MARGARITA MATHEMATICA EN MEMORIA DE
JOSÉ JAVIER (CHICHO) GUADALUPE HERNÁNDEZ
(Luis Español y Juan L. Varona, editores),
Servicio de Publicaciones, Universidad de La Rioja,
Logroño, Spain, 2001.

FÓRMULA FRACTAL DE LA ENERGÍA DE UNA SEÑAL MUESTREADA

M. ANTONIA NAVASCUÉS Y M. VICTORIA SEBASTIÁN

En memoria del profesor J. J. Guadalupe, Chicho

ABSTRACT. Fractal interpolation functions provide new methods for approximating experimental data. The main difference with the classical procedures is the fractal character of the curves used to fit the points. In the present paper, an affine fractal interpolation technique is applied to find an explicit formula to obtain the energy of a real periodic evenly sampled signal. Under some hypothesis about the original function, an error bound is given.

1. FUNCIONES DE INTERPOLACIÓN FRACTAL

Las funciones de interpolación fractal son de creación reciente (1987) y constituyen una herramienta útil en la aproximación de datos experimentales. Estas funciones pueden computarse de manera rápida y poseen propiedades geométricas que permiten representaciones gráficas adecuadas de fenómenos complejos y un cálculo sencillo de la dimensión fractal del gráfico de las mismas. En el caso particular de las funciones de interpolación fractal polinómica, el método puede considerarse una generalización de los splines de este tipo. La interpolación polinómica supone que la señal es demasiado «lisa» y no recoge la estructura fractal de la misma. Si el muestreo de la señal no es muy refinado, la interpolación por splines realiza sobre ésta un suavizado o filtro de paso bajo, que omite las frecuencias altas.

Las funciones de interpolación fractal pueden integrarse utilizando la ecuación funcional que las define. En algunos casos, este tipo de curvas poseen una dimensión fractal no entera, es decir, se trata de conjuntos fractales en sentido estricto y, además, son funciones no derivables en ningún punto.

En el presente trabajo se utilizan estas funciones para interpolar un conjunto de puntos correspondientes a una señal muestreada y calcular la energía de ésta, en el caso de que haya periodicidad.

1.1. Sistemas de funciones iteradas (SFI). Sea K un espacio métrico completo respecto de la distancia $d(x, y)$ $\forall x, y \in K$. Sea $\mathcal{H}$ el conjunto de todos los subconjuntos de K compactos no vacíos. $\mathcal{H}$ es un espacio métrico completo con la

2000 *Mathematics Subject Classification.* 37M10, 58C05.
Key words and phrases. Affine fractal interpolation, signal energy, interpolation error bounds.

distancia de Hausdorff (ver [1])

$$h(A,B) = \text{máx}\Big\{\sup_{x\in A}\ \text{ínf}_{y\in B}\ d(x,y),\ \sup_{x\in B}\ \text{ínf}_{y\in A}\ d(x,y)\Big\}$$

definida para cualesquiera $A, B \in \mathcal{H}$.

Sean $w_n : K \to K$, $n = 1, 2, \ldots, N$, un conjunto de transformaciones continuas. Entonces la $(N + 1)$-tupla $\{K, w_n : n = 1, 2, \ldots, N\}$ se denomina sistema de funciones iteradas (SFI) (ver [3]). Se define la transformación $W : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ mediante la igualdad

$$W(A) = \bigcup_n w_n(A) \quad \text{para } A \in \mathcal{H}.$$

Cualquier conjunto $G \in \mathcal{H}$ tal que $W(G) = G$ se dice atractor del SFI (es decir, el atractor es un punto fijo de W). Si K es un compacto, entonces cualquier SFI admite al menos un atractor.

Si para algún $0 \leq s < 1$ y todo $n \in \{1, 2, \ldots, N\}$ se verifica la desigualdad

$$d(w_n(x), w_n(y)) \leq s d(x,y) \quad \forall x, y \in K,$$

entonces el SFI se dice hiperbólico. En este caso W es una aplicación contractiva respecto la métrica de Hausdorff, es decir,

$$h(W(A), W(B)) \leq s h(A,B) \quad \forall A, B \in \mathcal{H}.$$

Como consecuencia del teorema de la aplicación contractiva, W admite un único punto fijo, es decir, existe un único atractor G que verifica

$$G = \text{lím}_{m\to\infty} W^m(S) \quad \forall S \in \mathcal{H},$$

donde W^m denota la composición de W consigo misma m veces.

