MARGARITA MATHEMATICA EN MEMORIA DE
JOSÉ JAVIER (CHICHO) GUADALUPE HERNÁNDEZ
(Luis Español y Juan L. Varona, editores),
Servicio de Publicaciones, Universidad de La Rioja,
Logroño, Spain, 2001.

LA TEORÍA ASINTÓTICA DE SZEGŐ PARA P.O. DE SOBOLEV SOBRE EL CÍRCULO UNIDAD

ELÍAS BERRIOCHOA Y ALICIA CACHAFEIRO

En homenaje al Profesor José Javier Guadalupe Hernández, «Chicho»

Abstract. The aim of this paper is to study of asymptotic behavior of the orthogonal polynomials with respect to a Sobolev inner product of the following type

$$\langle f(z), g(z)\rangle_s = \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\overline{g(e^{i\theta})}\, d\mu_0(\theta) + \int_0^{2\pi} f'(e^{i\theta})\overline{g'(e^{i\theta})}\, d\mu_1(\theta),$$

$z = e^{i\theta}$, where μ_0 and μ_1 are finite positive Borel measures on $[0, 2\pi]$.

We determine necessary and sufficient conditions on measures μ_0 and μ_1 in order that the Szegő's asymptotic theorem holds true outside the open unit disk. Moreover, we also study when the asymptotic formula can be extended up to the boundary and inside the open unit disk.

Finally, we generalize, in a natural way, the preceding results for the case when p derivatives, with $p > 1$, appear in the inner product.

1. Introducción

La teoría de Polinomios Ortogonales (P.O.) con respecto a productos escalares de Sobolev sobre la circunferencia unidad se ha desarrollado en los últimos años, constituyendo una elegante teoría, que tiene grandes analogías con la teoría estándar.

En el presente trabajo presentamos dos resultados que constituyen el núcleo central de la teoría pues en ellos se establecen las condiciones necesarias y suficientes para poder garantizar la asintótica fuerte de los P.O. en subconjuntos compactos del exterior del disco unidad, así como para que sea válida su extensión a la frontera y al interior del disco unidad.

Para ello se consideran μ_0 y μ_1 dos medidas de Borel finitas y positivas sobre $[0, 2\pi]$ y el producto escalar de Sobolev definido por

$$(1)\quad \langle f(z), g(z)\rangle_s = \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\overline{g(e^{i\theta})}\, d\mu_0(\theta) + \int_0^{2\pi} f'(e^{i\theta})\overline{g'(e^{i\theta})}\, d\mu_1(\theta), \quad z = e^{i\theta}.$$

2000 *Mathematics Subject Classification.* 33C47, 42C05.

Key words and phrases. Orthogonal polynomials, Sobolev inner products, Szegő's theory, Carathéodory function.

Esta investigación se ha realizado en el marco del proyecto de investigación BFM2000-0015 del Ministerio de Ciencia y Tecnología.

Cuando ambas medidas verifican la condición de Szegő se ha probado en [11] que los P.O. de Sobolev mónicos $\{\tilde{\phi}_n\}$ tienen el siguiente comportamiento asintótico:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\tilde{\phi}_n(z)}{z^n} = \frac{\overline{\Pi_1}(\frac{1}{z})}{\overline{\Pi_1(0)}} \text{ uniformemente en subconjuntos compactos de } |z| > 1,$$

donde $\Pi_1(z)$ es la función de Szegő de la segunda medida μ_1.

Es claro que la condición impuesta a la segunda medida es necesaria, pero esta misma condición no es necesaria para la primera medida. De hecho en [1] se ha obtenido el comportamiento asintótico sin condiciones para la primera medida, aunque exigiendo condiciones más fuertes para la segunda medida.

En el presente trabajo probamos en primer lugar el análogo del teorema de Szegő de asintótica fuerte.

Teorema 1. *Si μ_0 es una medida de Borel finita y positiva y μ_1 es una medida verificando la condición de Szegő, entonces la sucesión de P.O. mónicos con respecto a (1), $\{\tilde{\phi}_n\}$, tiene el siguiente comportamiento asintótico:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\tilde{\phi}_n(z)}{z^n} = \frac{\overline{\Pi_1}(\frac{1}{z})}{\overline{\Pi_1(0)}}$$

uniformemente en subconjuntos K de $\mathbb{C}$ tales que $\inf_{z\in K} |z| > 1$, donde $\Pi_1(z)$ es la función de Szegő de la segunda medida μ_1.

En la segunda parte del trabajo estudiamos el comportamiento asintótico en la frontera y el interior del disco unidad, probando el siguiente resultado.

Teorema 2. *Si μ_0 es una medida de Borel finita y positiva cuya función de Caratheódory tiene extensión analítica a $|z| < \frac{1}{r_0}$ con $r_0 < 1$ y μ_1 es una medida de la clase Szegő cuya función de Szegő, $\Pi_1(z)$, tiene extensión analítica a $|z| < \frac{1}{r_1}$ con $r_1 < 1$, entonces la sucesión de P.O. mónicos con respecto a (1), $\{\tilde{\phi}_n\}$, verifica*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\tilde{\phi}_n(z)}{z^n} = \frac{\overline{\Pi_1}(\frac{1}{z})}{\overline{\Pi_1(0)}}$$

uniformemente en subconjuntos K de $\mathbb{C}$ tales que $\inf_{z\in K} |z| > \max\{r_0, r_1\}$, donde $\Pi_1(z)$ es la función de Szegő de la segunda medida μ_1.

Finalmente se presenta la generalización de los resultados anteriores al caso de productos escalares de Sobolev que involucren a p derivadas.

2. Comportamiento asintótico en el exterior del disco unidad

2.1. Propiedades de los P.O. con respecto a μ_1 y de sus primitivas con desplazamiento. Consideraremos a lo largo de esta sección dos medidas de Borel finitas y positivas μ_0 y μ_1 y supondremos que μ_1 es una medida de la clase Szegő con función de Szegő $\Pi_1(z)$, que es analítica en el interior del disco unidad D.

Recordemos que la medida μ_1 pertenece a la clase Szegő si $\log \mu_1' \in L^1[0, 2\pi]$ y que la función de Szegő $\Pi_1(z)$ de la medida μ_1 está definida por

$$\Pi_1(z) = \exp\Big(-\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z} \log\left(\mu_1'(\theta)\right) d\theta\Big) \quad \text{para} \quad |z| < 1.$$

Denotaremos por $\{\phi_n\}$ la sucesión de polinomios ortogonales mónicos con respecto a μ_1. Como μ_1 es de la clase Szegő se tiene entonces que $\lim\limits_{n\to\infty} \|\phi_n\|^2_{\mu_1} = m(\mu_1) > 0$, donde $\|\phi_n\|^2_{\mu_1} = \int_0^{2\pi} |\phi_n(e^{i\theta})|^2\, d\mu_1(\theta)$ (véase [10]).

Sea M un número natural fijo y supongamos que $\phi_M(z) = \sum\limits_{k=0}^{M} a_{k,M} z^k$ con $a_{M,M} = 1$. Para cada $n \geq M+1$ definimos la primitiva con desplazamiento de grado n como el polinomio $\psi_{n,M}(z) = n \int z^{n-M-1}\phi_M(z)dz$, esto es,

$$(2) \quad \begin{aligned}\psi_{n,M}(z) = z^n + \frac{n}{n-1} a_{M-1,M} z^{n-1} + \dots \\ + \frac{n}{n-M+1} a_{1,M} z^{n-M+1} + \frac{n}{n-M} a_{0,M} z^{n-M}.\end{aligned}$$

En estas condiciones los polinomios $\{\psi_{n,M}\}_{n\geq M+1}$ verifican las siguientes propiedades:

Proposición 1. *Se verifica*

(i) $\|\psi'_{n,M}\|^2_{\mu_1} = n^2 \|\phi_M\|^2_{\mu_1}$.

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \|\psi_{n,M}\|^2_{\mu_0} = \|\phi_M\|^2_{\mu_0}$.

(iii) $\lim\limits_{M\to\infty} \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\psi_{n,M}(z)}{z^n} = \dfrac{\overline{\Pi_1}(\frac{1}{z})}{\overline{\Pi_1(0)}}$ *uniformemente en subconjuntos compactos de* $|z| > 1$.

Demostración. (i) De acuerdo con la definición $\psi'_{n,M}(z) = n z^{n-M-1}\phi_M(z)$. Por tanto, $\|\psi'_{n,M}\|^2_{\mu_1} = n^2 \|\phi_M\|^2_{\mu_1}$.

