung können wir mit dem Ansatz der Form $y_{spez}(x) = Ax$ finden. Um die Konstante A zu bestimmen, setzen wir diesen Ansatz in die DGL ein und erhalten

$$2\sqrt{2}A + 2 = 0 \Rightarrow 2\sqrt{2}A = -2 \Rightarrow A = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Also ist $y_{spez}(x) = -\frac{x}{\sqrt{2}}$. Die allgemeine Lösung ist also

$$y_{allg}(x) = y_{part}(x) + y_{spez}(x) = C_1 + C_2 e^{-2\sqrt{2}x} - \frac{x}{\sqrt{2}}.$$

(b) *Lösungsweg 1:* Dies ist eine lineare DGL erster Ordnung. Wir lösen sie mit Hilfe der Methode des integrierenden Faktors. Es gilt

$$y(x) = \left[\int q(x) e^{P(x)}\, dx\right] e^{-P(x)},$$

wobei $p(x) = -2x$, $q(x) = x$ und $P(x)$ eine beliebige Stammfunktion von $p(x)$ ist. Wir wählen $P(x) = -x^2$. Es gilt also

$$y(x) = \left[\int x e^{-x^2}\, dx\right] e^{x^2} = \left[-\frac{1}{2} e^{-x^2} + C\right] e^{x^2} = -\frac{1}{2} + C e^{x^2}$$

mit $C \in \mathbb{R}$.

Lösungsweg 2: Dies ist auch eine separierbare DGL. Es gilt für $y \neq -\frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} - 2xy - x = 0 \iff \frac{dy}{dy} = x(2y+1) \iff \frac{dy}{2y+1} = xdx \\
\iff \int \frac{1}{2y+1}\,dy = \int x\,dx \\
\iff \ln|2y+1| = x^2 + k \iff 2y+1 = \pm e^{x^2+k} \\
\iff y = -\frac{1}{2} + Ce^{x^2}
\end{aligned}$$

mit $C = \pm e^k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Da $y = -\frac{1}{2}$ auch eine konstante Lösung der gegebenen DGL ist, erhalten wir die allgemeine Lösung

$$y = -\frac{1}{2} + Ce^{x^2}$$

mit $C \in \mathbb{R}$.

---

3. Wir betrachten die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A.

(b) Ist A diagonalisierbar?

(c) Für welche Vektoren $\vec{x}_0$ ist

$$\vec{x}(t) = e^t \vec{x}_0$$

eine Lösung von

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x} \quad ?$$

Lösung:

(a) Um die Eigenwerte zu bestimmen, müssen wir die Nullstellen des charakteristischen Polynoms bestimmen:

$$\begin{aligned}
\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 4 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^3 - 4(1-\lambda) \\
= (1-\lambda)((1-\lambda)^2 - 4) = (1-\lambda)(1+\lambda)(\lambda - 3).
\end{aligned}$$

Die Eigenwerte sind somit gegeben durch $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1$ und $\lambda_3 = 3$.

(b) Ja, die Matrix ist diagonalisierbar, da die Matrix drei paarweise verschiedene Eigenwerte besitzt.

(c) Wir setzten $\vec{x}(t) = e^t \vec{x}_0$ in das DGLs ein und erhalten

$$e^t \vec{x}_0 = e^t A \vec{x}_0 \iff \vec{x}_0 = A\vec{x}_0.$$

Somit ist $\vec{x}(t)$ genau dann eine Lösung des DGLs, wenn $\vec{x}_0$ ein Eigenvektor zum Eigenwert 1 ist. Es gilt

$$\ker(A - I) = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{span} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Also ist $\vec{x}_0 = k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ mit $k \in \mathbb{R}$.

---

4. Wir betrachten die Funktion

$$f(x, y) = \ln(x - y^2) \text{ für } x > y^2.$$

und seinen Gradienten $\vec{F} = \operatorname{grad}(f)$.

(a) Bestimmen Sie das Vektorfeld $\vec{F}$.

(b) In welche Richtung wächst f am schnellsten im Punkt $(x, y) = (2, 0)$?

(c) Definiert die Gleichung

$$f(x, y) = 0$$

in der Nähe des Punktes $(x, y) = (1, 0)$ eine differenzierbare Funktion von der Form $x = x(y)$ oder von der Form $y = y(x)$?

(d) Bestimmen Sie das Kurvenintegral von $\vec{F}$ längs der Strecke C vom Punkt $(1, 0)$ zum Punkt $(3, 1)$.

Lösung:

(a) Es gilt

$$\operatorname{grad} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{x-y^2} \\ \frac{-2y}{x-y^2} \end{pmatrix}.$$

(b) Am schnellsten wächst die Funktion in Richtung des Gradienten. Der Gradient von f im Punkt $(2,0)$ ist gegeben durch $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$. Also erhalten wir die Richtung $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(c) Offenbar gelten

$$f(1,0) = 0,\ \frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = 1 \neq 0 \text{ und } \frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = 0.$$

Gemäss dem Satz der impliziten Funktion definiert also die Gleichung $f(x,y) = 0$ eine differenzierbare Funktion $x = x(y)$ in der Nähe vom Punkt $(x,y) = (1,0)$. Sie definiert aber keine *differenzierbare* Funktion $y = y(x)$ in der Nähe von $(x,y) = (1,0)$, weil $\frac{\partial f}{\partial y}(1,0)$ verschwindet.