1.2. Interpolación fractal afín. Sean $t_0 < t_1 < \cdots < t_N$ un conjunto de números reales, se denota por $I = [t_0, t_N] \subset \mathbb{R}$ el intervalo cerrado que los contiene. Sea dado el conjunto $\{(t_n, x_n) \in I \times \mathbb{R} : n = 0, 1, 2, \ldots, N\}$, llamado conjunto de puntos de interpolación. Para cada subintervalo $I_n = [t_{n-1}, t_n]$ se define la aplicación $L_n : I \to I_n$, $n \in \{1, 2, \ldots, N\}$, de modo que

$$L_n(t_0) = t_{n-1}, \quad L_n(t_N) = t_n \tag{1.1}$$

y L_n sea un homeomorfismo contractivo:

$$|L_n(c_1) - L_n(c_2)| \leq l|c_1 - c_2| \quad \forall c_1, c_2 \in I \tag{1.2}$$

para algún $0 \leq l < 1$.

Sea $-1 < \alpha_n < 1$, $n = 1, 2, \ldots, N$, y $F = I \times \mathbb{R}$. Se consideran N aplicaciones continuas, $F_n : F \to \mathbb{R}$ satisfaciendo:

$$F_n(t_0, x_0) = x_{n-1}, \quad F_n(t_N, x_N) = x_n, \quad n = 1, 2, \ldots, N, \tag{1.3}$$

$$|F_n(t,x) - F_n(t,y)| \leq \alpha_n |x - y|, \quad t \in I, \quad x, y \in \mathbb{R}. \tag{1.4}$$

Tomando $w_n(t,x) = (L_n(t), F_n(t,x))$, $\forall n = 1, 2, \ldots, N$, se puede enunciar el siguiente resultado:

Teorema 1.1 (ver [1]). *El SFI $\{F, w_n : n = 1, 2, \ldots, N\}$ descrito anteriormente admite un único atractor G. Este G es el gráfico de una función continua $f : I \to \mathbb{R}$ que verifica $f(t_n) = x_n$ para $n = 0, 1, 2, \ldots, N$.*

La función anterior recibe el nombre de función de interpolación fractal (FIF) asociada con $\{(L_n(t), F_n(t,x))\}_{n=1}^{N}$. Y, además, es la única función $f : I \to \mathbb{R}$ que satisface la ecuación funcional

$$f(L_n(t)) = F_n(t, f(t)), \quad n = 1, 2, \ldots, N, \quad t \in I,$$

o, lo que es lo mismo,

$$f(t) = F_n(L_n^{-1}(t), f \circ L_n^{-1}(t)), \quad n = 1, 2, \ldots, N, \quad t \in I_n = [t_{n-1}, t_n]. \tag{1.5}$$

Se define el conjunto $\mathcal{F}$ de funciones continuas $f : [t_0, t_N] \to \mathbb{R}$ tales que $f(t_0) = x_0$; $f(t_N) = x_N$. En $\mathcal{F}$ se define la métrica d asociada a la norma del supremo:

$$d(f, g) = \text{máx}\{|f(t) - g(t)| : t \in [t_0, t_N]\}, \quad \forall f, g \in \mathcal{F}.$$

Entonces $(\mathcal{F}, d)$ es un espacio métrico completo.

Dado el SFI anterior, se define la aplicación $T : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ mediante

$$(Tf)(t) = F_n(L_n^{-1}(t), f \circ L_n^{-1}(t)), \quad \forall t \in [t_{n-1}, t_n], \quad n = 1, 2, \ldots, N. \tag{1.6}$$

Utilizando las condiciones (1.1)–(1.4), se comprueba que $(Tf)(t)$ es continua en el intervalo $[t_{n-1}, t_n]$ para $n = 1, 2, \ldots, N$ y además lo es en $t_1, t_2, \ldots, t_{N-1}$. En cada punto, $(Tf)(t_n) = x_n$. Además T es una aplicación contractiva en el espacio métrico $(\mathcal{F}, d)$:

$$d(Tf, Tg) \leq |\alpha|_\infty \, d(f, g),$$

donde $|\alpha|_\infty = \text{máx}\{|\alpha_n| : n = 1, 2, \ldots, N\}$. Suponiendo que $|\alpha|_\infty < 1$, el teorema de la aplicación contractiva implica que T posee un único punto fijo en $\mathcal{F}$, es decir, existe $f \in \mathcal{F}$ tal que $(Tf)(t) = f(t)$ $\forall t \in [t_0, t_N]$. Además, f pasa a través de los puntos de interpolación. Esta función f es la FIF asociada a w_n.

Las funciones de interpolación fractal más estudiadas hasta ahora han sido del tipo

$$L_n(t) = a_n t + b_n, \tag{1.7}$$

$$F_n(t, x) = \alpha_n x + q_n(t), \tag{1.8}$$

donde $q_n(t)$ es una aplicación afín, llamadas FIF afines (ver [1, 4]).

