

D-ITET, D-MATL  
**Prüfung Numerische Methoden,  
Sommer 2010**  
Prof. R. Jeltsch

**Wichtige Hinweise**

- Prüfungsdauer: 90 Minuten.
- Nur begründete Resultate werden bewertet.
- Zugelassene Hilfsmittel : 20 A4-Seiten selbsterzeugte Notizen. Nichtverbundener Taschenrechner, keine Kopien, keine Bücher.
- Maximale Punktzahl:  $30 = 8 + 6 + 8 + 8$  Punkte.

**Viel Erfolg!**

---

**1. (8 Punkte)**

a) Gegeben ist die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 3/2 & -3/2 \\ -\sqrt{2} & 3/2 & -3/2 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie von Hand (mit Angabe von Zwischenschritten) folgende Elemente der Singulärwertzerlegung  $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T$  von  $\mathbf{A}$

- i) die Matrix  $\mathbf{\Sigma}$
  - ii) eine Spalte (Ihrer Wahl) der Matrix  $\mathbf{V}$ .
- b) Sie haben eine Matrix  $\mathbf{C}$  in MATLAB eingegeben. Geben Sie nun eine MATLAB-Befehlsfolge an, um die Singulärwertzerlegung  $\mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V} = \mathbf{C}$  von  $\mathbf{C}$  zu berechnen und den Rechenfehler  $e = \|\mathbf{C} - \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}\|_2$  von MATLAB zu bestimmen.

c) Gegeben sind die Matrizen

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}, \mathbf{V} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/2 & 1/2 & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

der Singulärwertzerlegung  $\mathbf{B} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T$  einer Matrix  $\mathbf{B}$ . Bestimmen Sie

- i)  $\|\mathbf{\Sigma}\|_2, \|\mathbf{V}\|_2,$
- ii)  $\text{cond}_2(\mathbf{U}), \text{cond}_2(\mathbf{B}),$

**Hinweis:** all diese Werte folgen ohne lange Rechnungen.

**Bitte wenden!**

## 2. (6 Punkte)

Gegeben ist die Fixpunktiteration

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad \text{mit } x_0 = 2. \quad (1)$$

Der Graph von  $f$  ist in Abb. 1 dargestellt (siehe Extrablatt).

- a) Führen Sie (in Abb. 1) graphisch 3 Schritte der Fixpunktiteration (1) durch.
- b) Markieren Sie die Lage aller Fixpunkte von (1) und klassifizieren Sie diese als attraktive oder repulsive Fixpunkte (mit Begründung).
- c) Zeichnen Sie in den Graphen für einen der attraktiven Fixpunkte ein maximales Konvergenzintervall ein, für das der Fixpunktsatz von Banach Konvergenz vorhersagt.

## 3. (8 Punkte)

- a) Gegeben ist die Differenzialgleichung (DGL)