(d) Da $\vec{F}$ ein Gradientenfeld ist, ist $\vec{F}$ konservativ. Das heisst, das Kurvenintegral hängt nur vom Anfangs- und Endpunkt ab. Wir haben also:

$$\int_C \vec{F} \cdot \vec{dr} = f(3,1) - f(1,0) = \ln(2) - 0 = \ln(2).$$

---

5. Wir betrachten das Vektorfeld

$$\vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ z^2 \end{pmatrix}$$

und die Kugeloberfläche

$$A : x^2 + y^2 + z^2 = 5.$$

(a) Bestimmen Sie $\operatorname{div}(\vec{F})$.

(b) Bestimmen Sie den Fluss von $\vec{F}$ durch A nach aussen.

(c) Parametrisieren Sie die Schnittkurve von A mit der Ebene $z = 1$ (in irgendeiner Richtung).

(d) Bestimmen Sie die Zirkulation von $\vec{F}$ längs der Kurve von Teil c) in der positiven Richtung bei Blick von oben.

Lösung:

(a) Es gilt

$$\operatorname{div}(\vec{F}) = \frac{\partial \vec{F}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{F}}{\partial y} + \frac{\partial \vec{F}}{\partial z} = 0 + 0 + 2z.$$

(b) Lösungsweg 1: Mit dem Satz von Gauss.
Mit dem Satz von Gauss erhalten wir

$$\iint_A \vec{F} \cdot \vec{n}\, dA = \iiint_V \operatorname{div}(\vec{F})\, dV = \iiint_V 2z\, dV = 0,$$

da das letzte Integral symmetrisch ist bzgl. z.

Lösungsweg 2: Direkte Rechnung.
Wir benutzen Kugelkoordinaten. Der Fluss von $\vec{F}$ durch A nach aussen ist gegeben durch:

$$\iint_A \vec{F} \cdot \vec{n}\, dA = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -\sqrt{5}\sin(\varphi)\sin(\theta) \\ \sqrt{5}\sin(\varphi)\cos(\theta) \\ 5\cos^2(\varphi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5\sin^2(\varphi)\cos(\theta) \\ 5\sin^2(\varphi)\sin(\theta) \\ 5\cos(\varphi)\sin(\varphi) \end{pmatrix} d\theta\, d\varphi$$

$$= \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} 25\cos^3(\varphi)\sin(\varphi)\, d\theta\, d\varphi = 50\pi \int_0^{\pi} \cos^3(\varphi)\sin(\varphi)\, d\varphi = 0,$$

denn für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $\cos^3(x)\sin(x) = -\sin(\pi - x)\cos^3(\pi - x)$.

(c) Die Schnittkurve erfüllt die Gleichung

$$x^2 + y^2 + 1 = 5 \iff x^2 + y^2 = 4.$$

Wir können sie wie folgt parametrisieren:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 2\cos(t) \\ 2\sin(t) \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

(d) Lösungsweg 1: Direkte Rechnung:
Sei B die Kreisscheibe mit Radius 2 auf der Höhe $z = 1$. Dann gilt

$$\text{Zirk.} = \oint_{\partial B} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -2\sin(t) \\ 2\cos(t) \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2\sin(t) \\ 2\cos(t) \\ 0 \end{pmatrix} dt$$

$$= \int_0^{2\pi} 4\underbrace{(\sin^2(t) + \cos^2(t))}_{=1}\, dt = \int_0^{2\pi} 4\, dt = 8\pi.$$

Lösungsweg 2: Mit dem Satz von Stokes:
Sei B die Kreisscheibe mit Radius 2 auf der Höhe $z = 1$. Dann gilt

$$\text{Zirk.} = \oint_{\partial B} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_B \operatorname{rot}(\vec{F}) \cdot \vec{n}\, dA = \iint_B \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} dA$$

$$= 2\iint_B dA = 2\,\mathrm{Vol}(B) = 8\pi.$$

6. Wir betrachten Probleme der Form

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} \\ u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0 \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$$

für eine unbekannte Funktion $u(x,y)$ und $0 \leq x \leq 1$, $t > 0$.

(a) Bestimmen Sie die Lösung $u(x,y)$ des Problems mit

$$f(x) = 33 - 2\cos(5\pi x).$$

Sie dürfen hier Basislösungen **ohne** erneute Herleitung benutzen.

(b) Mit dem Separationsansatz $u(x,y) = X(x)T(t)$ zerfällt diese PDE ins System von ODEs

$$X'' - kX = 0 \text{ und } T' - kT = 0.$$

Welche Randbedingungen muss die Funktion $X(x)$ erfüllen? Bestimmen Sie alle Funktionen $X(x)$, die die Randbedingungen erfüllen.

Lösung:

(a) Die Basislösungen des Systems sind gegeben durch

$$1, e^{-\lambda_n^2 t}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \text{ mit } L = 1, c = 1, \lambda_n = \frac{n\pi c}{L} = n\pi.$$

Nach dem Superpositionsprinzip ist die Reihe

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-n^2\pi^2 t}\cos(n\pi x)$$

die Lösung des ganzen Problems, wenn die Koeffizienten A_n so gewählt werden, dass

$$u(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(n\pi x) = f(x) = 33 - 2\cos(5\pi x)$$

gilt. Mit einem Koeffizientenvergleich erhalten wir $A_0 = 33$, $A_5 = -2$ und $A_n = 0$ für alle $n \notin \{0,5\}$. Also ist die Lösung

$$u(x,t) = 33 - 2e^{-25\pi^2 t}\cos(5\pi x).$$

(b) Setzen wir den Ansatz $u(x,t) = X(x)T(t)$ in die Randbedingungen ein, erhalten wir

$$\begin{cases} X'' - kX = 0 \\ X'(0) = X'(1) = 0. \end{cases}$$

Dieses Problem hat nur dann nicht konstante Lösungen, wenn $k = -n^2\pi^2$ ist. In diesem Fall sind diese von der Form

$$X(x) = A\cos(n\pi x),\ \ n = 0, 1, 2, \ldots, A \in \mathbb{R}.$$

Bei den MC-Aufgaben gab es in der Prüfung 3 verschiedene Versionen. Die Version finden Sie auf der zweiten Seite Ihrer Prüfung oben rechts. Beispielsweise bedeutet Winter 2020 B, dass Sie die Version B der Prüfung hatten. Die richtigen Lösungen sind:

Aufgabe	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Version A	c	b	b	c	a	d	b	c	b	c
Version B	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
Version C	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x

Aufgabe	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
Version A	d	a	d	d	d	c	c	a	c	b
Version B	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
Version C	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x

7. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Was sind der Rang von A und die Dimension des Nullraums von A?