(ii) Teniendo en cuenta (2),

$$\begin{aligned} &\|\psi_{n,M}\|^2_{\mu_0} \\ &= \Big\| z^{n-M}\big(z^M + \frac{n}{n-1} a_{M-1,M} z^{M-1} + \dots + \frac{n}{n-M+1} a_{1,M} z + \frac{n}{n-M} a_{0,M}\big)\Big\|^2_{\mu_0} \\ &= \Big\| z^M + \frac{n}{n-1} a_{M-1,M} z^{M-1} + \dots + \frac{n}{n-M+1} a_{1,M} z + \frac{n}{n-M} a_{0,M}\Big\|^2_{\mu_0}.\end{aligned}$$

Por tanto, $\lim\limits_{n\to\infty} \|\psi_{n,M}\|^2_{\mu_0} = \|\phi_M\|^2_{\mu_0}$.

(iii) Sea K un subconjunto compacto de $|z| > 1$ y sea $r = \min\limits_{z\in K} |z|$. Dado que μ_1 es una medida de la clase Szegő, se tiene que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\phi_n(z)}{z^n} = \dfrac{\overline{\Pi_1}(\frac{1}{z})}{\overline{\Pi_1(0)}}$ uniformemente en subconjuntos compactos de $|z| > 1$ (véase [10]). Por tanto, dado $\epsilon > 0$ existe un número natural M_0 tal que para todo $m \geq M_0$ y para todo $z \in K$ se verifica que $\Big|\dfrac{\phi_m(z)}{z^m} - \dfrac{\overline{\Pi_1}(\frac{1}{z})}{\overline{\Pi_1(0)}}\Big| < \dfrac{\epsilon}{2}$.

Así si tomamos $M \geq M_0$ se tiene

$$\begin{aligned} \Big|\frac{\psi_{n,M}(z)}{z^n} - \frac{\phi_M(z)}{z^M}\Big| &= \Big|\frac{1}{n-1}a_{M-1,M}\frac{1}{z} + \cdots + \frac{M}{n-M}a_{0,M}\frac{1}{z^M}\Big| \\ &\leq \frac{1}{n-1}|a_{M-1,M}|\,\frac{1}{r} + \cdots + \frac{M}{n-M}|a_{0,M}|\,\frac{1}{r^M} \\ < \frac{1}{n-1}|a_{M-1,M}| + \cdots + \frac{M}{n-M}|a_{0,M}| &< \frac{M^2}{n-M}\,\text{máx}\Big\{|a_{M-1,M}|, \ldots, |a_{0,M}|\Big\}. \end{aligned}$$

Por tanto, existe un número natural N tal que, para $n \geq N$, $\Big|\dfrac{\psi_{n,M}(z)}{z^n} - \dfrac{\phi_M(z)}{z^M}\Big| < \dfrac{\epsilon}{2}$ para todo $z \in K$. Así, el resultado queda probado.

Obsérvese que el resultado es válido para subconjuntos K del plano complejo tales que $\inf_{z\in K} |z| > 1$. □

2.2. Relación de recurrencia para los polinomios ortogonales de Sobolev. Sea $\{\tilde{\phi}_n\}$ la sucesión de polinomios ortogonales mónicos con respecto al producto escalar de Sobolev (1).

Proposición 2. *Se verifica*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\|\tilde{\phi}_n\|_s^2}{n^2} = m(\mu_1).$$

Demostración. Aplicando la propiedad minimal de la norma de los polinomios ortogonales obtenemos:

$$n^2 m(\mu_1) \leq n^2\|\phi_{n-1}\|_{\mu_1}^2 \leq \|\tilde{\phi}_n'\|_{\mu_1}^2 \leq \|\tilde{\phi}_n\|_s^2 \leq \|\psi_{n,M}\|_s^2 = \|\psi_{n,M}\|_{\mu_0}^2 + n^2\|\phi_M\|_{\mu_1}^2.$$

Dividiendo por n^2,

$$m(\mu_1) \leq \frac{\|\tilde{\phi}_n\|_s^2}{n^2} \leq \frac{\|\psi_{n,M}\|_{\mu_0}^2}{n^2} + \|\phi_M\|_{\mu_1}^2.$$

Teniendo en cuenta la Proposición 1 (ii), si tomamos límites cuando n tiende a infinito obtenemos, para cada M fijo,

$$m(\mu_1) \leq \underline{\lim}\, \frac{\|\tilde{\phi}_n\|_s^2}{n^2} \leq \overline{\lim}\, \frac{\|\tilde{\phi}_n\|_s^2}{n^2} \leq \|\phi_M\|_{\mu_1}^2.$$

Por último, tomando límites cuando M tiende a infinito se tiene el resultado. □

A continuación estudiamos los coeficientes de la siguiente relación de recurrencia que satisfacen los polinomios ortogonales de Sobolev. Si M es un número natural fijo y $n \geq M+1$, entonces $\tilde{\phi}_n(z)$ puede ser representado de la siguiente forma:

$$\tilde{\phi}_n(z) = \psi_{n,M}(z) + \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{n,k,M}\tilde{\phi}_k(z). \tag{3}$$

Proposición 3. *Sean $\{\alpha_{n,k,M}\}$ los coeficientes de la relación de recurrencia (3). Entonces, dado $\epsilon > 0$, existe un número natural M_0 tal que, para cada $M \geq M_0$, existe un número natural N_M tal que, para todo $n \geq N_M$,*

$$(n-1)^2|\alpha_{n,n-1,M}|^2 + \cdots + (1)^2|\alpha_{n,1,M}|^2 + |\alpha_{n,0,M}|^2 < \epsilon n^2. \tag{4}$$

Demostración. Denotamos $c_n(\mu_0)$ los momentos de la medida μ_0, esto es, $c_n(\mu_0) = \langle z^n, 1\rangle_{\mu_0}$. Entonces, si tomamos normas Sobolev en (3) y aplicamos que $n^2 m(\mu_1) \leq \|\tilde{\phi}_n\|_s^2$, $\forall n \geq 1$, y $\|\tilde{\phi}_0\|_s^2 = c_0(\mu_0)$, tenemos:

$$K\Big[(n-1)^2|\alpha_{n,n-1,M}|^2 + \cdots + (1)^2|\alpha_{n,1,M}|^2 + |\alpha_{n,0,M}|^2\Big] \leq \|\psi_{n,M}\|_s^2 - \|\tilde{\phi}_n\|_s^2, \tag{5}$$

con $K = \text{mín}\{m(\mu_1), c_0(\mu_0)\}$.

Por otra parte, téngase en cuenta que $\|\psi_{n,M}\|_s^2 = \|\psi_{n,M}\|_{\mu_0}^2 + n^2\|\phi_M\|_{\mu_1}^2$,

$$\lim_{M\to\infty} \|\phi_M\|_{\mu_1}^2 = m(\mu_1) \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} \|\psi_{n,M}\|_{\mu_0}^2 = \|\phi_M\|_{\mu_0}^2.$$

Entonces, dado $\epsilon > 0$ y $\epsilon' = \frac{K\epsilon}{2} > 0$ existe un número natural M_0 tal que, para $M \geq M_0$, $\|\phi_M\|_{\mu_1}^2 < m(\mu_1) + \epsilon'$. Más aun, para cada $M \geq M_0$ existe un número natural n_M tal que, para $n \geq n_M$, $\|\psi_{n,M}\|_{\mu_0}^2 < \|\phi_M\|_{\mu_0}^2 + \epsilon'$. Se sigue entonces, de (5),

$$\begin{aligned} K\Big[(n-1)^2|\alpha_{n,n-1,M}|^2 + \cdots + (1)^2|\alpha_{n,1,M}|^2 + |\alpha_{n,0,M}|^2\Big] \\ < \|\phi_M\|_{\mu_0}^2 + \epsilon' + n^2\Big(m(\mu_1) + \epsilon'\Big) - n^2\Big(m(\mu_1)\Big) \\ = \|\phi_M\|_{\mu_0}^2 + \epsilon' + n^2\epsilon' \quad \text{para} \ \ M \geq M_0 \text{ y } n \geq n_M. \end{aligned}$$

Por tanto, si tomamos n suficientemente grande, esto es, $n \geq N_M$, entonces

$$\|\phi_M\|_{\mu_0}^2 + \epsilon' < \epsilon' n^2,$$

de donde se sigue (4). □

Corolario 1. *Dado $\epsilon > 0$ existe un número natural M_0 tal que para cada $M \geq M_0$ existe un número natural N_M tal que para todo $n \geq N_M$ y para todo $R > 1$ se satisfacen las siguientes desigualdades:*

$$\sum_{k=E[\frac{n}{2}]}^{n-1} \frac{|\alpha_{n,k,M}|}{R^{n-k}} < \frac{4\sqrt{\epsilon}}{\sqrt{R^2-1}}\,, \tag{6}$$

$$\sum_{k=0}^{E[\frac{n}{2}]-1} \frac{|\alpha_{n,k,M}|}{R^{n-k}} < \frac{n\sqrt{\epsilon}}{\sqrt{R^2-1}R^{\frac{n}{2}}}\,. \tag{7}$$

(Denotamos $E[\frac{n}{2}]$ a la parte entera de $\frac{n}{2}$.)