Para que se verifiquen las hipótesis del teorema anterior es necesario que $L_n(t_0) = t_{n-1}$, $L_n(t_N) = t_n$ (según (1.1)), lo cual implica que

$$a_n = \frac{t_n - t_{n-1}}{t_N - t_0}, \qquad b_n = \frac{t_N t_{n-1} - t_0 t_n}{t_N - t_0}.$$

Se trabajará con puntos equidistantes y además, sin pérdida de generalidad, se considerará el intervalo de interpolación en $t_0 = 0$, por lo que, si se denota $t_n - t_{n-1} = h$, entonces $t_N - t_0 = Nh$, y por lo tanto

$$a_n = \frac{1}{N} \quad \text{y} \quad b_n = t_{n-1}. \tag{1.9}$$

Imponiendo a F_n la condición (1.3) se tiene que

$$q_n(t_0) = x_{n-1} - \alpha_n x_0, \tag{1.10}$$

$$q_n(t_N) = x_n - \alpha_n x_N. \tag{1.11}$$

Si $q_n(t) = q_{1n}t + q_{0n}$, por (1.10)–(1.11) se obtienen los coeficientes de $q_n(t)$ en función del parámetro libre α_n, llamado factor de escala vertical. Como se ha considerado $t_0 = 0$, las expresiones se reducen a

$$q_{1n} = \frac{x_n - x_{n-1}}{t_N} - \alpha_n \frac{x_N - x_0}{t_N}, \tag{1.12}$$

$$q_{0n} = x_{n-1} - \alpha_n x_0. \tag{1.13}$$

Si $\alpha_n = 0$ $\forall n = 1, 2, \ldots, N$, entonces $F_n(t, x) = q_n(t)$ en (1.8), y por lo tanto $f(t) = q_n \circ L_n^{-1}(t)$ $\forall t \in I_n$ (con la notación de (1.5)). Entonces $f(t)$ es lineal a trozos y continua.

2. Cálculo de la energía de una señal periódica mediante interpolación fractal afín

Se pretende calcular la energía de una señal, de la cual en la práctica sólo se tienen datos muestreados. Se propone la técnica de reconstrucción y ajuste de dicha señal mediante las funciones de interpolación fractal expuestas en el apartado anterior. A partir de aquí se calcula la energía de la señal mediante fórmulas explícitas que vienen dadas en términos de los coeficientes del sistema de funciones iteradas que definen la función de interpolación.

2.1. Momentos temporales y espectrales de una señal. Dada una señal $x(t)$ definida en el intervalo $I = [0, T]$, se definen los momentos temporales como

$$M_n = \int_0^T t^n f(t)\, dt.$$

Se puede expresar una señal en una cierta época como una función del tiempo $x(t)$ y por medio de su transformada de Fourier $\widehat{x}(w)$ describirla en función de la frecuencia. Multiplicando $\widehat{x}(w)$ por su conjugado se obtiene el espectro de potencia $S(w) = \widehat{x}(w)\widehat{x}^*(w)$ de la señal.

Se define el momento espectral de orden n como

$$m_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} w^n S(w)\, dw. \tag{2.1}$$

La descripción de las frecuencias completas obtenidas por medio de la transformada de Fourier es simétrica con respecto a la frecuencia 0. Por ser una señal real se verifica que $\widehat{x}(-w) = \widehat{x}^*(w)$, entonces $S(-w) = S(w)$ y $w^n S(w)$ es una función impar si n lo es. Como consecuencia, todos los momentos espectrales impares son 0.

En este caso nos centraremos en el estudio del momento de orden 0:

$$m_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(w)\, dw. \tag{2.2}$$

En la práctica se trabaja con señales de duración finita. Para determinados cálculos de tipo espectral, es necesaria la condición de periodicidad. Se denotará $L^2(T)$ el espacio de funciones periódicas de periodo T de cuadrado integrable en $I = [0, T]$. Se define la norma de $f \in L^2(T)$ como

$$\|f\|_{L^2}^2 = (f, f)_{L^2} = \frac{1}{T}\int_I f(t) f^*(t)\, dt. \tag{2.3}$$

La expresión del momento de orden 0 en el dominio temporal se basa en la igualdad de la energía, es decir, que la potencia total en el dominio de la frecuencia es idéntica a la potencia media en el dominio del tiempo. Se tiene, por la fórmula de Plancherel (Parseval) para una señal de este tipo (ver [5]) la siguiente igualdad:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{x}(w)|^2\, dw = \frac{1}{T}\int_I |x(t)|^2\, dt. \tag{2.4}$$

Considerando que $S(w) = \widehat{x}(w)\widehat{x}^*(w) = |\widehat{x}(w)|^2$ y que x es una señal real, puede expresarse la energía de la misma como

$$E = m_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S(w)\, dw = \frac{1}{T}\int_I x^2(t)\, dt. \tag{2.5}$$

2.2. Cuadratura de la energía en el dominio temporal. Se pretende calcular la energía de la señal en el dominio del tiempo. Como los datos que se tienen son los de una señal muestreada, es necesario reconstruirla para poder integrar el cuadrado de ésta. Para ello se utiliza el método de interpolación fractal propuesto anteriormente.