(a) $\mathrm{Rang}(A) = 2$ und $\dim(\ker(A)) = 0$.

(b) $\mathrm{Rang}(A) = 2$ und $\dim(\ker(A)) = 1$.

√ (c) $\mathrm{Rang}(A) = 3$ und $\dim(\ker(A)) = 0$.

(d) $\mathrm{Rang}(A) = 3$ und $\dim(\ker(A)) = 1$.

Lösung: Bestimmen wir zunächst den Rang von A mit dem Gauss-Algorithmus:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{IV-III}]{\text{II-I}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{III+II}]{\text{-II}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{IV+III}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Wir sehen, dass $\mathrm{Rang}\, A = 3$ ist, denn die Anzahl der führenden Einsen in der Stufenform-Matrix ist 3. Nach dem Rangsatz gilt:

$$\dim(\ker A) = n - \mathrm{Rang}\, A \ ,$$

wobei n die Anzahl von Spalten ist. In unserem Fall also $\dim(\ker A) = 3 - \mathrm{Rang}\, A = 3 - 3 = 0$.

---

8. Es seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ -4 & 5 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} .$$

Welche der folgenden Aussagen ist **falsch**?

(a) $\det(2B^{-1}A^{-1}) = -1$.

√ (b) $\det(-B^{-1}A^2) = 1$.

(c) $\det(2AB^{-1}) = -4$.

(d) $\det(-2A^{-1}) = 4$.

Lösung: Berechnen wir zunächst die Determinanten von A und B. Die Matrix A ist eine Dreiecksmatrix, daher ist ihre Determinante gleich dem Produkt der Hauptdiagonalelemente:

$$\det(A) = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ -4 & 5 & -1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot (-1) = -2.$$

Wir berechnen die Determinante von B mit einer Laplace-Entwicklung nach der ersten Spalte:

$$\det(B) = \det\begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot 2 \det\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot 2 = 4.$$

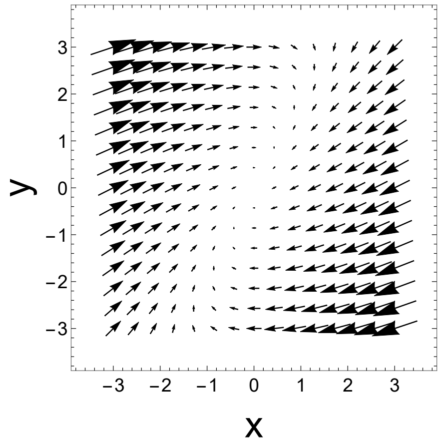
Also erhalten wir

$$\begin{aligned} \det(2B^{-1}A^{-1}) &= 2^3 \cdot \frac{1}{\det(B)} \cdot \frac{1}{\det(A)} = -1; \\ \det(-B^{-1}A^2) &= (-1)^3 \cdot \frac{1}{\det(B)} \cdot (\det(A))^2 = -1; \\ \det(2AB^{-1}) &= 2^3 \det(A) \frac{1}{\det(B)} = -4; \\ \det(-2A^{-1}) &= (-2)^3 \frac{1}{\det(A)} = 4. \end{aligned}$$

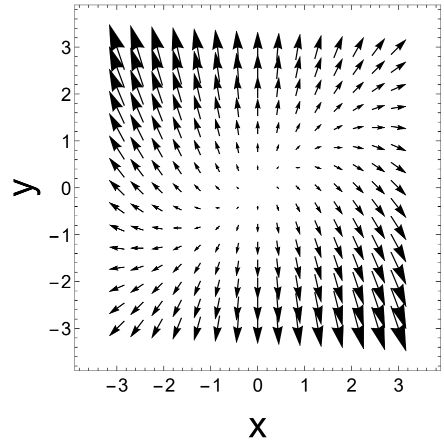
9. Welches ist das Phasenportrait des Systems

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \vec{x} \quad ?$$

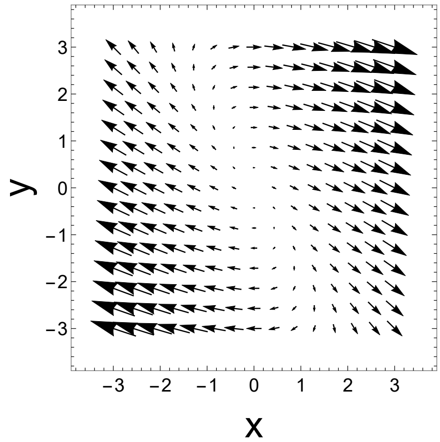
(a)



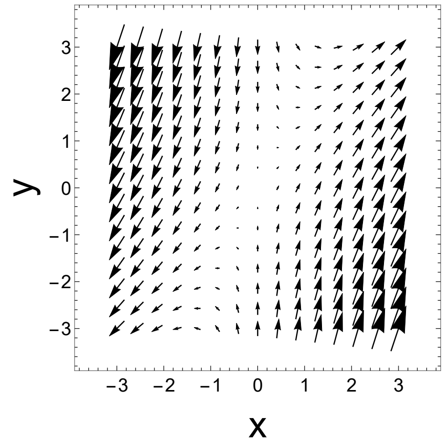
(c)



√ (b)



(d)



Lösung: Wir bestimmen zunächst die Eigenwerte von $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Es gilt

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)(-\lambda) - (-1) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 \\ &= (\lambda - 1)^2. \end{aligned}$$

Die Nullstellen dieses Polynoms sind die Eigenwerte von A. Wir erhalten also den (doppelten) Eigenwert $\lambda = 1$. Bestimmen wir den zugehörigen Eigenvektor:

$$\ker(A - \lambda I) = \ker \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{span} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Das Phasenportrait des Systems kann daher nur b) sein.