Demostración. Comencemos con (6). Utilizando (4) y la desigualdad de Cauchy-Schwarz se tiene

$$\begin{aligned} \sum_{k=E[\frac{n}{2}]}^{n-1} |\alpha_{n,k,M}| k \frac{1}{kR^{n-k}} \leq \Big(\sum_{k=E[\frac{n}{2}]}^{n-1} |\alpha_{n,k,M}|^2 k^2\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{k=E[\frac{n}{2}]}^{n-1} \frac{1}{k^2R^{2(n-k)}}\Big)^{\frac{1}{2}} \\ < \sqrt{\epsilon} n \Big(\frac{1}{(E[\frac{n}{2}])^2} \sum_{k=E[\frac{n}{2}]}^{n-1} \frac{1}{R^{2(n-k)}}\Big)^{\frac{1}{2}} < \sqrt{\epsilon} n \frac{1}{E[\frac{n}{2}]} \frac{1}{\sqrt{R^2-1}} < \frac{4\sqrt{\epsilon}}{\sqrt{R^2-1}}. \end{aligned}$$

Para probar (7), procediendo al igual que en el apartado anterior,

$$\sum_{k=0}^{E[\frac{n}{2}]-1} \frac{|\alpha_{n,k,M}|}{R^{n-k}} = |\alpha_{n,0,M}|\frac{1}{R^n} + \sum_{k=1}^{E[\frac{n}{2}]-1} |\alpha_{n,k,M}|k\frac{1}{kR^{n-k}}$$

$$\leq \Big(|\alpha_{n,0,M}|^2 + \sum_{k=1}^{E[\frac{n}{2}]-1} |\alpha_{n,k,M}|^2k^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\frac{1}{R^{2n}} + \sum_{k=1}^{E[\frac{n}{2}]-1} \frac{1}{R^{2(n-k)}k^2}\Big)^{\frac{1}{2}}$$

$$< \frac{\sqrt{\epsilon}n}{\sqrt{R^2-1}R^{n-E[\frac{n}{2}]}} \leq \frac{\sqrt{\epsilon}n}{\sqrt{R^2-1}R^{\frac{n}{2}}}.$$

□

Corolario 2. *Dado $R > 1$, existe un número natural M_0 tal que para cada $M \geq M_0$ existe un número natural N'_M tal que para cada $n \geq N'_M$ se satisfacen las siguientes desigualdades:*

$$\sum_{k=E[\frac{n}{2}]}^{n-1} \frac{|\alpha_{n,k,M}|}{R^{n-k}} < \frac{1}{3} \qquad y \qquad \sum_{k=0}^{E[\frac{n}{2}]-1} \frac{|\alpha_{n,k,M}|}{R^{n-k}} < \frac{1}{3}.$$

Demostración. La primera es una consecuencia inmediata de (6) tomando ϵ tal que $\frac{4}{\sqrt{R^2-1}}\sqrt{\epsilon} < \frac{1}{3}$.

Y la segunda se sigue de (7) tomando n suficientemente grande, esto es, $n \geq N'_M$ y tal que $\frac{\sqrt{\epsilon}n}{\sqrt{R^2-1}R^{\frac{n}{2}}} < \frac{1}{3}$. □

2.3. Asintótica fuerte.

Proposición 4. *La sucesión $\left\{\frac{\tilde{\phi}_n(z)}{z^n}\right\}_{n\geq 1}$ está uniformemente acotada en subconjuntos K de $\mathbb{C}$ tales que $\inf_{z\in K} |z| > 1$.*

Demostración. Sea K un subconjunto tal que $\inf_{z\in K} |z| > 1$, sea $r = \inf_{z\in K} |z|$ y sea R tal que $1 < R < r$. Elijamos M y n como en el Corolario 2, esto es, $M \geq M_0$ y $n \geq N'_M$.

Para este $M \geq M_0$ sea $K_0 = \max_{z\in K} \max_{n\geq M+1}\left\{\left|\frac{\psi_{n,M}(z)}{z^n}\right|\right\}$ y para un $n_0 \geq N'_M$ tal que $n_0 \geq M+1$, tomemos $K_1 = \max_{z\in K} \max_{k=0,\ldots,n_0-1}\left\{\left|\frac{\tilde{\phi}_k(z)}{z^k}\right|\right\}$.

A partir de la relación de recurrencia (3), y teniendo en cuenta el Corolario 2, se tiene

$$\left|\frac{\tilde{\phi}_{n_0}(z)}{z^{n_0}}\right| \leq \left|\frac{\psi_{n_0,M}(z)}{z^{n_0}}\right| + \sum_{k=0}^{E[\frac{n_0}{2}]-1}\left|\frac{\alpha_{n_0,k,M}}{z^{n_0-k}}\frac{\tilde{\phi}_k(z)}{z^k}\right| + \sum_{k=E[\frac{n_0}{2}]}^{n_0-1}\left|\frac{\alpha_{n_0,k,M}}{z^{n_0-k}}\frac{\tilde{\phi}_k(z)}{z^k}\right|$$

$$\leq K_0 + \sum_{k=0}^{E[\frac{n_0}{2}]-1}\frac{|\alpha_{n_0,k,M}|}{R^{n_0-k}}K_1 + \sum_{k=E[\frac{n_0}{2}]}^{n_0-1}\frac{|\alpha_{n_0,k,M}|}{R^{n_0-k}}K_1 < K_0 + \frac{2}{3}K_1.$$

Si tomamos $K_2 = \max\{3K_0, 3K_1\}$ entonces $K_0 + \frac{2}{3}K_1 \leq \frac{K_2}{3} + \frac{2}{3}\frac{K_2}{3} < K_2$.

Procediendo del mismo modo,

$$\left|\frac{\tilde{\phi}_{n_0+1}(z)}{z^{n_0+1}}\right| \leq K_0 + \sum_{k=0}^{E[\frac{n_0+1}{2}]-1} \frac{|\alpha_{n_0+1,k,M}|}{R^{n_0+1-k}} K_2 + \sum_{k=E[\frac{n_0+1}{2}]}^{n_0} \frac{|\alpha_{n_0+1,k,M}|}{R^{n_0+1-k}} K_2.$$

Así

$$\sum_{k=0}^{E[\frac{n_0+1}{2}]-1} \frac{|\alpha_{n_0+1,k,M}|}{R^{n_0+1-k}} < \frac{\sqrt{\epsilon}(n_0+1)}{\sqrt{R^2-1}} \frac{1}{R^{\frac{n_0+1}{2}}} < \frac{1}{3},$$

y

$$\sum_{k=E[\frac{n_0+1}{2}]}^{n_0} \frac{|\alpha_{n_0+1,k,M}|}{R^{n_0+1-k}} < \frac{1}{3};$$

por tanto,

$$\left|\frac{\tilde{\phi}_{n_0+1}(z)}{z^{n_0+1}}\right| < K_0 + \frac{1}{3}K_2 + \frac{1}{3}K_2 \leq K_2.$$

Por inducción obtenemos que $\left|\frac{\tilde{\phi}_{n_0+p}(z)}{z^{n_0+p}}\right| < K_2 \;\; \forall p \geq 1$ y, en definitiva, el resultado queda probado, esto es, existe un número natural K_3 tal que $\left|\frac{\tilde{\phi}_n(z)}{z^n}\right| < K_3$ para todo $z \in K$ y $n \geq 0$. □

Estamos ya en condiciones de demostrar el teorema central de esta sección.

Teorema 1. *Si μ_0 es una medida de Borel finita y positiva y μ_1 es una medida verificando la condición de Szegő, entonces la sucesión de P.O. mónicos con respecto a (1), $\{\tilde{\phi}_n\}$, verifica*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\tilde{\phi}_n(z)}{z^n} = \frac{\overline{\Pi_1}(\frac{1}{z})}{\overline{\Pi_1(0)}}$$

uniformemente en subconjuntos $K \subset \mathbb{C}$ tales que $\inf_{z\in K} |z| > 1$.

Demostración. Teniendo en cuenta la Proposición 1 iii), es suficiente probar que

$$\lim_{M\to\infty} \lim_{n\to\infty} \Big(\frac{\psi_{n,M}(z)}{z^n} - \frac{\tilde{\phi}_n(z)}{z^n}\Big) = 0$$

uniformemente en subconjuntos $K \subset \mathbb{C}$ tales que $\inf_{z\in K} |z| > 1$.

Sea K un subconjunto de $\mathbb{C}$ tal que $r = \inf_{z\in K} |z| > 1$ y elijamos R tal que $1 < R < r$. Para $\epsilon > 0$ tomemos $\epsilon_1 > 0$ tal que $\frac{5K_3}{\sqrt{R^2-1}}\sqrt{\epsilon_1} < \epsilon$.