2.2.1. Momentos temporales. Se comienza hallando los momentos temporales en función de los coeficientes del sistema de funciones iteradas que definen la función de interpolación fractal afín, ya que se expresará la energía de la señal en función de dichos momentos.

Para calcular M_0 se utiliza la función de interpolación fractal afín asociada a un SFI del tipo (1.7)–(1.8) verificando (1.9), (1.12) y (1.13). En el siguiente desarrollo se tiene en cuenta que la FIF es el punto fijo de la aplicación $T : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ definida en (1.6):

$$\begin{aligned} M_0 = \int_{t_0}^{t_N} f(t)\, dt = \sum_{n=1}^{N} \int_{t_{n-1}}^{t_n} (Tf)(t)\, dt &= \sum_{n=1}^{N} \int_{t_0}^{t_N} [\alpha_n f(t) + q_n(t)]\, d(a_n t + b_n) \\ &= \sum_{n=1}^{N} a_n \alpha_n \int_0^{t_N} f(t)\, dt + \sum_{n=1}^{N} a_n \int_0^{t_N} q_n(t)\, dt \\ &= \sum_{n=1}^{N} a_n \alpha_n M_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n \int_0^{t_N} q_n(t)\, dt, \end{aligned}$$

donde se ha realizado el cambio de variable $t = L_n(\tilde{t})$ y se considera que $t_0 = 0$. Despejando de aquí el momento M_0 se obtiene

$$M_0 = \frac{\sum_{n=1}^{N} a_n \int_0^{t_N} q_n(t)\,dt}{1 - \sum_{n=1}^{N} a_n \alpha_n}. \tag{2.6}$$

Considerando que la partición del intervalo $[0, t_N]$ se hace de modo equidistante, entonces $a_n = 1/N$. Llamando $\alpha = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n$ y $\beta = \sum_{n=1}^{N} \int_0^{t_N} q_n(t)\,dt$ se obtiene la expresión

$$M_0 = \frac{\beta}{N - \alpha}. \tag{2.7}$$

Procediendo de manera análoga se puede calcular el momento M_1:

$$M_1 = \int_{t_0}^{t_N} t f(t)\,dt = \sum_{n=1}^{N} \int_{t_{n-1}}^{t_n} t (Tf)(t)\,dt$$

$$= \sum_{n=1}^{N} \int_0^{t_N} (a_n t + b_n)[\alpha_n f(t) + q_n(t)]\,d(a_n t + b_n)$$

$$= \sum_{n=1}^{N} a_n^2 \alpha_n \int_0^{t_N} t f(t)\,dt + \sum_{n=1}^{N} a_n^2 \int_0^{t_N} t q_n(t)\,dt$$

$$+ \sum_{n=1}^{N} a_n b_n \alpha_n \int_0^{t_N} f(t)\,dt + \sum_{n=1}^{N} a_n b_n \int_0^{t_N} q_n(t)\,dt. \tag{2.8}$$

Sustituyendo $a_n = 1/N$ y llamando $\gamma = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n b_n$ se obtiene la expresión

$$M_1 = \frac{1}{N^2}\,\alpha M_1 + \frac{1}{N^2} \sum_{n=1}^{N} \int_0^{t_N} t q_n(t)\,dt + \frac{1}{N}\,\gamma M_0 + \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} b_n \int_0^{t_N} q_n(t)\,dt.$$

Llamando $\lambda_1 = \sum_{n=1}^{N} \int_0^{t_N} t q_n(t)\,dt$, $\beta_1 = \sum_{n=1}^{N} b_n \int_0^{t_N} q_n(t)\,dt$ y sustituyendo M_0 por el valor calculado en (2.7), el momento M_1 se puede expresar del siguiente modo:

$$M_1 = \frac{1}{N^2 - \alpha}\left[\lambda_1 + N\gamma \frac{\beta}{N - \alpha} + N\beta_1\right]. \tag{2.9}$$

2.2.2. Fórmula de la energía. Para obtener el momento m_0 se aplica el método seguido en el cálculo de los momentos temporales. Se considera la función $T : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ definida por:

$$(Tf)(t) = \alpha_n f(L_n^{-1}(t)) + q_n(L_n^{-1}(t)), \quad \forall t \in [t_{n-1}, t_n], \quad n = 1, 2, \ldots, N.$$

