

Bitte jede Aufgabe auf einem separaten Blatt lösen. Schreiben Sie Ihren Namen auf jedes Blatt! Alle Antworten sind zu begründen. Zur Auswertung elementarer Operationen und Funktionen darf ein Taschenrechner verwendet werden. Die maximale Punktzahl für jede einzelne Aufgabe ist angegeben. Es wird nicht erwartet, dass die Maximalpunktzahl der ganzen Serie erreicht wird.

1) (10 Punkte) Sei  $\mathbf{A}_1 = \mathbf{B}_1\mathbf{D}_1\mathbf{C}_1$  mit

$$\mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D}_1 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{C}_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

und sei  $\mathbf{A}_2 = \mathbf{B}_2\mathbf{D}_2\mathbf{C}_2$  mit

$$\mathbf{B}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D}_2 = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{C}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie **entweder** für  $i = 1$  **oder** für  $i = 2$  (von Hand) die Grössen  $\|A_i\|_2$ ,  $\|A_i\|_\infty$ ,  $\text{cond}_2(A_i)$ ,  $\text{cond}_\infty(A_i)$ . Deklarieren Sie klar, welche Matrix Sie wählen.

*Hinweis:* Bei geeigneter Wahl der zu untersuchenden Matrix müssen keine Determinanten berechnet werden.

2) (8 Punkte) Die Matrix

$$\mathbf{A} = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} -32 & -14 & 3 \\ -32 & 46 & -7 \\ 32 & -46 & 7 \\ -48 & 24 & -28 \\ -32 & -14 & 3 \end{pmatrix}$$

lässt sich als  $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$  (QR-Zerlegung) schreiben für

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 & 5 & 5 \\ 4 & -5 & 3 & 5 & -5 \\ -4 & 5 & -3 & 5 & -5 \\ 6 & 0 & -8 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 3 & -5 & -5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_1 \\ \mathbf{0}_{2 \times 3} \end{pmatrix}$$

$$\text{mit} \quad \mathbf{R}_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -8 & 4 & -2 \\ 0 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie alle Lösungen des durch die Fehlergleichungen  $\mathbf{r} = \mathbf{Ac} - \mathbf{f}$  für

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} -3.5 \\ 4.2 \\ 4 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

beschriebenen linearen Ausgleichsproblems nach kleinsten Quadraten.

b) Erklären Sie mindestens zwei weitere numerische Vorgehensweisen, um das erwähnte Ausgleichsproblem zu lösen. Die Verfahren sollen formuliert werden, die Lösung muss jedoch nicht noch einmal explizit ausgerechnet werden.

3) (12 Punkte) Die Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} e^x + y &= 4 \\ x + y^2 &= 3 \end{aligned}$$

soll mit dem Newton-Verfahren approximiert werden.

- Formulieren Sie die entsprechende Iterationsvorschrift.
- Berechnen Sie  $(x_2, y_2)$  ausgehend vom Startwert  $(x_0, y_0) = (0, 2)$ .
- Gibt es Startwerte, für welche das Newtonverfahren nicht funktioniert? Begründen Sie Ihre Aussage.

- d) Ergänzen Sie den untenstehenden MATLAB-Code zu einem Newtonverfahren. Schreiben Sie dazu geeignete Funktionen  $f$  und  $df$ , und verwenden Sie diese im Hauptteil Ihres Codes, so dass nur diese Funktionen modifiziert werden müssen, wenn der Code auf ein anderes Gleichungssystem mit zwei Unbekannten angewandt werden soll. Achten Sie darauf, den Rechenaufwand möglichst klein zu halten.

```
function [z,k] = Newton(z0)
% Eingabe-Argument:  z0: Startwert
% Ausgabe-Argumente: z: Approximation der Loesung des Gleichungssystems
%                   k: Anzahl durchgefuehrter Iterationsschritte

z = ...                ;%erster Newtonschritt
k = 1;

while norm(z0-z)>=1e-10
    z0 = z;
    z = ...            ;%Newtonschnitt
    k = ...            ;%Anzahl Iterationsschritte
end
%-----
function R=f(x,y)
R=[ ... ; ... ];

function R=df(x,y)
R=[ ... ];
```

- 4) (12 Punkte) Sei  $\mathbf{A}$  eine  $n \times n$  Matrix mit Eigenwerten  $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n < 0$ .

- Formulieren Sie ein numerisches Verfahren, welches einen Eigenwert der Matrix  $\mathbf{A}$  approximiert. Geben Sie insbesondere die entsprechende Iterationsvorschrift an und erklären Sie, wie die Approximation des Eigenwertes lautet und welchen der Eigenwerte Sie so approximieren. Geben Sie die angenommenen Voraussetzungen an die Matrix (bzw. an deren Eigenwerte) und an die Startwerte an.
- Erläutern Sie die Schritte eines weiteren Verfahrens zur Berechnung von Eigenwerten, welches Ihnen gestattet, sämtliche Eigenwerte von  $\mathbf{A}$  durch einmalige Anwendung des Verfahrens zu bestimmen. Geben Sie wieder die getroffenen Annahmen an.
- Formulieren Sie einen Algorithmus, mit welchem Sie den grössten Eigenwert von  $\mathbf{A}$  approximieren können. Falls mehrere Algorithmen in Frage kommen, geben Sie jenen mit minimaler Rechenerfordernis an.
- Es sei bekannt, dass der grösste Eigenwert von  $\mathbf{A}$  im Intervall  $(-3, -1.5)$  liegt. Wie können Sie diese Information ausnutzen, um Ihren in c) angegebenen Algorithmus zu verbessern? In welcher Hinsicht ist dieser neue Algorithmus besser?

\*\*\*\*\* *GOOD LUCK* \*\*\*\*\*