---

10. Ein Zusammenhang zwischen zwei Messdaten x und y habe in doppelt logarithmischer Darstellung (d.h. statt x und y sind $a = \log_{10}(x)$ und $b = \log_{10}(y)$ auf den Achsen aufgetragen) die Form der Geraden $b = 3a - 1$. Welche Funktion $y = f(x)$ stellt diesen Zusammenhang dar?

(a) $y = 10^{1-3x}$.

(b) $y = 10^{3x-1}$.

√ (c) $y = \frac{1}{10}x^3$.

(d) $y = 10x^3$.

Lösung: Wir ersetzen a durch $\log_{10}(x)$ und b durch $\log_{10}(y)$ und erhalten:

$$\begin{aligned} b = 3a - 1 &\iff \log_{10}(y) = 3\log_{10}(x) - 1 \\ &\iff \log_{10}(y) = \log_{10}(x^3) - \log_{10}(10) \\ &\iff \log_{10}(y) = \log_{10}\left(\frac{x^3}{10}\right) \iff y = \frac{x^3}{10}. \end{aligned}$$

---

11. Welche der folgenden Grenzwerte existieren?

(I) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-2e^x+1}{x^2}$

(II) $\lim_{x\to +\infty} \frac{\cos(x)}{\ln(x)}$

√ (a) Beide Grenzwerte existieren.

(b) Der Grenzwert bei (I) existiert, aber der bei (II) existiert nicht.

(c) Der Grenzwert bei (I) existiert nicht, aber der bei (II) existiert.

(d) Keiner der Grenzwerte existiert.

Lösung: Um den Grenzwert (I) zu bestimmen, benutzen wir zwei Mal Bernoulli-de l'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x} - 2e^x + 1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2e^{2x} - 2e^x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{4e^{2x} - 2e^x}{2} = \frac{4-2}{2} = 1.$$

Weiter haben wir

$$0 = \lim_{x\to +\infty} \frac{-1}{\ln(x)} \leq \lim_{x\to +\infty} \frac{\cos(x)}{\ln(x)} \leq \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{\ln(x)} = 0.$$

Also ist der zweite Grenzwert gleich 0 und existiert ebenfalls.

---

12. Der Ausdruck $\frac{(2-4i)^2}{i-3}$ lässt sich umformen zu:

(a) $-2-6i$.

(b) $-2+6i$.

(c) $2-6i$.

√ (d) $2+6i$.

Lösung: Wir rechnen:

$$\frac{(2-4i)^2}{i-3} = \frac{(2-4i)^2}{i-3} \cdot \frac{i+3}{i+3} = \frac{(-12-16i)(i+3)}{i^2-9} = \frac{-60i-20}{-10} = 2+6i.$$

---

13. Sei $z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Was ist der Realteil von z^9?

(a) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

√ (b) -1

(c) 0

(d) $\frac{1}{2}$

Lösung: Wir haben $z = re^{i\varphi}$ mit

$$\varphi = \frac{3\pi}{2} + \arctan\left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right) = \frac{3\pi}{2} + \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{3}.$$

und

$$r = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1.$$

Also ist $z = e^{i\frac{5\pi}{3}}$. Damit erhalten wir

$$z^9 = e^{i\frac{45\pi}{3}} = e^{i\pi} = -1.$$

---

14. Was ist die Ableitung der Funktion

$$f(x) = \int_{e^{-x}}^{0} \cos(t^2)\, dt$$

bei $x = 0$?

(a) $-1.$

(b) $-\cos(1).$

$\checkmark$ (c) $\cos(1).$

(d) $1.$

Lösung: Gemäss dem Hauptsatz der Integral- und Differentialrechung gilt

$$f'(x) = e^{-x}\cos(e^{-2x}).$$

Also ist $f'(0) = \cos(1)$.

---

15. Welches ist die Gleichung in Polarkoordinaten des Parabelastes

$$y = x^2, \qquad x > 0 \quad ?$$

(a) $r = \frac{\sin(\theta)}{\cos^2(\theta)},\ \frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{3}.$

$\checkmark$ (b) $r = \frac{\sin(\theta)}{\cos^2(\theta)},\ 0 < \theta < \frac{\pi}{2}.$

(c) $r = \cos^2(\theta) - \sin(\theta),\ \frac{\pi}{4} \leq \theta < \frac{\pi}{2}.$

(d) $r = \cos^2(\theta) - \sin(\theta),\ 0 < \theta \leq \frac{\pi}{3}.$

Lösung: Die Polarkoordinaten sind gegeben durch

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\theta) \\ r\sin(\theta) \end{pmatrix}.$$

Es gilt also

$$y = x^2 \iff r\sin(\theta) = r^2\cos^2(\theta) \iff r = \frac{\sin(\theta)}{\cos^2(\theta)}.$$

Weiter gilt $r = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} > 0 \iff \sin(\theta) > 0$. Das heisst, θ muss in $]0, \pi[$ liegen. Da

$$x > 0 \iff r\cos(\theta) > 0 \iff 0 < \cos(\theta) \iff \theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right[$$

ist also

$$r = \frac{\sin(\theta)}{\cos^2(\theta)} \text{ und } 0 < \theta < \frac{\pi}{2}.$$

---

16. Die Bahn eines bewegten Partikels erfülle das folgende Anfangswertproblem:

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \begin{pmatrix} -2\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \\ \vec{r}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Welcher Punkt liegt **nicht** auf der Bahnkurve von diesem Partikel?

