

Name		Note
Vorname		
Studiengang		
Leginummer		
Datum		

1	2	3	4		Punkte

- Bitte füllen Sie zuerst das Deckblatt aus.
- Legen Sie Ihre Legi auf den Tisch.
- Beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite und schreiben Sie den Namen auf alle Blätter.
- Bitte nicht mit Bleistift, Rot- oder Grünstift schreiben.
- Versuchen Sie, die Lösungsweg möglichst klar darzustellen, und arbeiten Sie sorgfältig!
- Prüfungsdauer: 90 Minuten
- Zugelassene Hilfsmittel: 20 A4-Seiten selbsterzeugte Notizen; nicht vernetzter Taschenrechner

Viel Erfolg!



D-ITET, D-MATL  
**Prüfung Numerische Methoden**  
**Winter 2010**  
Prof. R. Jeltsch

---

1. (7 Punkte) Gegeben seien Funktionen  $f_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f_a(x) = 2^x - a, \quad a > 0.$$

- a) Beschreiben Sie, wie für ein  $a > 0$  das Newton-Verfahren und  $f_a$  genutzt werden können, um den Wert  $\log_2(a)$  zu approximieren. Geben Sie die entsprechende Iterationsvorschrift explizit an.
- b) Man kann zeigen, dass die Newton-Iteration für alle Startwerte  $x_0 \in \mathbb{R}$  und für alle  $a > 0$  konvergiert. Mit welcher theoretischen Konvergenzordnung erfolgt die Konvergenz? Begründen Sie Ihre Aussage, indem Sie die nötigen Bedingungen an  $f_a$  überprüfen.
- c) Wählen Sie nun  $a = 2$  und bestimmen Sie ausgehend vom Startwert  $x_0 = 0$  die Näherungen  $x_1, x_2, x_3$  und  $x_4$ . Berechnen Sie daraus die entsprechende empirische Konvergenzordnung. Verwenden Sie als Referenzwert die exakte Lösung.

2. (7 Punkte) Gegeben sei die Singulärwertzerlegung  $A = USV^T$  einer Matrix  $A \in \mathbb{R}^{5 \times 4}$  mit

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$V = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

- a) Geben Sie den Rang von  $A$  sowie die Dimensionen des Bildes und des Kerns von  $A$  an.
- b) Es sei  $f = (1, 2, 1, -1, 0)^T$ . Erläutern Sie, wie die Singulärwertzerlegung von  $A$  benutzt werden kann, um den Ausdruck  $\|Ac - f\|_2$  über alle  $c \in \mathbb{R}^4$  zu minimieren. Bestimmen Sie zuerst von Hand alle minimierenden Lösungen. Bestimmen Sie dann aus diesen die Lösung  $\tilde{c}$  mit *kleinster* Norm  $\|\tilde{c}\|_2$ . Geben Sie den Wert von  $\|A\tilde{c} - f\|_2$  an.

3. (7 Punkte) Gegeben seien Tridiagonalmatrizen  $A_N \in \mathbb{R}^{N \times N}$  und Vektoren  $b_N \in \mathbb{R}^N$  der Form

$$A_N = \begin{pmatrix} 4 & 1 & & & \\ 1 & 4 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 4 & 1 \\ & & & & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad b_N = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- a) Bestimmen Sie von Hand  $\text{cond}_2(A_3)$ .
- b) Eine Problemstellung erfordert die Lösung des Gleichungssystems  $A_3x = b_3$ . Durch ungenaue Datenerhebung erhält man statt  $b_3$  eine fehlerbehaftete rechte Seite  $\tilde{b}_3 = (1.1, 1, 1)^T$  und berechnet so statt der exakten Lösung  $x$  eine fehlerbehaftete Lösung  $\tilde{x}$ . Schätzen Sie den entstehenden relativen Fehler in der Lösung bezüglich der 2-Norm ab, ohne eines der Gleichungssysteme zu lösen.
- c) Das Gleichungssystem  $A_Nx = b_N$  soll durch Jacobi-Iteration mit Startvektor  $x_0 = (0, 0, \dots, 0)^T \in \mathbb{R}^N$  approximativ gelöst werden. Begründen Sie, warum das Verfahren in diesem Beispiel konvergiert. Führen Sie einen Iterationsschritt durch und geben Sie  $x_1 \in \mathbb{R}^N$  an.
- d) Betrachten Sie nun allgemein lineare Gleichungssysteme  $Ax = b$  mit quadratischer Systemmatrix  $A$  und eindeutiger Lösung  $x$ . Nennen Sie ein weiteres Iterationsverfahren zum Lösen linearer Gleichungssysteme und Voraussetzungen an das System, unter denen das Verfahren konvergiert.
- e) Geben Sie einen Grund an, warum man in der Praxis ein approximatives Verfahren einem theoretisch exakten Verfahren vorziehen könnte.

4. (10 Punkte) Betrachten Sie ein Runge-Kutta-Verfahren mit Butcher-Tableau

$$\begin{array}{c|ccc}
 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 1 & 0 & 0 \\
 \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\
 \hline
 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3}
 \end{array}$$

- a) Wieviele Stufen besitzt dieses Runge-Kutta-Verfahren? Ist es ein explizites, semi-implizites oder implizites Verfahren?
- b) Ergänzen Sie die folgende Matlab-Funktion, die für Anfangswertprobleme  $y' = f(t, y)$ ,  $y(t_0) = y_0$  eine Näherungslösung gemäss des oben definierten Runge-Kutta-Schemas berechnet.

(Hinweis: Vervollständigen Sie lediglich die unvollständigen Zeilen auf einem separaten Blatt. Der restliche Code ist nicht abzuschreiben. Behalten Sie aber die Reihenfolge bei und trennen Sie unterschiedliche Zeilen deutlich voneinander.)

```

function [t,y] = rkSolver(f,y0,t0,h,N)

% Approximiert die Loesung eines Anfangswertproblems
% y'=f(t,y), f(t0)=y0 .
% System erster Ordnung der Dimension d.
%
% INPUT
% f - function handle
% y0 - dx1-Matrix der Anfangswerte
% t0 - Skalar, Anfangszeitpunkt
% h - Skalar, Schrittweite
% N - Skalar, Anzahl Iterationen
%
% OUTPUT
% t - 1x(N+1)-Matrix, Diskretisierung des Zeitintervalls [t0, t0+N*h]
% y - dx(N+1)-Matrix, Approximationen der Funktionswerte

d = length(y0); % Dimension des Systems
t = ... % Diskretisierung des Zeitintervalls
y = zeros(d,N+1); % Initialisierung der Funktionswertematrix
y(:,1) = y0;

% iterative Berechnung der Funktionswerte
for j=1:N
    y(:,j+1) = rkStep(...)
end

function yi1 = rkStep(f,yi,ti,h)

```

```
% Berechnet einen einzelnen Iterationsschritt y_i -> y_{i+1}

k1 = ...
k2 = ...
k3 = ...
yi1 = yi + ...
```

- c) Betrachten Sie nun konkret das Anfangswertproblem

$$y'' + y = t^2, \quad y(0) = -2, \quad y'(0) = 0.$$

Überführen Sie dieses Anfangswertproblem in ein System erster Ordnung.

- d) Geben Sie alle notwendigen Matlab-Eingaben an, um das Anfangswertproblem aus c) durch Aufruf der Funktion aus b) im Intervall  $[0, 1]$  approximativ zur Schrittweite  $h = 0.1$  zu lösen.