Según se ha expuesto en los apartados anteriores, T posee un único punto fijo $f \in \mathcal{F}$ de modo que $(Tf)(t) = f(t)$ $\forall t \in [0, t_N]$. Para la obtención de $m_0 = \frac{1}{t_N} \int_0^{t_N} (f(t))^2\,dt$ se considera la integral $I_0 = \int_0^{t_N} (f(t))^2\,dt$, de modo que

$$I_0 = \int_0^{t_N} (f(t))(f(t))\,dt = \sum_{n=1}^{N} \int_{t_{n-1}}^{t_n} (Tf(t))(Tf(t))\,dt$$

$$= \sum_{n=1}^{N} \int_0^{t_N} [\alpha_n f(t) + q_n(t)][\alpha_n f(t) + q_n(t)]\, d(a_n t + b_n).$$

Se considera a partir de ahora $a_n = 1/N$. Así,

$$I_0 = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \int_0^{t_N} [\alpha_n f(t) + q_n(t)][\alpha_n f(t) + q_n(t)]\, dt$$

$$= \frac{1}{N} \Big[\Big(\sum_{n=1}^{N} \alpha_n^2 \Big) I_0 + 2 \sum_{n=1}^{N} \Big(\alpha_n \int_0^{t_N} f(t) q_n(t)\, dt \Big) + N J_0 \Big].$$

El tercer sumando puede expresarse como el momento de orden 0 de otra función

$$J_0 = \sum_{n=1}^{N} a_n \int_0^{t_N} (q_n(\tilde{t}))^2\, d\tilde{t} = \sum_{n=1}^{N} \int_{t_{n-1}}^{t_n} (q_n \circ L_n^{-1}(t))^2\, dt$$

(con $t = L_n(\tilde{t})$); por tanto $J_0 = \int_0^{t_N} (Q(t))^2\, dt$ siendo $Q(t) = q_n \circ L_n^{-1}(t)$ si $t \in I_n$. Si $\alpha_n = 0\ \forall n = 1, 2, \dots, N$, J_0 es el momento de la función lineal a trozos que interpola los datos.

Sustituyendo $q_n(t) = q_{1n} t + q_{0n}$ se puede expresar I_0 en términos de los momentos temporales. Se calcula primero el sumando

$$\sum_{n=1}^{N} \alpha_n \int_0^{t_N} f(t) q_n(t)\, dt = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \int_0^{t_N} \big[q_{1n} t f(t) + q_{0n} f(t) \big]\, dt$$

$$= M_1 \Big(\sum_{n=1}^{N} \alpha_n q_{1n} \Big) + M_0 \Big(\sum_{n=1}^{N} \alpha_n q_{0n} \Big).$$

Denotando por $\theta = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n^2$ se tiene, pues,

$$I_0 = \frac{1}{N} \theta I_0 + \frac{2}{N} \Big[M_1 \Big(\sum_{n=1}^{N} \alpha_n q_{1n} \Big) + M_0 \Big(\sum_{n=1}^{N} \alpha_n q_{0n} \Big) \Big] + J_0;$$

despejando de aquí I_0,

$$I_0 = \Big(\frac{1}{N - \theta} \Big) \Big[2M_1 \Big(\sum_{n=1}^{N} \alpha_n q_{1n} \Big) + 2M_0 \Big(\sum_{n=1}^{N} \alpha_n q_{0n} \Big) + N J_0 \Big] \tag{2.10}$$

por lo que el momento m_0 resulta ser

$$E = m_0 = \frac{1}{Nh(N - \theta)} \Big[2M_1 \Big(\sum_{n=1}^{N} \alpha_n q_{1n} \Big) + 2M_0 \Big(\sum_{n=1}^{N} \alpha_n q_{0n} \Big) + N J_0 \Big]. \tag{2.11}$$

3. Acotación de los errores de aproximación

Se pretende dar una aproximación del error cometido al calcular la energía de la señal usando funciones de interpolación fractal. En primer lugar se acotará el error cometido al sustituir la señal $x(t)$ por la FIF $f_\alpha(t)$ que tiene como factores de escala vertical $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$. Posteriormente se acotará el error cometido al integrar la FIF para hallar el momento espectral de orden 0 o energía de la señal.

Se considera la aplicación

$$T : J \times \mathcal{F} \to \mathcal{F}$$
$$(\alpha, f) \mapsto T_\alpha f$$

con $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$; J el intervalo $J = [0, r] \times [0, r] \times \cdots \times [0, r]$, $0 \le r < 1$, r fijo; $[t_0, t_N] = I$; $\mathcal{F}$ espacio de funciones continuas en I tales que $f(t_0) = x_0$ y $f(t_N) = x_N$; y, finalmente,

$$T_\alpha f(t) = F_n^{\alpha_n}(L_n^{-1}(t), f \circ L_n^{-1}(t)) = \alpha_n f \circ L_n^{-1}(t) + q_n \circ L_n^{-1}(t). \tag{3.1}$$

El superíndice α_n representa la dependencia de F_n respecto el factor de escala vertical. El polinomio $q_n = q_{n1}t + q_{n0}$ y sus coeficientes se definen en (1.10) y (1.11), y $t \in [t_{n-1}, t_n] = I_n$. Se sabe que el punto fijo de T_α es la FIF (Teorema de Barnsley).