Aplicando el Corolario 1, tenemos que para $\epsilon_1 > 0$ existe M_0 tal que para cada $M \geq M_0$ existe N_M tal que para cada $n \geq N_M$ y para $R > 1$ se verifican (6) y (7). Si se tiene en cuenta la Proposición 4 se obtiene

$$\left|\frac{\psi_{n,M}(z)}{z^n} - \frac{\tilde{\phi}_n(z)}{z^n}\right| = \left|\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\alpha_{n,k,M}}{z^{n-k}} \frac{\tilde{\phi}_k(z)}{z^k}\right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|\alpha_{n,k,M}|}{R^{n-k}} \left|\frac{\tilde{\phi}_k(z)}{z^k}\right|$$

$$< K_3 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|\alpha_{n,k,M}|}{R^{n-k}} < K_3 \Big(\frac{4}{\sqrt{R^2-1}} \sqrt{\epsilon_1} + \frac{n\sqrt{\epsilon_1}}{\sqrt{R^2-1}R^{\frac{n}{2}}} \Big)$$
$$= \frac{K_3}{\sqrt{R^2-1}} \Big(4 + \frac{n}{R^{\frac{n}{2}}} \Big) \sqrt{\epsilon_1}\,.$$

Por tanto, $\left| \frac{\psi_{n,M}(z)}{z^n} - \frac{\tilde{\phi}_n(z)}{z^n} \right| < \epsilon$ para n suficientemente grande, lo que demuestra la tesis del teorema. $\square$

Corolario 3. *Para cada $\epsilon > 0$ y n suficientemente grande, las raíces de $\tilde{\phi}_n(z)$ están en $|z| < 1 + \epsilon$.*

Demostración. Es una consecuencia inmediata del Teorema 1 y del Teorema de Hurwitz (véase [13]). $\square$

Observación 1. *El Corolario anterior no puede ser mejorado como ilustra el siguiente ejemplo. Consideremos las siguientes medidas: $\mu_0 = \delta_1$, donde δ_1 es la medida de Dirac con punto de masa en 1 y μ_1 una modificada polinómica de la medida de Lebesgue, esto es, $d\mu_1(\theta) = |e^{i\theta} - 1|^2 d\theta$. Es fácil probar que el polinomio ortogonal mónico de Sobolev de grado n, $\tilde{\phi}_n(z)$, viene dado por $\tilde{\phi}_n(z) = \sum_{k=1}^{n} z^k - n$, y que tiene, por lo menos, una raíz (de hecho $n-1$ raíces) en el exterior del disco unidad cerrado.*

2.4. Análisis de la técnica utilizada. En esta sección hemos trabajado según el siguiente esquema:

1. Formular una hipótesis sobre el comportamiento asintótico de $\frac{\tilde{\phi}_n(z)}{z^n}$ en subconjuntos compactos de una región del plano complejo (véanse [1], [2], [3], [4], [5], [9] y [11]).
2. Representar $\tilde{\phi}_n(z)$ adecuadamente con respecto a nuestra hipótesis de trabajo, esto es $\tilde{\phi}_n(z) = \psi_{n,M}(z) + \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{n,k,M} \tilde{\phi}_k(z)$, donde $\psi_{n,M}(z)$ es un polinomio mónico de grado n, dependiente también de M, y cuya asintótica $\frac{\psi_{n,M}(z)}{z^n}$ se parece para M y n suficientemente grandes a la deseada.
3. Buscar propiedades para los coeficientes de la relación de recurrencia, destacando que esta búsqueda de propiedades se hace manipulando en su conjunto los coeficientes.
4. Finalmente utilizar esta representación y las propiedades obtenidas para sus coeficientes, para obtener el teorema de convergencia y sus interesantes consecuencias.

El camino presentado previamente tiene continuidad en el segundo problema que tratamos en este trabajo. El objetivo es la extensión de la asintótica fuerte a la frontera $\mathbb{T}$ y al interior del disco unidad bajo una condición suficiente. Si bien las ideas anteriores son válidas, es claro que la elección de $\psi_{n,M}(z)$ no es natural. La elección más simple sería aquella en que el cálculo del producto escalar $\langle \psi_{n,M}(z), \tilde{\phi}_n(z) \rangle_s$

sea sencillo, lo que facilitará la obtención de propiedades para los coeficientes la recurrencia de forma individualizada, haciendo posible la demostración del teorema central. Siguiendo estas ideas, la elección adecuada es la primitiva del polinomio ortogonal de grado $n-1$ respecto de μ_1. Si bien este camino creemos que puede desarrollarse para la sección anterior, podemos asegurar que es de complicada exposición y manipulación. Obsérvese que la función $\dfrac{\overline{\Pi_1(\frac{1}{\bar z})}}{\overline{\Pi_1(0)}}$ no está definida sobre $\mathbb{T}$ y no es sencillo acotar adecuadamente la norma μ_0 del polinomio que representa el papel de $\psi_{n,M}(z)$ si utilizamos alguno muy parecido a $z^n\dfrac{\overline{\Pi_1(\frac{1}{\bar z})}}{\overline{\Pi_1(0)}}$. Cuando esta restricción desaparece podemos considerar la convergencia sobre $\mathbb{T}$ y el candidato natural a jugar el papel de $\psi_{n,M}(z)$ es, sin duda, para el grado n, la primitiva normalizada del polinomio ortogonal $(n-1)$-ésimo respecto de μ_1.

3. Comportamiento asintótico en la frontera y el interior del disco unidad

3.1. Propiedades de los polinomios ortogonales con respecto a μ_1 y de sus primitivas. En esta subsección obtendremos resultados relativos a la medida μ_1 que suponemos de Borel, finita, positiva y que cumple la condición de Szegő. Denotaremos por $\{\phi_n\}$ la sucesión de polinomios ortogonales mónicos con respecto a μ_1 sabiendo que $\lim_{n\to\infty} \|\phi_n\|^2_{\mu_1} = m(\mu_1) > 0$ (véase [10]). También asumiremos que la función de Szegő $\dfrac{\Pi_1(z)}{\Pi_1(0)} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \overline{A_k} z^k$ tiene extensión analítica hasta $|z| < \frac{1}{r_1}$ con $r_1 < 1$, lo que es equivalente a $\overline{\lim} \sqrt[n]{|\phi_n(0)|} = r_1$. En esta situación es bien conocido que los coeficientes de los polinomios ortogonales $\{\phi_n\}$ están uniformemente acotados y que $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\phi_n(z)}{z^n} = \dfrac{\overline{\Pi_1(\frac{1}{\bar z})}}{\overline{\Pi_1(0)}}$ uniformemente en subconjuntos K de $\mathbb{C}$ con $\inf_{z\in K} |z| > r_1$ (véase [12]).

A continuación obtenemos un resultado que mejora la acotación uniforme de los coeficientes de los polinomios $\{\phi_n\}$. Por simplicidad escribimos $\phi_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} z^k$ con $a_{n,n} = 1$.

Proposición 5. *Dado R_1 tal que $r_1 < R_1 < 1$, existen $C_1 > 0$ y un número natural N_1 tal que para cualquier $k \geq 0$ y $n \geq N_1$,*

$$|a_{n,k}| < C_1 R_1^{n-k}. \tag{8}$$

Demostración. En [7] se obtiene como consecuencia del comportamiento asintótico de los parámetros de Schur de la medida.

Una demostración alternativa se basa en utilizar la fórmula integral de Cauchy para obtener una representación de los coeficientes de $\phi_n(z)$, tomando una circunferencia de radio menor que R_1, y utilizar la asintótica conocida de $\dfrac{\phi_n(z)}{z^n}$ para obtener la acotación deseada. $\square$

Seguidamente se introducen las primitivas normalizadas de los polinomios ortogonales mediante $\psi_n(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k} a_{n-1,k-1} z^k$. Por simplicidad denotamos $b_{n,k} = \frac{n}{k} a_{n-1,k-1}$ a los coeficientes de estos polinomios, y obtenemos, en primer lugar, un resultado sobre la acotación de estos coeficientes.

Proposición 6.

(i) *Dado R_2 tal que $r_1 < R_2 < 1$, existen $C_2 > 0$ y un número natural N_2 tal que, para cada $k \geq 0$ y $n \geq N_2$,*

$$|b_{n,k}| < C_2 R_2^{n-k}.$$

(ii) *Existe $M_\psi > 0$ tal que $|b_{n,k}| < M_\psi$ para todo $0 \leq k \leq n$.*

Demostración. (i) Sea R_2 tal que $r_1 < R_2 < 1$ y elijamos R_1 con $r_1 < R_1 < R_2$. Entonces existe un número natural M_2 tal que $nR_1^{\frac{n}{2}} < R_2^{\frac{n}{2}}$ para cada $n \geq M_2$.