(a) $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

√ (c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Lösung: Wir integrieren die rechte Seite der Gleichung nach t und erhalten

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 2\cos(t) + c_1 \\ \sin(t) + c_2 \end{pmatrix}$$

mit Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Setzen wir die Anfangsbedingung ein, erhalten wir

$$\vec{r}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Also sind $c_1 = 0$ und $c_2 = 1$. Damit ist die Lösung des Anfangswertproblems

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 2\cos(t) \\ \sin(t) + 1 \end{pmatrix}.$$

Diese Bahnkurve bildet die Ellipse mit kartesischer Gleichung

$$x^2 + 4(y-1)^2 = 4.$$

Somit liegt der Punkt $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ nicht auf der Kurve. In der Tat gilt

$$1^2 + 4(0-1)^2 = 5 \neq 4.$$

---

17. Der Definitionsbereich D der Funktion

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 3}$$

ist

(a) offen und beschränkt.

(b) offen und unbeschränkt.

(c) abgeschlossen und beschränkt.

√ (d) abgeschlossen und unbeschränkt.

Lösung: Die Funktion ist genau dann nicht definiert, wenn $x^2 + y^2 - 3 < 0$ ist, also wenn (x, y) im Inneren des Kreises um den Ursprung mit Radius $\sqrt{3}$ liegt. Somit ist der Definitionsbereich gegeben durch

$$D := \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y)^2 \mid x^2 + y^2 < 3\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \geq 3\}.$$

Der Rand von D ist der Kreis $x^2 + y^2 = 3$ und dieser ist vollständig in D enthalten. Diese Menge ist daher abgeschlossen und unbeschränkt.

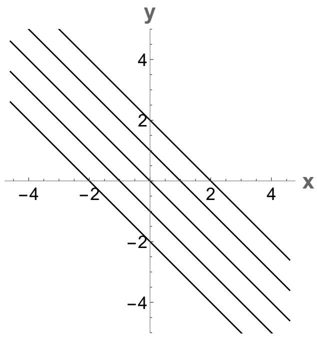
---

18. Welches Bild stellt Niveaulinien der Funktion

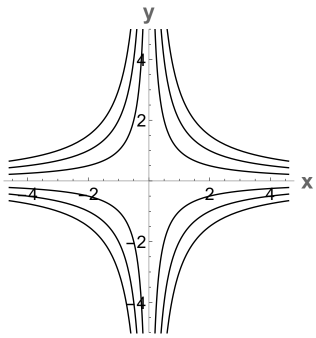
$$f(x, y) = e^{x+y+4}$$

dar?

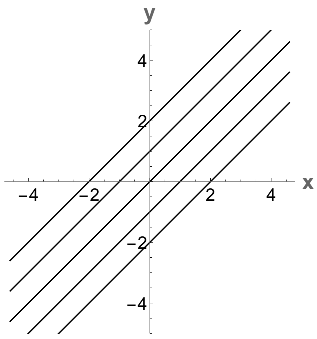
√ (a)



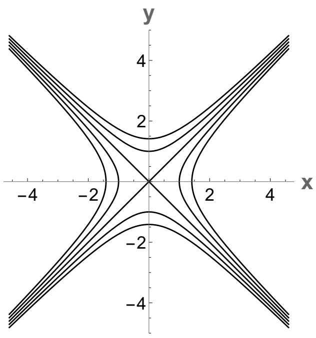
(c)



(b)



(d)



Lösung: Die Funktion $f(x, y) = e^{x+y+4}$ ist konstant genau dann, wenn der Exponent $x + y + 4$ konstant ist. Und $x + y + 4$ ist konstant genau dann, wenn $x + y =$ const. ist. Die Niveaulinien haben also die Form

$$y = -x + \text{const.}$$

Dies ist in Bild a) der Fall.

19. Wir betrachten die Verkettung der Funktion

$$f(x, y) = x^2 y$$

mit differenzierbaren Funktionen $x(u)$ und $y(u)$. Was ist die Ableitung

$$\frac{d}{du} f(x(u), y(u)) \quad ?$$

(a) $2x(u)x'(u)y'(u)$.

(b) $2x(u)x'(u) + y'(u)$.

(c) $2\left(x(u)\right)^2 x'(u)y(u)y'(u)$.

√ (d) $2x(u)x'(u)y(u) + \left(x(u)\right)^2 y'(u)$.

Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned}\frac{d}{du} f(x(u), y(u)) &= \frac{d}{du}\left(x(u)\right)^2 y(u) = \left(x(u)\right)^2 y'(u) + \left(\left(x(u)\right)^2\right)' y(u) \\ &= \left(x(u)\right)^2 y'(u) + 2x(u)x'(u)y(u).\end{aligned}$$

---

20. Welcher Punkt ist ein Sattelpunkt von

$$f(x, y) = 3x^2 - 3y^2 + 2y^3 + 6xy \quad ?$$

(a) $(-2, 2)$.

(b) $(-1, -1)$.

(c) $(0, -1)$.

√ (d) $(0, 0)$.