Proposición 3.1. *Dadas $f_1, f_2 \in \mathcal{F}$, se verifica que*

$$|T_\alpha f_1(t) - T_\alpha f_2(t)| \le |\alpha|_\infty \, \|f_1 - f_2\|_\infty$$

siendo $|\alpha|_\infty = \max\limits_n\{|\alpha_n|\}$, y $t \in I$.

Demostración.

$$|T_\alpha f_1(t) - T_\alpha f_2(t)| \underset{t \in I_n}{=} |\alpha_n f_1 \circ L_n^{-1}(t) + q_n \circ L_n^{-1}(t) - \alpha_n f_2 \circ L_n^{-1}(t) - q_n \circ L_n^{-1}(t)|$$
$$= |\alpha_n| \, |f_1 \circ L_n^{-1}(t) - f_2 \circ L_n^{-1}(t)|$$
$$\le \max_n\{|\alpha_n|\}|f_1 \circ L_n^{-1}(t) - f_2 \circ L_n^{-1}(t)| \le |\alpha|_\infty \, \|f_1 - f_2\|_\infty$$

de modo que

$$\|T_\alpha f_1 - T_\alpha f_2\|_\infty \le |\alpha|_\infty \, \|f_1 - f_2\|_\infty. \tag{3.2}$$

□

Proposición 3.2. *Sean $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ y $f \in \mathcal{F}$. Entonces*

$$\|T_\alpha f - T_\beta f\|_\infty \le |\alpha - \beta|_\infty \, (\|f\|_\infty + \max\{|x_0|, |x_N|\}).$$

Demostración. Se pretende acotar la diferencia $|T_\alpha f(t) - T_\beta f(t)|$. Podemos escribir (se expresa mediante $q_n^{\alpha_n}$ la dependencia de q_n respecto a α_n)

$$|T_\alpha f(t) - T_\beta f(t)| \underset{t \in I_n}{=} |\alpha_n f \circ L_n^{-1}(t) + q_n^{\alpha_n} \circ L_n^{-1}(t) - \beta_n f \circ L_n^{-1}(t) - q_n^{\beta_n} \circ L_n^{-1}(t)|$$

$$\le \underbrace{|\alpha_n f \circ L_n^{-1}(t) - \beta_n f \circ L_n^{-1}(t)|}_{\{3.1\}} + \underbrace{|q_n^{\alpha_n} \circ L_n^{-1}(t) - q_n^{\beta_n} \circ L_n^{-1}(t)|}_{\{3.2\}}.$$

Acotando por separado cada sumando, para {3.1} se tiene

$$|\alpha_n f \circ L_n^{-1}(t) - \beta_n f \circ L_n^{-1}(t)| \leq |\alpha_n - \beta_n|\, |f \circ L_n^{-1}(t)| \leq |\alpha - \beta|_\infty \, \|f\|_\infty .$$

Para acotar {3.2} se recuerda primero que $q_n(t) = q_{n1}t + q_{n0}$ con

$$q_{n1} = \frac{x_n - x_{n-1}}{t_N} - \alpha_n \frac{x_N - x_0}{t_N},$$
$$q_{n0} = x_{n-1} - \alpha_n x_0.$$

Así,

$$|q_n^{\alpha_n} \circ L_n^{-1}(t) - q_n^{\beta_n} \circ L_n^{-1}(t)| = \left|(\beta_n - \alpha_n)\frac{x_N - x_0}{t_N} L_n^{-1}(t) + (\beta_n - \alpha_n)x_0\right|.$$

Como $L_n(t) = a_n t + b_n$, entonces

$$L_n^{-1}(t) = \frac{t - b_n}{a_n} = N(t - t_{n-1})$$

y podemos continuar con la igualdad anterior:

$$|q_n^{\alpha_n} \circ L_n^{-1}(t) - q_n^{\beta_n} \circ L_n^{-1}(t)| = |\beta_n - \alpha_n| \left|\frac{x_N - x_0}{t_N}\, N(t - t_{n-1}) + x_0\right|$$