Por la Proposición 5 sabemos que existen $C_1 > 0$ y un número natural N_1 tal que $|a_{n,k}| < C_1 R_1^{n-k}$ para cualquier $k \geq 0$ y $n \geq N_1$.

Por tanto, si $n - 1 > \max\{N_1, M_2\}$ entonces para $k > \frac{n}{2}$ se verifica

$$|b_{n,k}| = \frac{n}{k} |a_{n-1,k-1}| < 2C_1 R_2^{n-k},$$

y, para $k \leq \frac{n}{2}$, $|b_{n,k}| \leq nC_1 R_1^{n-k} < C_1 R_2^{n-k}$. Si elegimos $C_2 = 2C_1$ y $N_2 = \max\{N_1, M_2\}$, entonces se verifica (i).

(ii) Es una consecuencia inmediata de (i). $\square$

Proposición 7. *Se verifica que $\lim_{n\to\infty} \frac{\psi_n(z)}{z^n} = \frac{\overline{\Pi_1(\frac{1}{\bar{z}})}}{\overline{\Pi_1(0)}}$ uniformemente en subconjuntos K de $\mathbb{C}$ tales que $\inf_{z\in K} |z| > r_1$.*

Demostración. Dado que $\lim_{n\to\infty} \frac{\phi_{n-1}(z)}{z^{n-1}} = \frac{\overline{\Pi_1(\frac{1}{\bar{z}})}}{\overline{\Pi_1(0)}}$ uniformemente en subconjuntos K de $\mathbb{C}$ tales que $\inf_{z\in K} |z| > r_1$, es suficiente probar que $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\psi_n(z)}{z^n} - \frac{\phi_{n-1}(z)}{z^{n-1}}\right) = 0$ uniformemente en subconjuntos K de $\mathbb{C}$ tales que $\inf_{z\in K} |z| > r_1$.

Consideremos $K \subset \mathbb{C}$ un subconjunto con $r = \inf_{z\in K} |z| > r_1$ y elijamos R_1 tal que $r_1 < R_1 < r$.

Para $z \in K$ se tiene

$$\begin{aligned}\Big|\frac{\psi_n(z)}{z^n} - \frac{\phi_{n-1}(z)}{z^{n-1}}\Big| &= \Big|\sum_{k=1}^{n-1} \frac{n}{k} a_{n-1,k-1} z^{k-n} - \sum_{k=1}^{n-1} a_{n-1,k-1} z^{k-n}\Big| \\ &= \Big|\sum_{k=1}^{n-1} \frac{n-k}{k} a_{n-1,k-1} \frac{1}{z^{n-k}}\Big|.\end{aligned}$$

Aplicando la Proposición 5 sabemos que existen $C_1 > 0$ y un número natural N_1 cumpliendo que $|a_{n,k}| < C_1 R_1^{n-k}$ para cualquier $k \geq 0$ y $n \geq N_1$. Por otra parte, para un $\epsilon > 0$ determinado tomemos M tal que $\dfrac{rC_1}{r-R_1}\Big(\dfrac{R_1}{r}\Big)^{M+1} < \dfrac{\epsilon}{3}$ y elijamos N_2 tal que para $n \geq N_2$ se verifiquen las siguientes desigualdades:

$$\Big[\frac{1}{(n-1)} + \cdots + \frac{M}{n-M}\Big]\frac{M_\phi}{r_1^M} < \frac{\epsilon}{3} \qquad \text{y} \qquad \frac{rC_1}{r-R_1}\Big[n^2\Big(\frac{R_1}{r}\Big)^n\Big]^{\frac{1}{2}} < \frac{\epsilon}{3}.$$

Entonces, para $n > \max\{2(M+2), N_1+1, N_2\}$ y $z \in K$, tenemos

$$\Big|\frac{\psi_n(z)}{z^n} - \frac{\phi_{n-1}(z)}{z^{n-1}}\Big| \leq \Big|\sum_{k=n-M}^{n-1} \frac{n-k}{k} a_{n-1,k-1}\frac{1}{z^{n-k}}\Big|$$
$$+\Big|\sum_{k=E[\frac{n}{2}]+1}^{n-M-1} \frac{n-k}{k} a_{n-1,k-1}\frac{1}{z^{n-k}}\Big| + \Big|\sum_{k=1}^{E[\frac{n}{2}]} \frac{n-k}{k} a_{n-1,k-1}\frac{1}{z^{n-k}}\Big|$$

con

$$\Big|\sum_{k=n-M}^{n-1} \frac{n-k}{k} a_{n-1,k-1}\frac{1}{z^{n-k}}\Big| < \frac{M_\phi}{r_1^M}\Big[\frac{1}{(n-1)} + \cdots + \frac{M}{n-M}\Big] < \frac{\epsilon}{3},$$

$$\Big|\sum_{k=E[\frac{n}{2}]+1}^{n-M-1} \frac{n-k}{k} a_{n-1,k-1}\frac{1}{z^{n-k}}\Big| < \sum_{k=E[\frac{n}{2}]+1}^{n-M-1} \Big|a_{n-1,k-1}\frac{1}{z^{n-k}}\Big|$$
$$< C_1 \sum_{k=E[\frac{n}{2}]+1}^{n-M-1} \Big(\frac{R_1}{r}\Big)^{n-k} < \frac{rC_1}{r-R_1}\Big(\frac{R_1}{r}\Big)^{M+1} < \frac{\epsilon}{3},$$

y

$$\Big|\sum_{k=1}^{E[\frac{n}{2}]} \frac{n-k}{k} a_{n-1,k-1}\frac{1}{z^{n-k}}\Big| < \sum_{k=1}^{E[\frac{n}{2}]} nC_1\Big(\frac{R_1}{|z|}\Big)^{n-k} \leq \sum_{k=1}^{E[\frac{n}{2}]} nC_1\Big(\frac{R_1}{r}\Big)^{n-k}$$
$$< \frac{nC_1 r}{r-R_1}\Big(\frac{R_1}{r}\Big)^{n-E[\frac{n}{2}]} \leq \frac{nC_1 r}{r-R_1}\Big(\frac{R_1}{r}\Big)^{\frac{n}{2}} < \frac{\epsilon}{3}.$$

Así el resultado queda demostrado. □

Corolario 4. *Existe $C_3 > 0$ tal que, para cualquier número natural $n \geq 0$, se verifica $\|\psi_n\|_{\mu_0} \leq C_3$.*

Demostración. Teniendo en cuenta la Proposición 7,

$$\lim_{n\to\infty} \Big\|\frac{\psi_n(z)}{z^n} - \frac{\overline{\Pi_1(\frac{1}{z})}}{\overline{\Pi_1(0)}}\Big\|_{\mu_0}^2 = \lim_{n\to\infty}\int_0^{2\Pi}\Big|\frac{\psi_n(z)}{z^n} - \frac{\overline{\Pi_1(\frac{1}{z})}}{\overline{\Pi_1(0)}}\Big|^2 d\mu_0(\theta) = 0,\ z = e^{i\theta};$$

esto es,

$$\lim_{n\to\infty}\Big\|\psi_n(z) - z^n\frac{\overline{\Pi_1(\frac{1}{z})}}{\overline{\Pi_1(0)}}\Big\|_{\mu_0} = 0.$$

Consecuentemente $\lim\limits_{n\to\infty} \|\psi_n(z)\|_{\mu_0} = \Big\|\dfrac{\overline{\Pi_1(\frac{1}{z})}}{\overline{\Pi_1(0)}}\Big\|_{\mu_0}$. □

3.2. Relación de recurrencia para los P.O. de Sobolev.

Proposición 8. *Sea $\{P_n\}$ la sucesión de polinomios ortogonales mónicos con respecto a μ_0, $\{\phi_n\}$ la sucesión de polinomios ortogonales mónicos con respecto a μ_1 y $\{\tilde{\phi}_n\}$ la sucesión de polinomios ortogonales mónicos con respecto a (1). Entonces*

(i) $\|P_n\|_{\mu_0} \leq \|\tilde{\phi}_n\|_{\mu_0} \leq \|\psi_n\|_{\mu_0}$.

(ii) $0 \leq \|\tilde{\phi}'_n\|^2_{\mu_1} - n^2\|\phi_{n-1}\|^2_{\mu_1} \leq \|\psi_n\|^2_{\mu_0} - \|\tilde{\phi}_n\|^2_{\mu_0}$.