Lösung: Wir haben

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x + 6y \\ -6y + 6y^2 + 6x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff (x, y) \in \{(0, 0), (-2, 2)\}.$$

also sind die kritischen Punkte von $f(x, y)$ gegeben durch $(0, 0)$ und $(-2, 2)$. Die Hessematrix von f ist gleich

$$\text{Hess} = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 6 & -6 + 12y \end{pmatrix}.$$

Ein kritischer Punkt ist ein Sattelpunkt, wenn die Determinante der Hessematrix kleiner als Null ist. Wir haben

$$\det(\text{Hess}) = 6(-6 + 12y) - 36 = 72(y - 1),$$

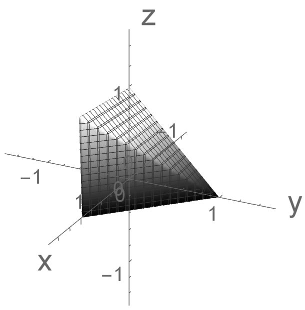
und diese Determinante ist nur im kritischen Punkt $(0, 0)$ kleiner als Null. Also ist $(0, 0)$ ein Sattelpunkt.

21. Wir betrachten ein Integral der Form

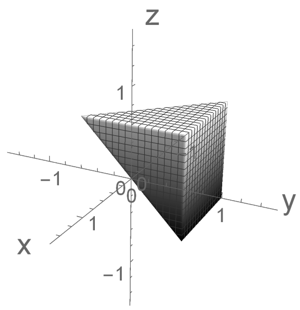
$$\int_0^1 \int_0^{1-z} \int_0^{1-y-z} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz.$$

Welches ist das entsprechende Integrationsgebiet?

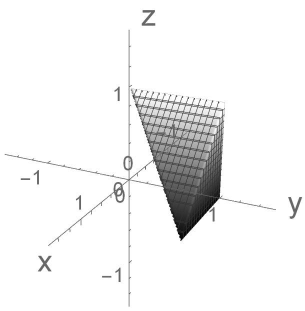
(a)



(c)

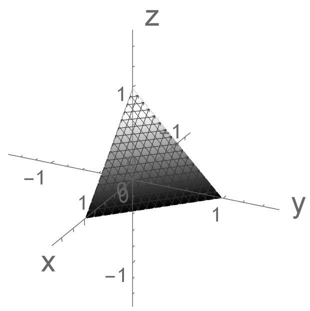


(b)



√

(d)



Lösung: Der Punkt $(1,0,0)$ liegt im Integrationsgebiet aber der Punkt $(1,0,1)$ liegt nicht im Integrationsgebiet. Das einzige Bild, in dem das der Fall ist, ist d).

---

22. Welche der folgenden Ungleichungen stellt das räumliche Gebiet $V \subseteq \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$z \leq \sqrt{3(x^2+y^2)}$$

in Kugelkoordinaten dar?

(a) $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{6}$.

(b) $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}$.

√ (c) $\frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \pi$.

(d) $\frac{\pi}{3} \leq \varphi \leq \pi$.

Lösung: Die Kugelkoordinaten sind gegeben durch

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \sin(\varphi)\cos(\theta) \\ \rho \sin(\varphi)\sin(\theta) \\ \rho\cos(\varphi) \end{pmatrix}.$$

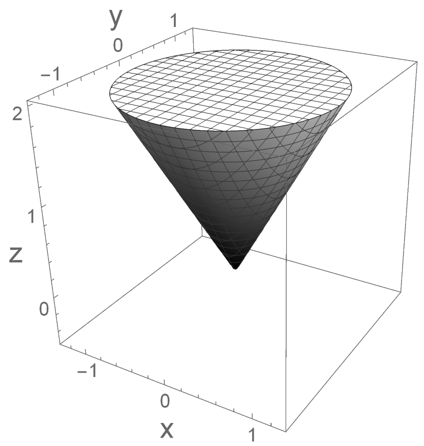
Wir haben also

$$\begin{aligned} z \leq \sqrt{3(x^2+y^2)} &\iff \rho\cos(\varphi) \leq \sqrt{3\rho^2 \sin^2(\varphi)(\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta))} = \sqrt{3}\rho\sin(\varphi) \\ &\iff \cos(\varphi) \leq \sqrt{3}\sin(\varphi) \\ &\iff \frac{1}{\sqrt{3}} \leq \frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)} = \tan(\varphi) \Rightarrow \frac{\pi}{6} \leq \varphi. \end{aligned}$$

Also erhalten wir

$$\frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \pi.$$

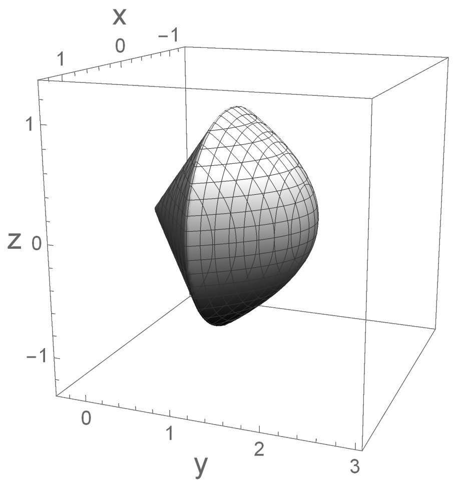
Das Gebiet in der Aufgabe ist das Komplement des folgenden Gebiets:



23. Das Volumen des beschänkten Körpers definiert durch

$$\sqrt{x^2+z^2} \leq y \leq 2-x^2-z^2$$

ist



(a) $\frac{5}{12}\pi$. (b) $\frac{7}{12}\pi$. √ (c) $\frac{5}{6}\pi$. (d) $\frac{7}{6}\pi$.