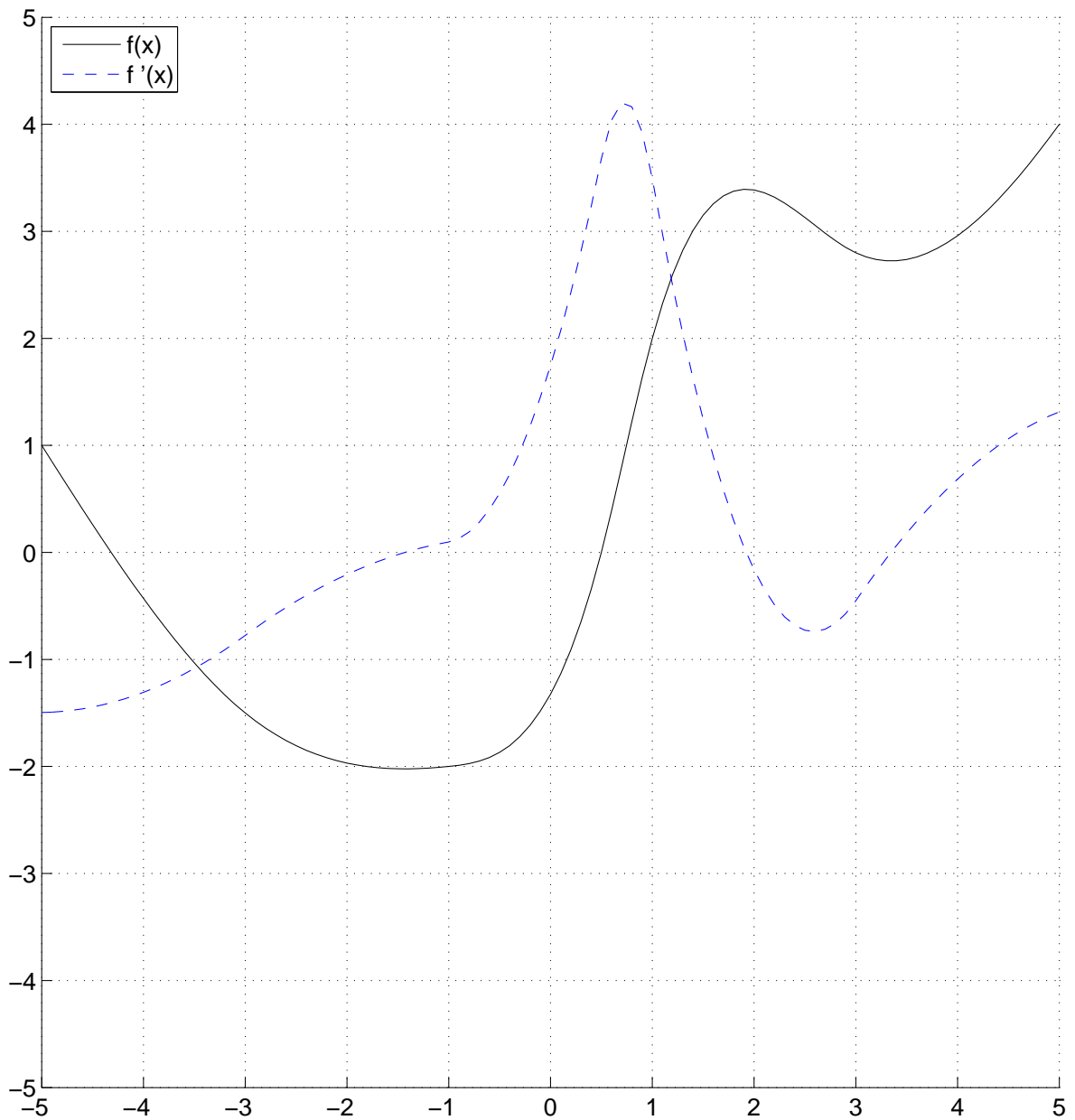
$$-2x'(t) + x(t) + x'''(t) = 0. \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 0, \quad x''(0) = 1.$$

- i) Welche Ordnung besitzt die DGL?
- ii) Überführen Sie die DGL in ein System von DGLen erster Ordnung und geben Sie die neue Anfangsbedingung (für das System) an.
- iii) Geben Sie (den Namen) einer MATLAB Funktion zur Simulation von Systemen von DGLen erster Ordnung an und beschreiben Sie kurz was für ein Verfahren der Vorlesung dahinter steckt.

- b) Gegeben ist nun die DGL

$$y'(t) = -y(t) - t, \quad y(0) = 2.$$

- i) Führen Sie einen Schritt des impliziten Euler Verfahrens mit Schrittweite  $h = 1/2$  aus.
- ii) Betrachten Sie das implizite Euler Verfahren und ein explizites Runge-Kutta Verfahren der Ordnung 2. Welches der beiden Verfahren erreicht für kleine  $h$  die bessere Genauigkeit, und warum? Aus welchem Grund wird für große  $h$  das andere Verfahren manchmal bevorzugt?



Kennzeichnen Sie klar Ihre Antwort zu a), b), c) und beschriften Sie dieses Blatt mit Namen und Matrikelnummer und geben Sie es zusammen mit Ihrer Lösung ab.

Abbildung 1: Darstellung der Funktion  $f$  und Ihrer Ableitung  $f'$  für Aufgabe 2

**Bitte wenden!**

#### 4. (8 Punkte)

Gegeben ist folgender unvollständiger Code zur Berechnung der pivotisierten LR-Zerlegung einer Matrix  $A$ . In jedem Schritt soll dabei das Pivot-Element (der aktuellen Spalte) mit maximalem Absolutbetrag gewählt werden.

Vervollständigen Sie diesen Code.

```
% Berechnet die pivotisierte LR Zerlegung einer
% quadratischen n x n Matrix A
function [L, R, P]= lrp(A)

n = size(A, 1);
L = eye(          );
P = eye(          );

for j=1:n-1
    % piv_abs: absolutwert pivot (wird nicht weiter benoetigt)
    % jstar_rel: index des pivot elements
    [piv_abs, jstar_rel] = max(abs(          ));

    % korrigierter index
    jstar = jstar_rel + j-1;

    % echtes pivot element
    piv = A(jstar, j);

    % Zeilen Permutationen in P, A, L durchführen
    % Spalten Permutation in L
    P([j, jstar], :) = P([jstar, j], :); % tausche Zeile j mit j*
    A(          ) =
    L(          ) =
    L(          ) =

    % Gauss Loesungsschritt

    % [[[ Den Code für diesen Block bitte
        auf ein Extrablatt schreiben    ]]]

end
R =
```

**Hinweis:** Der Code zu % Gauss Loesungsschritt ist identisch zur LR-Zerlegung ohne Pivotisierung.