

Bitte jede Aufgabe auf einem separaten Blatt lösen (sie werden von verschiedenen Personen korrigiert!). Schreiben Sie Ihren Namen auf jedes Blatt! Alle Antworten sind zu begründen. Zur Auswertung elementarer Operationen und Funktionen darf ein Taschenrechner verwendet werden. Die maximale Punktzahl für jede einzelne Aufgabe ist angegeben. Es wird nicht erwartet, dass die Maximalpunktzahl der ganzen Serie erreicht wird.

1) (10 Punkte)

a) Berechnen Sie die QR-Zerlegung der Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie die Matrizen  $\mathbf{Q}$  und  $\mathbf{R}$  explizit an.

b) Nennen Sie weitere Methoden, mit welchen die QR-Zerlegung bestimmt werden kann. Die entsprechenden Berechnungen müssen dabei nicht durchgeführt werden.

2) (10 Punkte) Zur Approximation einer gewöhnlichen Differentialgleichung der Form

$$\dot{y} = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0 \quad (1)$$

soll das durch den reellen Wert  $c \neq 0$  parametrisierte Runge-Kutta-Verfahren

$$y_{n+1} = y_n + h \left( (1 - c)f(t_n, y_n) + cf\left(t_n + \frac{h}{2c}, y_n + \frac{h}{2c}f(t_n, y_n)\right) \right)$$

verwendet werden.

a) Wieviele Stufen hat das Verfahren und wie sieht das entsprechende Koeffizientenschema aus? Ist es ein explizites, implizites oder semi-implizites Verfahren?

b) Wie lautet das Stabilitätsgebiet  $S$  des Verfahrens? Welches ist der kleinste Wert  $\mu_0 \in \mathbb{R}$ , so dass das Intervall  $[\mu_0, 0]$  im Stabilitätsgebiet liegt?

*Hinweis: Bestimmen Sie den Schnittpunkt der negativen reellen Achse mit dem Rand von  $S$ .*

c) Das Verfahren werde nun einmal mit Schrittweite  $h_1 = 0.6$  und einmal mit Schrittweite  $h_2 = 0.4$  auf die Gleichung (1) mit  $f(t, y) = -4y$  angewandt. Beschreiben und begründen Sie qualitativ den Unterschied im Verhalten der jeweiligen Approximationen zu späten Zeitpunkten.

3) (14 Punkte) Sei

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & & & \\ 2 & 5 & 2 & & \\ & 2 & 5 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 2 \\ & & & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

eine  $N \times N$  Matrix.

a) Der betragsmässig grösste Eigenwert von  $\mathbf{A}$  lässt sich mittels Vektoriteration bestimmen. Führen Sie für  $N = 4$  zwei Iterationen explizit durch. Verwenden Sie dazu  $\mathbf{x}_0 = (1, 0, 0, 0)^T$  als Startwert. Geben Sie für beide Schritte jeweils eine Approximation des Eigenwertes an.

b) Sei  $\mathbf{x}$  ein  $N$ -dimensionaler Vektor. Wie kann in MATLAB die Multiplikation  $\mathbf{A}\mathbf{x}$  ohne Matrixmultiplikation ausgeführt werden? Geben Sie die betreffenden MATLAB-Befehle an.

*Hinweis: Es ist unnötig, die Matrix  $\mathbf{A}$  zu erzeugen.*

c) Vervollständigen Sie folgenden MATLAB-Code, mit welchem der betragsmässig grösste Eigenwert von  $\mathbf{A}$  mittels Vektoriteration berechnet werden soll. Startwert sei nun  $\mathbf{x}_0 = \frac{1}{\sqrt{N}}(1, 1, \dots, 1)^T$ . Falls eine Multiplikation  $\mathbf{A}\mathbf{x}$  nötig ist, verwenden Sie Ihr Resultat aus b). Sollte Ihnen dies Schwierigkeiten bereitet haben, schreiben Sie  $\mathbf{A}*\mathbf{x}$ .

```
% Eingabe-Argument: N: Dimension
% Ausgabe-Argumente: EWmax: Approximation des betragsmaessig
%                   groessten Eigenwertes
%                   k: Anzahl durchgefuehrter Iterationsschritte
k = 0;
tol = 10^-12;
xn = ones(N,1)/sqrt(N);           %Startwert
x0 = zeros(N,1);

while(norm(xn-x0)>tol)
x0 = xn;
xn = ...                          ;%Iterationsschritt

k = ...                            ;%Anzahl Iterations-
                                   ;%schritte

end

EWmax = ...                        ;%Approximation
                                   ;%des Eigenwertes
```

d) Welche Grösse beschreibt die Konvergenzgeschwindigkeit des Iterationsverfahrens?

e) Wie würden Sie vorgehen, um den betragsmässig kleinsten Eigenwert zu berechnen? Wie kann der am nächsten bei  $1/3$  gelegene Eigenwert approximiert werden? Markieren Sie im Code jene Zeilen, die dazu geändert werden müssten, mit  $\otimes$ . Die Änderungen müssen nicht explizit angegeben werden.

- 4) (12 Punkte) Gesucht sei die Lösung  $x^* \in \mathbb{R}$  der skalaren Gleichung  $f(x^*) = b$  für einen gegebenen Wert  $b \in \mathbb{R}$ .
- a) Sei  $f$  differenzierbar. Mit welchen iterativen Verfahren kann  $x^*$  approximiert werden? Nennen Sie dabei mindestens ein Verfahren, welches für geeignete Startwerte quadratisch, sowie eines, welches linear konvergiert. Die im jeweiligen Fall angenommenen Voraussetzungen sind anzugeben. Formulieren Sie die Iterationsvorschriften.
  - b) Betrachten Sie nun eine Funktion  $f$ , welche nicht differenzierbar ist. Können beide Verfahren, die Sie in Aufgabe a) genannt haben, auch in dieser etwas allgemeineren Situation angewandt werden? Falls dies bei einem oder beiden Verfahren nicht der Fall ist, gibt es eine modifizierte Form der betreffenden Methode(n), welche die Differenzierbarkeit von  $f$  nicht voraussetzt? Wenn ja, wie lautet dann die Iterationsvorschrift?
  - c) Sei nun  $f$  nicht explizit bekannt (oder nur schwierig auszuwerten). Nehmen Sie an, dass die Funktion  $f$  in der Nähe von  $x^*$  streng monoton ist und Sie die Funktionswerte von  $f$  an  $n$  Stellen  $x_1, x_2, \dots, x_n$  kennen. Wie können Sie in diesem Fall eine Näherung der Lösung  $x^*$  berechnen? Geben Sie die zugrundeliegenden Ideen an.

\*\*\*\*\* *GOOD LUCK* \*\*\*\*\*