Lösung: Wir benutzen folgende Zylinderkoordinaten:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\theta) \\ y \\ r\sin(\theta) \end{pmatrix}.$$

Damit erhalten wir

$$\sqrt{x^2+z^2} \leq y \leq 2-x^2-z^2 \iff r \leq y \leq 2-r^2.$$

Also insbesondere auch

$$r \leq 2-r^2 \Rightarrow 0 \leq r \leq 1.$$

Das Volumen des gegebenen Körpers ist somit

$$\begin{aligned} \text{Vol} &= \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_r^{2-r^2} r\,dy\,dr\,d\theta = 2\pi\int_0^1 ry\Big|_{y=r}^{y=2-r^2} dr \\ &= 2\pi\int_0^1 2r-r^3-r^2\,dr = 2\pi\left(r^2-\frac{1}{4}r^4-\frac{1}{3}r^3\Big|_{r=0}^{r=1}\right) = \frac{5\pi}{6}. \end{aligned}$$

24. Was ist der Fluss des Vektorfeldes

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} x - x^2 + 3xy^2 \\ 2x - y^3 - y \end{pmatrix}$$

durch die Randkurve des Rechtecks

$$0 \leq x \leq 1, \qquad -1 \leq y \leq 1$$

nach aussen?

√ (a) $-2.$ (b) $-1.$ (c) $1.$ (d) $2.$

Lösung: Sei A das gegebene Rechteck. Mit dem Satz von Green erhalten wir

$$\oint_{\partial A} \vec{F} \cdot \vec{n}\, ds = \iint_A \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} \right) dx\, dy = \int_{-1}^{1} \int_0^1 1 - 2x + 3y^2 - 3y^2 - 1\, dx\, dy$$
$$= \int_{-1}^{1} \int_0^1 -2x\, dx\, dy = \int_{-1}^{1} -x^2 \Big|_{x=0}^{x=1} dy = \int_{-1}^{1} -1\, dy = -y \Big|_{y=-1}^{y=1} = -2.$$

---

25. Sei C eine geschlossene Kurve im Raum und sei $\vec{F}(x, y, z)$ ein Vektorfeld, dessen Arbeit entlang C sei 2π. Welche der Eigenschaften kann $\vec{F}$ **nicht** besitzen?

(a) $\vec{F}$ ist quellenfrei.

(b) $\vec{F}$ ist wirbelfrei.

$\surd$ (c) $\vec{F}$ ist ein Gradientenfeld.

(d) $\vec{F}$ ist ein Wirbelfeld.

Lösung: Ein Vektorfeld ist ein Gradientenfeld genau dann wenn die Zirkulation von $\vec{F}$ immer gleich Null ist. Das heisst, die richtige Antwort ist c). Als Gegenbeispiel für die anderen Aussagen betrachten wir

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{-y}{x^2+y^2} \\ \frac{x}{x^2+y^2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Sei C der Einheitskreis in der xy-Ebene. Als Parametrisierung wählen wir

$$\vec{r}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

und erhalten damit

$$\begin{aligned} \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} d\varphi = \int_0^{2\pi} \sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi)\, d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi. \end{aligned}$$

Das Vektorfeld $\vec{F}$ ist quellenfrei, denn

$$\operatorname{div}(\vec{F}) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} + \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} + 0 = 0.$$

Das Vektorfeld ist auch wirbelfrei, denn

$$\operatorname{rot}(\vec{F}) = \begin{pmatrix} (F_3)_y - (F_2)_z \\ (F_1)_z - (F_3)_x \\ (F_2)_x - (F_1)_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - 0 \\ 0 - 0 \\ \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} - \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ausserdem ist $\vec{F}$ auch ein Wirbelfeld, denn

$$\vec{F} = \operatorname{rot} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) \end{pmatrix}.$$

26. Welche der folgenden Flächen im $\mathbb{R}^3$ ist **nicht** einfach zusammenhängend?

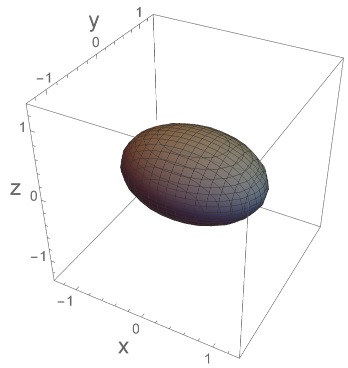
(a) Das Ellipsoid $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$.

√ (b) Der Zylinderteil $x^2 + y^2 = 1, \ -1 \leq z \leq 1$.

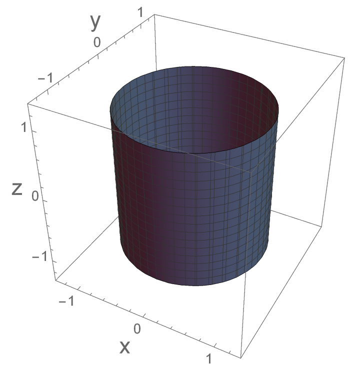
(c) Die Halbsphäre $x^2 + y^2 + z^2 = 1, \ z \leq 0$.

(d) Der Kegelteil $z^2 = x^2 + y^2, \ -1 \leq z \leq 1$.

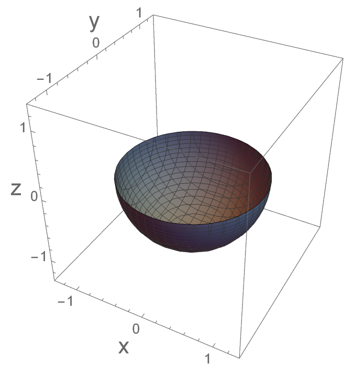
Lösung: Nicht einfach zusammenhängend ist der Zylinderteil, da sich nicht jeder geschlossene Weg auf einen Punkt zusammenziehen lässt. Auf den anderen Flächen lässt sich jeder geschlossene Weg auf einen Punkt zusammenziehen.



