D-MATH | Multilineare Algebra | SS 2010

Prof. Özlem Imamoglu

Serie 7

1. Seien $\vec{u} = u^i b_i \in \mathbb{R}^3$ und $\vec{v} = v^j b_j \in \mathbb{R}^3$ zwei (fix gewählte) Vektoren im $\mathbb{R}^3$ und sei L die Gerade durch $\vec{u}$ und $\vec{v}$. Dann ist der Vektor $\vec{u} - \vec{v}$ parallel zu L. Sei $\vec{x} = x^k b_k$ ein weiterer Punkt auf L.

a) Begründe kurz, dass folgendes gilt:

$$(\vec{x} - \vec{v}) \times (\vec{u} - \vec{v}) = 0$$

Folge daraus folgende Gleichung:

$$\vec{x} \times \vec{u} + \vec{u} \times \vec{v} + \vec{v} \times \vec{x} = 0$$

b) Zeige, dass die letzte Gleichung in Einstein-Konvention zu folgendem Gleichungssystem wird:

$$\varepsilon_{ij}^k (x^i u^j + u^i v^j + v^i x^j) = 0$$

Wobei ε_{ij}^k das Levi-Civita Symbol ist (siehe z.B. Musterlösung von Serie 6). Schreibe das Gleichungssystem explizit hin im Falle, dass $\mathcal{B}$ die Standardbasis ist und $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

c) Wie sehen $\vec{u}$, $\vec{v}$, ε_{ij}^k und das Gleichungssystem aus in der Basis:

$$\mathcal{B} = \left\{ \tilde{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tilde{b}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \tilde{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

2. Seien $\vec{u} = u^i b_i \in \mathbb{R}^3$, $\vec{v} = v^j b_j \in \mathbb{R}^3$ und $\vec{w} = w^j b_j \in \mathbb{R}^3$ drei (fix gewählte) Vektoren im $\mathbb{R}^3$ und sei E die Ebene durch $\vec{u}, \vec{v}$ und $\vec{w}$.

a) Begründe kurz, dass folgender Vektor $\vec{z}$ senkrecht (normal) zur Ebene E ist:

$$\vec{z} = (\vec{u} - \vec{v}) \times (\vec{v} - \vec{w})$$

Folge daraus folgende Gleichung:

$$\vec{z} = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{v} \times \vec{w} + \vec{w} \times \vec{u}$$

b) Schreibe die letzte Gleichung in Einstein-Konvention auf unter Verwendung des Levi-Civita Symbols ε_{ij}^{k} (analog zu Aufgabe $1b$)).

c) Sei nun $\vec{x} = x^i b_i \in E$ ein Vektor der Ebene. Vergewissere dich, dass dann folgendes gilt:

$$0 = (\vec{x} - \vec{u}) \cdot \vec{z} = \vec{x} \cdot \vec{z} - u \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$$

Dies ist die Ebenengleichung (in $\vec{x}$) von E. Schreibe diese Gleichung in Einstein-Konvention auf unter Verwendung des Levi-Civita Symbols: Die Ebenengleichung hat die Form $ax^1 + bx^2 + cx^3 = d$, wobei a, b, c, d sich durch u^m, v^n und ε_{ij}^{k} ausdrücken lassen.

d) Verwende obiges Resultat, um die Ebenengleichung explizit zu berechnen im Falle, dass $\mathcal{B}$ die Standardbasis ist und $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

e) Wie sehen $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, ε_{ij}^{k} und die Ebenengleichung aus bezüglich der folgenden Basis:

$$\mathcal{B} = \left\{ \tilde{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tilde{b}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \tilde{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

3. Sei $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung. Sofern nichts anderes steht arbeiten wir in dieser Aufgabe immer bezüglich der Standardbasis e_1, e_2, e_3 (mit $A = (A_j^i)$). Das Ziel dieser Aufgabe ist es für $n = 2, 3$ zu verstehen, wie die Determinante $A \mapsto \det(A)$ als $(0, n)$-Tensor aufgefasst werden kann und was dessen Koordianten sind.

a) Sei $n = 2$. Zeige, dass gilt:

$$\det(A) = \varepsilon_{kl} A_1^k A_2^l$$

mit $\varepsilon_{12} = 1$ (gerade Permutation), $\varepsilon_{21} = -1$ (ungerade Permutation) und $\varepsilon_{kl} = 0$ in den anderen Fällen.

b) Sei $n = 3$. Zeige, dass gilt:

$$\det(A) = \varepsilon_{klm} A_1^k A_2^l A_3^m \tag{1}$$

mit $\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = 1$ (gerade Permutationen), $\varepsilon_{132} = \varepsilon_{213} = \varepsilon_{321} = -1$ (ungerade Permutationen) und $\varepsilon_{klm} = 0$ in den anderen Fällen. Mit anderen Worten ε_{klm} entspricht genau dem Levi-Civita Symbol, nun jedoch mit 3 kovarianten

Indizes. *Zusatzaufgabe (oder Erinnerung): Zeige, dass für die Standardbasis* e_1*,* e_2*,* e_3 *folgendes gilt:*

$$\varepsilon_{klm} = e_k \cdot (e_l \times e_m)$$

Das heisst, das Levi-Civita Symbol ε_{klm} *entspricht gerade dem Spatprodukt der Basisvektoren* e_k, e_l, e_m*.*

c) Überprüfe Gleichung 1 für $\mathcal{F}$ aus Serie 2, Aufgabe 1 (bezüglich der Standardbasis). Schreibe dazu erst $\mathcal{F}(x) = \vec{x} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ in der Einstein-Summenkonvention auf (ie. gib A^i_j in Termen des Levi-Civita Symbols an) und kombiniere dann das Ergebnis mit Gleichung (1). Schreibe den ganzen Ausdruck explizit auf und überprüfe, ob er gleich 0 ist $(\det(\mathcal{F}) = 0$.

d) Sei n wieder beliebig. Verifiziere, dass durch die Determinante eine multilineare Abbildung von $\underbrace{\mathbb{R}^n \times ... \times \mathbb{R}^n}_{n \text{ mal}}$ nach $\mathbb{R}$ definiert wird und dass die Determinante somit als $(0, n)$-Tensor aufgefasst werden kann. *Hinweis: Zerlege die Matrix in Spaltenvektoren. Dadurch kann man die Determinante als eine (multilineare) Abbildung auf allen Spalten von* A *betrachten.*