D–ITET, D–MATL — Numerische Methoden — ETH, Frühling 2007
Prof. Dr. R. Jeltsch

Prüfung

Alle Aufgaben haben das gleiche Gewicht. Bitte begründen Sie Ihre Ergebnisse ausreichend und geben Sie Zwischenschritte an.

1. Die gewöhnliche Differentialgleichung

$$y'(t) = -64\sin(y) - 32t, \qquad \text{für} \qquad t \in [0, \frac{1}{4}],$$

mit dem Anfangswert

$$y(0) = 0$$

soll mit dem impliziten Eulerverfahren berechnet werden.

a) Leiten Sie allgemein die Ordnung des impliziten Eulerverfahrens her.

b) Berechnen Sie einen Schritt mit dem impliziten Eulerverfahren zur Schrittweite $h = 1/4$. Benutzen Sie für die nicht-lineare Gleichung das Newtonverfahren. Brechen Sie das Verfahren nach einem Iterationsschritt ab.

2. Gegeben ist die Funktion

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_1(x,y,z) \\ f_2(x,y,z) \\ f_3(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 - 2(y-1) + 2z \\ \sin(y) - 5z + 4xz \\ -x^2 + y^2 + 4xyz \end{pmatrix}.$$

a) Formulieren Sie das Newtonverfahren zur Approximation der Lösung von $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$.

b) Berechnen Sie ausgehend von $\mathbf{x}_0 = (1,0,1)^T$ den ersten Schritt des Newtonverfahrens mit Hilfe der LU-Zerlegung von $\mathbf{f}'(\mathbf{x}_0)$ (ohne Pivotisierung).

Bitte wenden!

3. Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon^2 \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \qquad \varepsilon \in \mathbb{R}.$$

a) Berechnen Sie die Konditionszahlen $\kappa_2(A)$ und $\kappa_\infty(A)$.

b) Bestimmen Sie das Verhalten der Konditionszahlen $\kappa_2(A)$ und $\kappa_\infty(A)$ für $\varepsilon \to 0$.

c) Berechnen Sie

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\kappa_\infty(A)}{\kappa_2(A)}.$$

4. Vorgelegt sei die Gleichung

$$x = \exp(-x^2).$$

a) Zeigen Sie mit Hilfe des Fixpunktsatzes von Banach, dass die obige Gleichung genau eine Lösung $\bar{x}$ im Intervall $I = [0, 1]$ besitzt.

b) Berechnen Sie einen Näherungswert x_2 zu $\bar{x}$, indem Sie ausgehend vom Startwert $x_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ zwei Schritte einer Fixpunktiteration durchführen.

c) Nun soll eine Nullstelle von $f(x) = \exp(-x^2) - x$ mit Anfangswerten $x_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ und $x_1 = \frac{1}{2}$, und einer "Genauigkeit" [1] von $|\bar{x} - \hat{x}| \leq TOL_x = 0.5 \cdot 10^{-5}$ in MATLAB mit dem Sekantenverfahren berechnet werden.

i) Vervollständigen Sie dazu die MATLAB-Funktione `secant.m`:

```
function x = secant(x0, x1, TOLx)
 f0 = f(x0); f1 = f(x1);
  while abs(f1) > 1.85*TOLx

    ...

    f0 = f1; x0 = x1;
    x1 = x;  f1 = f(x1);
  end;
 return;
```

ii) Definieren Sie in `f.m` die Function $f(x)$. Wo, d.h. in welchem Verzeichnis muss `f.m` gespeichert werden?

[1] Korrektes Abbruchkriterium, ist nicht relevant für die Beantwortung der Aufgabe:

$$|f(\hat{x})| \leq |f'(\bar{x})| \cdot |\bar{x} - \hat{x}| \leq 1.85 \cdot TOL_x$$

5. **a)** Sei $f(x) = \sin(x)$ und $p \in P_2$ dasjenige Polynom, das $f(x)$ an den Stellen $-\frac{\pi}{2}, 0$ und $\frac{\pi}{2}$ interpoliert. Geben Sie p an und zeigen Sie, dass für den Interpolationsfehler auf $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ gilt:

$$|p(x) - f(x)| \leq \frac{\pi^3}{72\sqrt{3}}, \qquad x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}].$$

b) Berechnen Sie das Interpolationspolynom zu $f(x)$ mit der zusätzlichen Stützstelle $\frac{\pi}{6}$.