Demostración. Aplicando la propiedad minimal de la norma de los polinomios ortogonales tenemos

$$\begin{aligned}\|P_n\|_{\mu_0} + n^2\|\phi_{n-1}\|^2_{\mu_1} &\leq \|\tilde{\phi}_n\|^2_{\mu_0} + \|\tilde{\phi}'_n\|^2_{\mu_1} = \|\tilde{\phi}_n\|^2_s \leq \|\psi_n\|^2_s \\ &= \|\psi_n\|^2_{\mu_0} + n^2\|\phi_{n-1}\|^2_{\mu_1} \leq \|\psi_n\|^2_{\mu_0} + \|\tilde{\phi}'_n\|^2_{\mu_1},\end{aligned}$$

de donde resultan (i) y (ii). ☐

Proposición 9. *Si representamos*

$$\tilde{\phi}_n(z) = \psi_n(z) + \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{n,k}\tilde{\phi}_k(z) \tag{9}$$

entonces existe $C_4 > 0$ tal que, para cada $n \geq 0$, se verifica que

$$|\alpha_{n,k}| \leq \frac{C_4}{k^2} \quad \textit{para} \quad 1 \leq k \leq n-1 \quad \textit{y} \quad |\alpha_{n,0}| \leq C_4. \tag{10}$$

Demostración. Dado que, para $k < n$,

$$0 = \langle \tilde{\phi}_n, \tilde{\phi}_k\rangle_s = \langle \psi_n, \tilde{\phi}_k\rangle_s + \alpha_{n,k}\|\tilde{\phi}_k\|^2_s = \langle \psi_n, \tilde{\phi}_k\rangle_{\mu_0} + \alpha_{n,k}\|\tilde{\phi}_k\|^2_s,$$

se tiene

$$|\alpha_{n,k}| = \frac{|\langle \psi_n, \tilde{\phi}_k\rangle_{\mu_0}|}{\|\tilde{\phi}_k\|^2_s} \leq \frac{\|\psi_n\|_{\mu_0}\|\tilde{\phi}_k\|_{\mu_0}}{\|\tilde{\phi}_k\|^2_s}.$$

Ahora bien, teniendo en cuenta que $k^2 m(\mu_1) \leq k^2\|\phi_{k-1}\|^2_{\mu_1} \leq \|\tilde{\phi}_k\|^2_s$, y aplicando el Corolario 4 y la Proposición 8 (i), tenemos nuestra tesis. ☐

Seguidamente probamos que los coeficientes de los polinomios ortogonales de Sobolev están uniformemente acotados.

Proposición 10. *Si $\tilde{\phi}_n(z) = \sum_{k=0}^{n} A_{n,k}z^k$ con $A_{n,n} = 1$, entonces existe $M_{\tilde{\phi}} > 0$ tal que para cada $n \geq 0$ y $k \geq 0$,*

$$|A_{n,k}| \leq M_{\tilde{\phi}}.$$

Demostración. Consideremos un número natural $n \geq 0$ fijo, y $J = \max(\{M_\psi\} \cup \{A_{m,k} : 0 \leq k \leq m \leq n\})$.

Dado que $\tilde{\phi}_{n+1}(z) = \psi_{n+1}(z) + \sum_{k=0}^{n} \alpha_{n+1,k}\tilde{\phi}_k(z)$, si utilizamos las relaciones (9) y (10) tenemos

$$|A_{n+1,k}| \leq M_\psi + C_4\Big[\frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{1}{1^2} + 1\Big]J = S.$$

En el siguiente paso $\tilde{\phi}_{n+2}(z) = \psi_{n+2}(z) + \sum_{k=0}^{n+1} \alpha_{n+2,k}\tilde{\phi}_k(z)$, obteniendo

$$|A_{n+2,k}| \leq M_\psi + \frac{C_4 S}{(n+1)^2} + C_4\Big[\frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{1}{1^2} + 1\Big]J = S\Big(1 + \frac{C_4}{(n+1)^2}\Big).$$

Por tanto, procediendo por inducción deducimos que, para cada p,

$$|A_{n+p,k}| \leq S\Big(1 + \frac{C_4}{(n+1)^2}\Big)\cdots\Big(1 + \frac{C_4}{(n+p-1)^2}\Big) < S\prod_{k=1}^{\infty}\Big(1 + \frac{C_4}{(n+k)^2}\Big) = M_{\tilde{\phi}}\,.$$

□

A continuación mejoramos los resultados obtenidos en (10). Para ello consideraremos que la medida μ_0 satisface que $\overline{\lim}\sqrt[n]{|c_n|} = r_0 < 1$ donde $c_n = \langle z^n, 1\rangle_{\mu_0}$. Esto es, suponemos que la función de Carathéodory de la medida μ_0 tiene extensión analítica a $|z| < \frac{1}{r_0}$.

Proposición 11. *Sea $\rho = \text{máx}\{r_0, r_1\}$. Para cada R_1 tal que $\rho < R_1 < 1$, existen $E > 0$ y un número natural H tal que*

$$(11) \qquad |\alpha_{n,k}| < E\frac{R_1^{n-k}}{k^2} \quad \textit{para} \quad n-k > H \quad \textit{y} \quad |\alpha_{n,0}| < ER_1^n \quad \textit{para} \quad n > H.$$

Demostración. Tomemos R tal que, $\rho < R < R_1$. De la Proposición 6 se deduce que $|b_{n,k}| < C_2 R^{n-k}$ para cada $k \geq 0$ y $n \geq N_2$.

Por otra parte, también podemos asegurar que existe un entero $h \geq 0$ tal que para $n \geq h$ $|c_n| < R^n$ y $|c_n| \leq 1$ para $0 \leq n \leq h-1$.

Luego, eligiendo una constante apropiada C_5 podemos establecer que $|b_{n,k}| < C_5 R^{n-k}$ para cada $0 \leq k \leq n$ y $|c_n| < C_5 R^n$ para cada n.

Seguidamente probamos que existe $C_6 > 0$ y un número natural H tal que

$$|\langle\tilde{\phi}_k, \psi_n\rangle_s| < C_6 R_1^{n-k} \quad \text{para} \quad n-k > H.$$

En efecto:

$$\begin{aligned}
|\langle z^k, \psi_n\rangle_s| = |\langle z^k, \psi_n\rangle_{\mu_0}| &= \Big|\sum_{j=-k+1}^{n-k} c_j b_{n,j+k}\Big| \leq \sum_{j=-k+1}^{0} |b_{n,j+k}| + \sum_{k=1}^{n-k} |c_j||b_{n,j+k}| \\
&\leq \sum_{j=-k+1}^{0} C_5 R^{n-j-k} + \sum_{k=1}^{n-k} C_5 R^j C_5 R^{n-j-k} < \frac{C_5}{1-R}R^{n-k} + \sum_{k=1}^{n-k} C_5^2 R^{n-k} \\
&= \frac{C_5}{1-R}R^{n-k} + C_5^2(n-k)R^{n-k}.
\end{aligned}$$

Dado que existe un número natural $H_1 \geq 0$ tal que $\dfrac{1}{1-R} < n-k$ si $n-k > H_1$, se tiene entonces

$$|\langle z^k, \psi_n\rangle_s| < C_5(n-k)R^{n-k} + C_5^2(n-k)R^{n-k} = C(n-k)R^{n-k}.$$

Así, si tomamos un número natural $H \geq 0$ tal que $(n-k)R^{n-k} < R_1^{n-k}$ para $(n-k) > H$, obtenemos $|\langle z^k, \psi_n\rangle_s| \leq CR_1^{n-k}$ para $n-k > H$.

Por lo tanto

$$|\langle\tilde{\phi}_k,\psi_n\rangle_s| \leq M_{\tilde{\phi}}C[R_1^n+\cdots+R_1^{n-k}] < M_{\tilde{\phi}}C\frac{R_1^{n-k}}{1-R_1} = C_6R_1^{n-k}.$$

Finalmente, teniendo en cuenta que $|\alpha_{n,k}| = \dfrac{|\langle\tilde{\phi}_k,\psi_n\rangle_s|}{\|\tilde{\phi}_k\|_s^2}$, se obtiene (11). $\square$

Proposición 12. *Se verifican las siguientes relaciones:*

(i) $\lim\limits_{n\to\infty}\|\tilde{\phi}_n-\psi_n\|_s = 0.$

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty}\|\tilde{\phi}_n\|_{\mu_0} = \left\|\dfrac{\overline{\Pi_1}(\frac{1}{z})}{\Pi_1(0)}\right\|_{\mu_0}.$

Demostración. (i) Tomando normas en (9),

$$\|\tilde{\phi}_n-\psi_n\|_s^2 = \sum_{k=0}^{n-1}|\alpha_{n,k}|^2\|\tilde{\phi}_k\|_s^2. \tag{12}$$

Utilizando (10), (11) y que

$$\|\tilde{\phi}_n\|_s^2 \leq \|\psi_n\|_{\mu_0}^2 + n^2\|\phi_{n-1}\|_{\mu_1}^2 \leq F+n^2c, \quad \text{con} \quad F=C_3^2 \text{ y } c=\|1\|_{\mu_1}^2,$$

se sigue, de (12),

$$\begin{aligned}\|\tilde{\phi}_n-\psi_n\|_s^2 &= \sum_{j=1}^{H}|\alpha_{n,n-j}|^2\|\tilde{\phi}_{n-j}\|_s^2 + \sum_{j=H+1}^{n}|\alpha_{n,n-j}|^2\|\tilde{\phi}_{n-j}\|_s^2 \\ &\leq \sum_{j=1}^{H}\frac{Q}{(n-j)^4}[F+(n-j)^2c] + \sum_{j=H+1}^{n}\frac{QR_1^{2j}}{(n-j)^4}[F+(n-j)^2c]\end{aligned}$$

con $Q=\text{máx}\{C_4^2,E^2\}$. Ahora, es inmediato deducir (i).