Considerando $t_N = Nh$ con el fin de simplificar los cálculos, queda

$$\begin{aligned} &= |\beta_n - \alpha_n| \left|\frac{x_N - x_0}{h}\,(t - t_{n-1}) + x_0\right| \\ &= |\beta_n - \alpha_n| \left|\frac{x_N(t - t_{n-1}) + x_0(h - (t - t_{n-1}))}{h}\right| \\ &= |\beta_n - \alpha_n| \left|\frac{x_N(t - t_{n-1}) + x_0(t_n - t)}{h}\right| \leq |\alpha - \beta|_\infty \, \text{máx}\{|x_0|, |x_N|\}. \end{aligned}$$

De este modo, aplicando las acotaciones de {3.1} y {3.2} se puede concluir que

$$|T_\alpha f(t) - T_\beta f(t)| \leq |\alpha - \beta|_\infty \, (\|f\|_\infty + \text{máx}\{|x_0|, |x_N|\}), \tag{3.3}$$

de donde se deduce el resultado. □

Proposición 3.3. *Dadas f_α y f_β dos FIF afines con factores de escala vertical $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ y $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$, se cumple*

$$\|f_\alpha - f_\beta\|_\infty \leq \frac{1}{1 - |\alpha|_\infty} \, |\alpha - \beta|_\infty \, (\|f_\beta\|_\infty + \text{máx}\{|x_0|, |x_N|\}).$$

Demostración.

$$\begin{aligned} \|f_\alpha - f_\beta\|_\infty &= \|T_\alpha f_\alpha - T_\alpha f_\beta + T_\alpha f_\beta - T_\beta f_\beta\|_\infty \\ &\leq \|T_\alpha f_\alpha - T_\alpha f_\beta\|_\infty + \|T_\alpha f_\beta - T_\beta f_\beta\|_\infty . \end{aligned}$$

Aplicando las proposiciones 3.1 y 3.2 se tiene

$$\|f_\alpha - f_\beta\|_\infty \leq |\alpha|_\infty \, \|f_\alpha - f_\beta\|_\infty + |\alpha - \beta|_\infty \, (\|f_\beta\|_\infty + \text{máx}\{|x_0|, |x_N|\}),$$

de donde se deduce que

$$\|f_\alpha - f_\beta\|_\infty \leq \frac{1}{1 - |\alpha|_\infty} \, |\alpha - \beta|_\infty \, (\|f_\beta\|_\infty + \text{máx}\{|x_0|, |x_N|\}). \tag{3.4}$$

□

Consecuencia. Haciendo $\beta = 0$ en la expresión anterior, tenemos

$$\|f_\alpha - f_0\|_\infty \le \frac{1}{1-|\alpha|_\infty} |\alpha|_\infty (\|f_0\|_\infty + \max\{|x_0|, |x_N|\}).$$

Aquí, f_0 es la función lineal a trozos en $I_n = [t_{n-1}, t_n]$ que interpola los datos, $\|f_0\|_\infty = \max_n\{|x_n|\}$, de modo que

$$\|f_\alpha - f_0\|_\infty \le \frac{2}{1-|\alpha|_\infty} |\alpha|_\infty \max_n\{|x_n|\}. \tag{3.5}$$

Proposición 3.4 (Acotación del error de interpolación)**.** *Sea $x(t)$ una señal real muestreada en intervalos de longitud constante $h = t_n - t_{n-1}$ $\forall n = 1, 2, \dots, N$, y f_α la FIF que aproxima dicha señal, definida mediante la ecuación funcional (1.5) para un sistema de funciones iteradas de tipo afín. Si x es dos veces derivable y $|x''(\xi)| \le C$ $\forall \xi \in I$, se verifica la siguiente desigualdad:*

$$\|x - f_\alpha\|_\infty \le \frac{C}{2}h^2 + \frac{2}{1-|\alpha|_\infty} |\alpha|_\infty \max_n\{|x_n|\}.$$

Demostración. Se pretende acotar el error que se produce al sustituir la función «verdadera» por f_α función de interpolación fractal punto fijo de T_α. Para $t \in I$ se tiene que

$$|x(t) - f_\alpha(t)| \le |x(t) - f_0(t)| + |f_0(t) - f_\alpha(t)|, \tag{3.6}$$

siendo f_0 la función lineal a trozos en los intervalos $[t_{n-1}, t_n]$, continua y pasando por los puntos de interpolación.