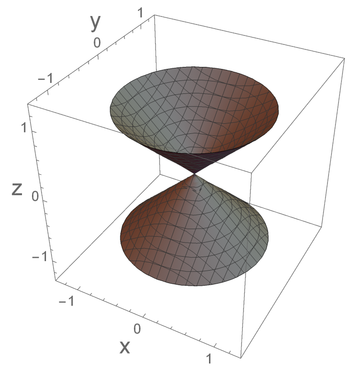
(a) Ellipsoid



(b) Zylinderteil



(c) Halbsphäre



(d) Kegelteil

Musterlösungen zu den MC-Aufgaben der Prüfung Mathematik I

11. Welches ist die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$2y'' + 2y = 2x + 1\ ?$$

(a) $k_1 \cos(x) + k_2 \sin(x) + 2x + 1$

√ (b) $k_1 \cos(x) + k_2 \sin(x) + x + \frac{1}{2}$

(c) $k_1 \cos(2x) + k_2 \sin(2x) + x + \frac{1}{2}$

(d) $k_1 \cos(2x) + k_2 \sin(2x) + 2x + 1$

Lösung: Wir betrachten zuerst die dazugehörige homogene DGL

$$2y'' + 2y = 0.$$

Die charakteristische Gleichung davon ist

$$2r^2 + 2 = 2(r^2 + 1) = 0.$$

Die Nullstellen sind $r_1 = i$ und $r_2 = -i$. Also erhalten wir folgende Lösung des homogenen Problems:

$$y_{hom}(x) = k_1 \cos(x) + k_2 \sin(x)$$

mit Konstanten $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$. Eine partikuläre Lösung ist gegeben durch

$$y_{part}(x) = k_3 + k_4 x$$

mit reellen Konstanten k_3 und k_4. Wir erhalten als allgemeine Lösung

$$y_{allg}(x) = y_{hom}(x) + y_{part}(x) = k_1 \cos(x) + k_2 \sin(x) + k_3 + k_4 x.$$

Nun können wir die Konstanten k_3 und k_4 bestimmen, indem wir $y_{allg}(x)$ in die DGL einsetzen. Wir haben

$$\begin{aligned} y'_{allg}(x) &= -k_1 \sin(x) + k_2 \cos(x) + k_4 \\ y''_{allg}(x) &= -k_1 \cos(x) - k_2 \sin(x). \end{aligned}$$

Also erhalten wir

$$\begin{aligned} &2y''_{allg}(x) + 2y_{allg}(x) = 2x + 1 \\ &\iff -2k_1 \cos(x) - 2k_2 \sin(x) + 2k_1 \cos(x) + 2k_2 \sin(x) + 2k_3 + 2k_4 x = 2x + 1 \\ &\iff 2k_3 + 2k_4 x = 2x + 1 \iff k_3 = \frac{1}{2} \text{ and } k_4 = 1. \end{aligned}$$

Also

$$y_{allg}(x) = k_1 \cos(x) + k_2 \sin(x) + \frac{1}{2} + x.$$

12. Welcher der folgenden Werte ist

$$\int_{-\pi}^{\pi} x \cdot \cos^2(x)\, dx \;?$$

√ (a) 0

(b) 2π

(c) π

(d) 1

Lösungsweg 1: Sei $f(x) := x\cos^2(x)$. Die Funktion f ist ungerade, denn es gilt

$$f(x) = x\cos^2(x) = -x\cos^2(-x) = -f(-x).$$

Also erhalten wir:

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx &= \int_{-\pi}^{0} f(x)\, dx + \int_{0}^{\pi} f(x)\, dx = -\int_{-\pi}^{0} f(-x)\, dx + \int_{0}^{\pi} f(x)\, dx \\ &= -\int_{0}^{\pi} f(y)\, dy + \int_{0}^{\pi} f(x)\, dx = 0,\end{aligned}$$

wobei wir die Substitution $y = -x$ verwendet haben.

Lösungsweg 2: Mit partieller Integration erhalten wir:

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos^2(x)\, dx &= x\frac{1}{2}(x + \sin(x)\cos(x))\Big|_{x=-\pi}^{x=\pi} - \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} x + \sin(x)\cos(x)\, dx \\ &= 0 - \frac{1}{4}x^2\Big|_{x=-\pi}^{x=\pi} - \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(x)\cos(x)\, dx \\ &= -\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\sin(x)\cos(x)}_{=\frac{1}{2}\sin(2x)}\, dx = -\frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(2x)\, dx \\ &= \frac{1}{8}\cos(2x)\Big|_{x=-\pi}^{x=\pi} = 0.\end{aligned}$$

---

13. Welchen Wert muss k annehmen, damit die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} e^{k^3 x} & \text{für } x \geq 0, \\ \sin(8x) + 1 & \text{für } x < 0, \end{cases}$$

auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar ist?

(a) -2

(b) beliebig

(c) Es gibt keinen solchen Wert für k.

$\surd$ (d) 2

Lösung: Wir haben

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} e^{k^3x} = 1 \text{ and } \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = 1.$$

Die Funktion ist somit für alle $x \in \mathbb{R}$ stetig. Es gilt

$$f'(x) = \begin{cases} k^3 e^{k^3x} & \text{für } x > 0 \\ 8\cos(8x) & \text{für } x < 0. \end{cases}$$

Für $x \neq 0$ ist f immer differenzierbar. Damit f an der Stelle 0 differenzierbar ist, müssen die beiden Grenzwerte

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} k^3 e^{k^3x} = k^3$$

und

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} 8\cos(8x) = 8$$

übereinstimmen. Das heisst, f ist genau dann überall differenzierbar wenn $k = 2$ ist.