(ii) A partir de (i), $\lim\limits_{n\to\infty}\|\tilde{\phi}_n-\psi_n\|_{\mu_0} = 0$, lo que implica que $\lim\limits_{n\to\infty}\|\tilde{\phi}_n\|_{\mu_0} = \lim\limits_{n\to\infty}\|\psi_n\|_{\mu_0}$. Por tanto, aplicando el Corolario 4, obtenemos (ii). $\square$

3.3. Asintótica fuerte.

Proposición 13. *La sucesión* $\dfrac{\tilde{\phi}_n(z)}{z^n}$ *está uniformemente acotada en subconjuntos* K *de* $\mathbb{C}$ *tales que* $\inf\limits_{z\in K}|z|>\rho$ *con* $\rho=\text{máx}\{r_0,r_1\}$.

Demostración. Sea K un subconjunto de $\mathbb{C}$ tal que $\inf\limits_{z\in K}|z|>\rho$. Sea $r=\inf\limits_{z\in K}|z|$ y sea R_1 tal que $\rho<R_1<r$. Dado que la sucesión $\dfrac{\psi_n(z)}{z^n}$ está uniformemente acotada en subconjuntos K de $\mathbb{C}$ con $\inf\limits_{z\in K}|z|>\rho$, consideremos un número natural fijo $n_0\geq 0$ tal que $(E[\frac{n_0}{2}]+1)^2 \leq (\frac{r}{R_1})^{\frac{n_0}{2}}$ y elijamos $M=\text{máx}\limits_{z\in K}\left\{\left|\dfrac{\tilde{\phi}_k(z)}{z^k}\right|_{k=0,\ldots,n_0-1}, \left|\dfrac{\psi_k(z)}{z^k}\right|_{k\geq 0}\right\}$.

Se sigue entonces de (9), para $z \in K$,

$$\Big|\frac{\tilde{\phi}_{n_0}(z)}{z^{n_0}}\Big| = \Big|\frac{\psi_{n_0}(z)}{z^{n_0}} + \sum_{k=0}^{n_0-1} \frac{\alpha_{n_0,k}}{z^{n_0-k}} \frac{\tilde{\phi}_k(z)}{z^k}\Big| < M + \sum_{k=0}^{n_0-1} \frac{|\alpha_{n_0,k}|}{|z^{n_0-k}|} M.$$

Aplicando la Proposición 11 tenemos que existen $E > 0$ y un número natural $H \geq 0$ tal que $|\alpha_{n,k}| < \dfrac{ER_1^{n-k}}{k^2}$ y $|\alpha_{n,0}| < ER_1^n$, para $n - k > H$.

Por tanto, si también tenemos en cuenta (10) obtenemos, para $z \in K$,

$$\Big|\frac{\tilde{\phi}_{n_0}(z)}{z^{n_0}}\Big| \leq M\Big[1 + \sum_{k=n_0-H}^{n_0-1} \frac{|\alpha_{n_0,k}|}{|z|^{n_0-k}}\Big] + M \sum_{k=E[\frac{n_0}{2}]+1}^{n_0-H-1} \frac{|\alpha_{n_0,k}|}{|z|^{n_0-k}} + M \sum_{k=0}^{E[\frac{n_0}{2}]} \frac{|\alpha_{n_0,k}|}{|z|^{n_0-k}}$$

$$\leq M\Big[1 + \sum_{k=n_0-H}^{n_0-1} \frac{C_4}{k^2 r^{n_0-k}}\Big] + M \sum_{k=E[\frac{n_0}{2}]+1}^{n_0-H-1} \frac{ER_1^{n_0-k}}{k^2 r^{n_0-k}} + M \sum_{k=1}^{E[\frac{n_0}{2}]} \frac{ER_1^{n_0-k}}{k^2 r^{n_0-k}} + M\frac{ER_1^{n_0}}{r^{n_0}}$$

$$\leq M\Big[1 + \frac{HC_4}{(n_0-H)^2 r^H}\Big] + \frac{ME}{(E[\frac{n_0}{2}]+1)^2} \sum_{k=E[\frac{n_0}{2}]+1}^{n_0-H-1} \Big(\frac{R_1}{r}\Big)^{n_0-k} + ME \sum_{k=0}^{E[\frac{n_0}{2}]} \Big(\frac{R_1}{r}\Big)^{n_0-k}$$

$$< M\Big[1 + \frac{A}{(n_0-H)^2} + \frac{B}{(E[\frac{n_0}{2}]+1)^2} + C\Big(\frac{R_1}{r}\Big)^{n_0-E[\frac{n_0}{2}]}\Big]$$

$$\leq M\Big[1 + \frac{A+B}{(E[\frac{n_0}{2}]+1)^2} + C\Big(\frac{R_1}{r}\Big)^{\frac{n_0}{2}}\Big],$$

con $A = \dfrac{HC_4}{r^H}$, $B = \dfrac{Er}{r-R_1}\Big(\dfrac{R_1}{r}\Big)^{H+1}$ y $C = \dfrac{Er}{r-R_1}$. Entonces

$$\Big|\frac{\tilde{\phi}_{n_0}(z)}{z^{n_0}}\Big| < M\Big[1 + \frac{V}{(E[\frac{n_0}{2}]+1)^2}\Big]$$

con $V = A + B + C$ y por lo tanto $\Big|\dfrac{\tilde{\phi}_{n_0}(z)}{z^{n_0}}\Big| \leq M\Big[1 + \dfrac{G}{{n_0}^2}\Big]$, $\forall z \in K$.

Procediendo por inducción podemos obtener

$$\Big|\frac{\tilde{\phi}_{n_0+p}(z)}{z^{n_0+p}}\Big| \leq M \prod_{p=0}^{\infty}\Big[1 + \frac{G}{(n_0+p)^2}\Big], \ \forall z \in K.$$

En definitiva hemos probado que existe L tal que $\Big|\dfrac{\tilde{\phi}_n(z)}{z^n}\Big| \leq L$ para todo $z \in K$ y para todo $n \geq 0$. □

Estamos ya en condiciones de demostrar el teorema central de esta sección.

Teorema 2. *Si μ_0 es una medida de Borel finita y positiva cuya función de Carathéodory tiene extensión analítica a $|z| < \dfrac{1}{r_0}$ con $r_0 < 1$ y μ_1 es una medida de la* *clase Szegő cuya función de Szegő, $\Pi_1(z)$, tiene extensión analítica a $|z| < \dfrac{1}{r_1}$ con $r_1 < 1$, entonces la sucesión de P.O. mónicos con respecto a (1), $\{\tilde{\phi}_n\}$, verifica*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\tilde{\phi}_n(z)}{z^n} = \frac{\overline{\Pi_1(\frac{1}{\bar z})}}{\overline{\Pi_1(0)}}$$

uniformemente en subconjuntos K de $\mathbb{C}$ tales que $\inf_{z\in K} |z| > \rho$, con $\rho = \max\{r_0, r_1\}$.

Demostración. De acuerdo con la Proposición 7, bastará probar que $\lim_{n\to\infty}\Big(\dfrac{\tilde{\phi}_n(z)}{z^n} - \dfrac{\psi_n(z)}{z^n}\Big) = 0$ uniformemente en subconjuntos K de $\mathbb{C}$ tales que $\inf_{z\in K} |z| > \rho$.

Sea K un subconjunto de $\mathbb{C}$ con $r = \inf_{z\in K} |z| > \rho$ y sea R_1 tal que $\rho < R_1 < r$.