Se procede a acotar el primer sumando de la expresión (3.6) si $t \in I_n$. Si x es dos veces derivable, por el teorema de interpolación de Lagrange (ver [6]) existe $\xi \in I_n$ tal que, para $t \in I_n$, se tiene

$$x(t) = x(t_{n-1})\frac{t - t_n}{t_{n-1} - t_n} + x(t_n)\frac{t - t_{n-1}}{t_n - t_{n-1}} + \frac{x''(\xi)}{2}(t - t_{n-1})(t - t_n),$$

con lo que

$$x(t) = f_0(t) + \frac{x''(\xi)}{2}(t - t_{n-1})(t - t_n).$$

Si, además, la derivada segunda está acotada por C_n en I_n se tiene, para $t \in I_n$,

$$|x(t) - f_0(t)| \le \frac{C_n}{2} |(t - t_{n-1})(t - t_n)| \le \frac{C_n}{2}h^2. \tag{3.7}$$

El segundo sumando de (3.6) está acotado en (3.5). Aplicando conjuntamente las dos desigualdades se obtiene:

$$\|x - f_\alpha\|_\infty \le \frac{C}{2}h^2 + \frac{2}{1-|\alpha|_\infty} |\alpha|_\infty \max_n\{|x_n|\} = K, \tag{3.8}$$

siendo $C \ge 0$ tal que $|x''(\xi)| \le C$ $\forall \xi \in I$. □

Proposición 3.5 (Acotación del error de la cuadratura de la energía)**.** *Sea*

$$m_{0_{\text{exac}}} = \frac{1}{T}\int_0^{t_N} (x(t))^2\, dt$$

la energía correspondiente a una señal real $x(t)$ en el intervalo $I = [0, t_N]$, y

$$m_{0_{\text{aprox}}} = \frac{1}{T} \int_0^{t_N} (f_\alpha(t))^2 \, dt$$

la energía de la función de interpolación fractal afín correspondiente a la partición $0 < t_1 < \cdots < t_N$. Entonces,

$$|E| = |m_{0_{\text{aprox}}} - m_{0_{\text{exac}}}| \leq K^2 + 2L_0 K,$$

si x es dos veces derivable, $|x''(\xi)| \leq C \ \forall \xi \in I$, siendo $L_0 = \|x\|_\infty$ y K la constante definida en la proposición 3.4 en (3.8).

Demostración. Una vez acotada la diferencia entre la señal original y la FIF que la interpola se pretende dar una aproximación del error cometido al calcular la energía de la señal usando esta función de interpolación fractal.

Se denota $T = t_N - t_0 = t_N$ (ya que $t_0 = 0$). Así,

$$|E| = |m_{0_{\text{aprox}}} - m_{0_{\text{exac}}}| = \frac{1}{T} \left| \int_0^{t_N} (f_\alpha(t))^2 \, dt - \int_0^{t_N} (x(t))^2 \, dt \right|$$

$$= \frac{1}{T} \left| \int_0^{t_N} [(f_\alpha(t))^2 - (x(t))^2] \, dt \right|$$

$$= \frac{1}{T} \left| \int_{t_0}^{t_N} [(f_\alpha(t))^2 - 2x(t) f_\alpha(t) + (x(t))^2 + 2x(t) f_\alpha(t) - 2(x(t))^2] \, dt \right|$$

$$= \frac{1}{T} \left| \int_0^{t_N} (f_\alpha(t) - x(t))^2 \, dt + 2 \int_0^{t_N} x(t)(f_\alpha(t) - x(t)) \, dt \right|$$

$$\leq \frac{1}{T} \int_0^{t_N} |f_\alpha(t) - x(t)|^2 \, dt + \frac{2}{T} \int_0^{t_N} |x(t)| \, |f_\alpha(t) - x(t)| \, dt.$$

Aplicando la acotación de la proposición anterior se obtiene el error en el cálculo de la energía de la señal:

$$|E| \leq \frac{1}{T} K^2 T + \frac{2}{T} L_0 K T = K^2 + 2L_0 K, \tag{3.9}$$

siendo L_0 y K las constantes descritas en el enunciado. □

Referencias

[1] M. Barnsley, *Fractals everywhere*, Academic Press, 1988.

[2] M. F. Barnsley y A. N. Harrington, The calculus of fractal interpolation functions, *J. Approx. Theory* **57** (1989), 14–34.

[3] G. A. Edgar, *Measure, topology, and fractal geometry*, Springer-Verlag, Nueva York, 1990.

[4] D. P. Hardin, B. Kessler y P. R. Massopust, Multiresolution analyses based on fractal functions, *J. Approx. Theory* **71** (1992), 104–120.

[5] H. P. Hsu, *Análisis de Fourier*, Addison-Wesley Iberoamericana, Wilmington, 1987.

[6] J. Stoer y R. Bulirsch, *Introduction to numerical analysis*, Springer-Verlag, Nueva York, 1980.

Departamento de Matemática Aplicada, Centro Politécnico Superior, Universidad de Zaragoza, Calle María de Luna 3, 50015 Zaragoza, Spain
Correo electrónico: manavas@posta.unizar.es

Departamento de Matemáticas, Universidad de Zaragoza, Edificio de Matemáticas, Ciudad Universitaria s/n, 50009 Zaragoza, Spain
Correo electrónico: msebasti@posta.unizar.es