

Beispielaufgaben

1. Es seien folgende Basistransformationen gegeben:

$$b'_i = L_i^j b_j \qquad b''_i = U_i^j b'_j$$

Wobei

$$L = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Vervollständige folgende Tabelle:

x^1	x^2	x^3	x'^1	x'^2	x'^3	x''^1	x''^2	x''^3
0.5	0.5	0						
0	0	0						
			1	-1	0			
						3	0.5	0.5

2. (lange Aufgabe) Sei $\mathcal{B} = \left\{ b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Sei $\mathcal{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ gegeben durch $\mathcal{F}(v) = v \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- Bestimme die Dualbasis von \mathcal{B} .
- Begründe kurz, dass \mathcal{F} ein Tensor vom Typ $(1, 1)$ ist.
- Bestimme die Darstellungsmatrix von \mathcal{F} bezüglich \mathcal{B} .
- Was sind die Eigenwerte von \mathcal{F} ? Was ist die Determinante von \mathcal{F} ?
- Bestimme eine Eigenbasis für \mathcal{F} .

3. Sei $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ der Vektorraum der reellen Polynome vom Grad kleiner oder gleich 2. Sei $\mathcal{B} = \{b_1 = 1, b_2 = x, b_3 = 3x^2 - 1\}$. Sei des weiteren:

$$(f, g) := \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$$

- a) Begründe kurz, dass $g = (\cdot, \cdot)$ ein Tensor vom Typ $(0, 2)$ ist.
- b) Bestimme die Darstellungsmatrix von g bezüglich Basis \mathcal{B} .
- c) Bestimme die Dualbasis von \mathcal{B} bezüglich (\cdot, \cdot) .
- d) Bestimme die ko- und kontravarianten Koordinaten von $p(x) := 11x^2 - 2x + 1$ bezüglich \mathcal{B} .

4. (*lange Aufgabe*) Sei $V, \mathcal{B}, p(x)$ und (\cdot, \cdot) wie in Aufgabe 2. Sei

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : V &\rightarrow V \\ f &\mapsto \frac{15}{508}(f, p)p \end{aligned}$$

- a) Begründe kurz, dass \mathcal{F} ein Tensor vom Typ $(1, 1)$ ist.
- b) Bestimme die Darstellungsmatrix von \mathcal{F} bezüglich Basis \mathcal{B} .
- c) Was sind die Eigenwerte von \mathcal{F} mit Vielfachheit? Was ist die Determinante von \mathcal{F} ?
- d) Bestimme eine Eigenbasis für \mathcal{F} . Was sind die Koordinaten von $p(x)$ bezüglich dieser Eigenbasis?

5. A, B seien $(1, 1)$ -Tensoren aufgefasst als lineare Abbildungen. v, w seien kontravariante Vektoren und $\lambda \in \mathbb{R}$ sei ein Skalar.

- a) Schreibe folgende Ausdrücke in Einstein-Summenkonvention (ohne Summenzeichen).

$$ABA + BAB \quad v^T Av \quad Av - \lambda v \quad \text{Tr}(A^T B)$$

Wobei $\text{Tr}(A)$ der Summe der Diagonaleinträge von A entspricht.

- b) Bestimme jeweils den Typ der obigen Tensoren.
- c) Sei $b'_i = Lb_i$ eine neue Basis (und sei $\Lambda = L^{-1}$). Wie sehen die Koordinaten der obigen Tensoren in der neuen Basis aus (ausgedrückt durch die Koordinaten in der alten Basis)?

6. Gegeben sei folgende Abbildung:

$$\mathcal{F} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$
$$(u, v, w) \mapsto \langle u, v \times w \rangle$$

wobei \langle, \rangle das Standardskalarprodukt ist.

- a) Zeige, dass \mathcal{F} ein Tensor ist und bestimme dessen Typ.
 - b) Gib das Transformationsverhalten von \mathcal{F} unter Basiswechsel an.
 - c) Bestimme die Koordinaten von \mathcal{F} bezüglich der Standardbasis mit Hilfe des Levi-Civita-Symbols.
7. Sei V ein 3-dimensionaler Vektorraum mit Basis \mathcal{B} . Seien $u, v \in V$ mit Koordinaten u^i, v^j und sei g ein Skalarprodukt auf V mit Darstellungsmatrix g_{ij} . Sei E die Ebene durch u , senkrecht auf v (in Bezug zu g).
- a) Gib die Ebenengleichung von E an. Wie sieht diese in der Einstein-Summenkonvention aus?
 - b) Wie sieht die Ebenengleichung (in der Einstein-Summenkonvention) in einer neuen Basis aus (ausgedrückt durch die Vektoren u^i, v^j, g_{ij} in der alten Basis, x'^i in der neuen Basis und die Transformationsmatrix L , wobei $b'_i = L^j b_j$ und $\Lambda = L^{-1}$)?
 - c) Wie sieht die Ebenengleichung aus im Falle, dass $V = \mathbb{R}^3$, \mathcal{B} die Standardbasis und g das Standardskalarprodukt ist?