Utilizando (9) y la Proposición 13 tenemos, para $z \in K$,

$$\Big|\frac{\tilde{\phi}_n(z)}{z^n} - \frac{\psi_n(z)}{z^n}\Big| = \Big|\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\alpha_{n,k}}{z^{n-k}} \frac{\tilde{\phi}_k(z)}{z^k}\Big| \le L \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|\alpha_{n,k}|}{r^{n-k}}.$$

Si ahora procedemos del mismo modo que en la Proposición 13 y tenemos en cuenta (10) y (11) resulta

$$\sum_{k=n-H}^{n-1} \frac{|\alpha_{n,k}|}{r^{n-k}} < \frac{A}{(n-H)^2}, \quad \sum_{k=E[\frac{n}{2}]+1}^{n-H-1} \frac{|\alpha_{n,k}|}{r^{n-k}} < \frac{B}{(E[\frac{n}{2}]+1)^2}$$

y

$$\sum_{k=0}^{E[\frac{n}{2}]} \frac{|\alpha_{n,k}|}{r^{n-k}} < C\Big(\frac{R_1}{r}\Big)^{\frac{n}{2}}.$$

Para un $\epsilon > 0$ fijo, elegimos $N \ge 0$ tal que para $n \ge N$ se verifica

$$\frac{LA}{(n-H)^2} < \frac{\epsilon}{3}, \quad \frac{LB}{(E[\frac{n}{2}]+1)^2} < \frac{\epsilon}{3} \quad \text{y} \quad LC\Big(\frac{R_1}{r}\Big)^{\frac{n}{2}} < \frac{\epsilon}{3},$$

lo que nos permite obtener el resultado. □

Corolario 5. *Para todo $\epsilon > 0$ y n suficientemente grande, las raíces de $\tilde{\phi}_n(z)$ están en $|z| < \rho + \epsilon$.*

Demostración. Se procede como en el Corolario 3. □

Proposición 14. *Bajo las hipótesis del Teorema 2, se cumple*

(i) $\lim_{n\to\infty} \tilde{\phi}_n(z) = 0$ *uniformemente en subconjuntos compactos de $|z| < 1$.*

(ii) $\lim_{n\to\infty} |\tilde{\phi}_n(z)| = \Big|\dfrac{\overline{\Pi_1(\frac{1}{\bar z})}}{\overline{\Pi_1(0)}}\Big|$ *uniformemente para $|z| = 1$.*

Demostración. (i) Basta tener en cuenta que $|z| < 1$ y proceder de la misma forma que en la Proposición 13.

(ii) Es inmediato a partir del Teorema 2. □

4. Generalización

Los esquemas de razonamiento utilizados tanto en la sección 2 como en la 3 son variantes de una misma argumentación. El problema extremal

$$\begin{array}{lcl} \text{Mín} & \|p(z)\|_s^2 \quad = & \text{Mín} \quad \left\{\|p(z)\|_{\mu_0}^2 + \|p'(z)\|_{\mu_1}^2\right\} \\ \text{sujeto a } p(z) \in \mathbb{P}_n & & \text{sujeto a } p(z) \in \mathbb{P}_n \\ p(z) = z^n + \text{t.m.g.} & & p(z) = z^n + \text{t.m.g.} \end{array}$$

es un problema de minimización múltiple, en el que la componente que gobierna el problema es la que afecta a las derivadas, siempre que la segunda medida esté en la clase Szegő y que n sea suficientemente grande.

Obsérvese que este hecho sugiere los asintóticos probados y que, en definitiva, la construcción prueba que no hay gran diferencia entre el polinomio que resuelve el segundo problema extremal individual y el que resuelve el problema Sobolev. Obsérvese también que la solución del problema Sobolev se parece a la primitiva de $\phi_n(z)$.

Una generalización natural del producto escalar de Sobolev (1) es considerar un producto escalar con $p+1$ componentes, esto es

$$\langle f(z), g(z)\rangle_s = \sum_{i=0}^{p} \int_0^{2\pi} f^{(i)}(e^{i\theta})\overline{g^{(i)}(e^{i\theta})}\, d\mu_i(\theta), \quad z = e^{i\theta}, \tag{13}$$

donde μ_i, $i = 0, \ldots, p$, son medidas de Borel finitas y positivas en $[0, 2\pi]$.

Para este problema denotaremos $c_{n,k}$ al momento n-ésimo de la k-ésima medida, esto es $c_{n,k} = \langle z^n, 1\rangle_{\mu_k}$ con $k = 0, \ldots, p-1$, $\phi_n(z)$ al n-ésimo polinomio ortogonal mónico con respecto a la medida p, $a_{n,0}$ al término independiente de $\phi_n(z)$ y $\tilde{\phi}_n(z)$ al n-ésimo polinomio ortogonal mónico con respecto al producto escalar de Sobolev (13).

Las ideas expuestas en la sección 2 son fácilmente generalizables si se supone que μ_p es una medida de la clase Szegő y de forma natural se tiene el siguiente resultado.

Teorema 3. *Sean μ_i ($i = 0, \ldots, p-1$) medidas de Borel finitas y positivas, y μ_p una medida verificando la condición de Szegő. Entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\tilde{\phi}_n(z)}{z^n} = \frac{\overline{\Pi_p}(\frac{1}{\bar z})}{\overline{\Pi_p(0)}}$$

uniformemente en subconjuntos K de $\mathbb{C}$ con $\inf_{z\in K} |z| > 1$, siendo $\Pi_p(z)$ la función de Szegő de μ_p.

Demostración. Seguir las pautas marcadas en la sección 2 y, para los detalles, véase [8]. □

De igual forma, siguiendo las pautas de la sección 3, aunque con cálculos mucho más complicados, se tiene el siguiente resultado.

Teorema 4. *Sean μ_i, $i = 0, \ldots, p-1$, medidas de Borel finitas y positivas y μ_p una medida verificando la condición de Szegő con función de Szegő $\Pi_p(z)$. Si*

$\overline{\text{lím}}\,\sqrt[n]{|c_{n,k}|} = r_k$, $k = 0, \dots, p-1$, *y* $\overline{\text{lím}}\,\sqrt[n]{|a_{n,0}|} = r_p$, *y* $\text{máx}\{r_0, r_1, \dots, r_p\} = \rho < 1$ *entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\tilde{\phi}_n(z)}{z^n} = \frac{\overline{\Pi_p}(\frac{1}{z})}{\overline{\Pi_p(0)}}$$

uniformemente en subconjuntos K *de* $\mathbb{C}$ *con* $\inf_{z\in K} |z| > \rho$.

Referencias

[1] A. Aptekarev, E. Berriochoa y A. Cachafeiro, Strong asymptotics for the continuous Sobolev orthogonal polynomials on the unit circle, *J. Approx. Theory* **100** (1999), 381–391.

[2] E. Berriochoa y A. Cachafeiro, Lebesgue Sobolev orthogonality on the unit circle, *J. Comput. Appl. Math.* **96** (1998), 27–34.

[3] E. Berriochoa y A. Cachafeiro, A family of Sobolev orthogonal polynomials on the unit circle, *J. Comput. Appl. Math.* **105** (1999), 163–173.

[4] E. Berriochoa y A. Cachafeiro, Continuous Sobolev inner products on the unit circle: canonical models, *Rend. Mat. Appl. (7)* **19** (1999), 89–106.

[5] E. Berriochoa y A. Cachafeiro, Bernstein-Szegő-Lebesgue Sobolev orthogonal polynomials on the unit circle, *J. Differ. Equations Appl.* **6** (2000), 719–737.

[6] E. Berriochoa y A. Cachafeiro, Asymptotic behavior inside the disk for Lebesgue Sobolev orthogonal polynomials, *J. Inequal. Appl.* (2001).

[7] E. Berriochoa y A. Cachafeiro, Strong asymptotics inside the unit disk for Sobolev orthogonal polynomials, *Comput. Math. Appl.* (2001).

[8] E. Berriochoa y A. Cachafeiro, Szegő's asymptotics for Sobolev orthogonal polynomials, prepublicación (2001).

[9] E. Berriochoa, A. Cachafeiro y F. Marcellán, Differential properties for Sobolev orthogonality on the unit circle, *J. Comput. Appl. Math.* (2001).

[10] Ja. L. Geronimus, *Orthogonal polynomials: Estimates, asymptotic formulas, and series of polynomials orthogonal on the unit circle and on an interval*, Consultants Bureau, Nueva York, 1961.

[11] A. Martínez-Finkelshtein, Bernstein-Szegő's theorem for Sobolev orthogonal polynomials, *Constr. Approx.* **16** (2000), 73–84.

[12] P. Nevai y V. Totik, Orthogonal polynomials and their zeros, *Acta Sci. Math.* **53** (1989), 99–104.

[13] J. L. Walsh, *Interpolation and approximation by rational functions in the complex domain*, 5.ª edición, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. **20**, Providence, RI, 1969.

Departamento de Matemática Aplicada, Facultad de Ciencias, Universidad de Vigo, 32004 Ourense, Spain

Correo electrónico: esnaola@correo.uvigo.es

Departamento de Matemática Aplicada, E. T. S. Ingenieros Industriales, Universidad de Vigo, 36280 Vigo, Spain

Correo electrónico: acachafe@dma.uvigo.es