D-ITET, D-MATL

Prüfung Numerische Methoden, Winter 2011

Prof. R. Jeltsch

Wichtige Hinweise

- Prüfungsdauer: 90 Minuten.
- Nur begründete Resultate werden bewertet.
- Zugelassene Hilfsmittel : 20 A4-Seiten selbsterzeugte Notizen. Nichtvernetzter Taschenrechner, keine Kopien, keine Bücher.
- Maximale Punktzahl: $30 = 6 + 8 + 8 + 8$ Punkte.

Viel Erfolg!

---

1. (6 Punkte)

a) Berechnen Sie von Hand (mit Angabe von Zwischenschritten) die LR-Zerlegung für die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -2 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

b) Geben Sie den Rang von $\mathbf{A}$ an.

c) Sie haben eine Matrix `B` in MATLAB eingegeben. Geben Sie nun eine MATLAB-Befehlsfolge an, um die pivotisierte LR Zerlegung $\mathbf{PB} = \mathbf{LR}$ von $\mathbf{B}$ zu berechnen und den Rechenfehler $e = \|\mathbf{PB} - \mathbf{LR}\|_2$ von MATLAB zu bestimmen.

2. (8 Punkte)

Gegeben sind folgende Messdaten f_i eines Experiments zu den Zeiten t_i:

t_i	0.0	0.2	0.5	0.8
f_i	3.7	2.1	3.7	8.2

Man vermutet, dass die Messdaten einem Gesetz

$$f(t) = c_1 2^t + c_2 2^{-t} + c_3 t^2,$$

mit noch unbekannten Parametern c_1, c_2, c_3 folgt.

a) Formulieren Sie das zugehörige Ausgleichsproblem $\|\mathbf{Ac} - \mathbf{f}\|_2 \to \min$ für $\mathbf{c} = \big(c_1, c_2, c_3\big)^\top$. Es genügt dazu $\mathbf{A}$ und $\mathbf{f}$ explizit anzugeben.

b) Sie haben $\mathbf{A}$ und $\mathbf{f}$ in den MATLAB Variablen `A` und `f` gespeichert, geben Sie eine MATLAB Befehlsfolge an, die zuerst die QR-Zerlegung von $\mathbf{A}$ berechnet und mit dieser Zerlegung dann das Ausgleichsproblem löst.

c) Gegeben ist die QR-Zerlegung $\mathbf{QR} = \mathbf{B}$ einer Matrix $\mathbf{B}$, bestimmen Sie von Hand (mit Angabe von Zwischenschritten) die Lösung $\mathbf{d} = \big(d_1, d_2\big)^\top$ des Ausgleichsproblems $\|\mathbf{Bd} - \mathbf{g}\|_2 \to \min$, wobei

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{g} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 3 \\ -\frac{3}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

3. (8 Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = x^4 - 6x^2 + 9.$$

a) Welche Nullstellen hat f?
Hinweis: Eventuell ist eine Substitution $z = x^2$ hilfreich.

b) Geben Sie das Newton-Verfahren zur Bestimmung dieser Nullstellen an und führen Sie ausgehend von $x_0 = 2$ einen Schritt des Newton-Verfahrens durch.

c) Geben Sie einen Anfangswert an, für den das Newtonverfahren nicht anwendbar ist.

d) Was ist die (asymptotische) Konvergenzordnung des Verfahrens (angewendet auf $f(x)$ und für einen Fixpunkt Ihrer Wahl)?

4. (8 Punkte)

a) Gegeben ist folgende Iterationsvorschrift des Gauss-Seidel Verfahrens für eine $n \times n$ Matrix $\mathbf{A}$ zum iterativen Lösen eines Gleichungssystems $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ im Schritt k:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{i,i}} \left(b_i - \sum_{j<i} a_{i,j} x_j^{(k+1)} - \sum_{j>i} a_{i,j} x_j^{(k)} \right), \qquad i = 1...n\,.$$

Alternativ kann man das Gauss-Seidel Verfahren auch schreiben als

$$(\mathbf{L} + \mathbf{D})\mathbf{x}_{k+1} = -\mathbf{U}\mathbf{x}_k + \mathbf{b}, \qquad \mathbf{A} = \mathbf{L} + \mathbf{D} + \mathbf{U},$$

wobei $\mathbf{A}$ in eine untere Dreiecksmatrix $\mathbf{L}$, eine Diagonalmatrix $\mathbf{D}$ und eine obere Dreiecksmatrix $\mathbf{U}$ zerlegt ist.

Implementieren Sie das Gauss-Seidel Verfahren in MATLAB. Brechen Sie die Iteration dabei erfolgreich ab, falls die Abbruchbedingung $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|_2 < tol$ erfüllt ist und brechen Sie die Iteration mit Ausgabe einer Fehlermeldung ab, falls mehr als 1000 Iterationen notwendig sind.

Vervollständigen Sie dazu den folgenden Funktionsrumpf:

```
function [x,k] = gaussSeidel(A,b,x0,tol)
% Loesen eines Gleichungssystem Ax=b mittels Gauss-Seidel
%
% INPUT
%   A   - Systemmatrix
%   b   - rechte Seite
%   x0  - Startvektor fuer iteration
%   tol - Abbruchstoleranz fuer Iteration
%
% OUTPUT
%   x   - approximierte Loesung
%   k   - Anzahl durchgefuehrter Iterationsschritte

[m,n] = size(A);
if m~=n || min(abs(diag(A))) < eps
  x=[]; k=inf; display('Iteration nicht moeglich');
  return
end
```

Hinweis: Diesen Funktionsrumpf brauchen Sie nicht abzuschreiben.

b) Nennen Sie zwei weitere iterative Verfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ und deren Bedingung an $\mathbf{A}$ zur Anwendung des Verfahrens.