MARGARITA MATHEMATICA EN MEMORIA DE
JOSÉ JAVIER (CHICHO) GUADALUPE HERNÁNDEZ
(Luis Español y Juan L. Varona, editores),
Servicio de Publicaciones, Universidad de La Rioja,
Logroño, Spain, 2001.

# ALGUNAS NOTAS SOBRE UNA DERIVADA ALGEBRAICA ASOCIADA AL OPERADOR $D^\delta$

VÍCTOR M. ALMEIDA Y JOSÉ RODRÍGUEZ

*Aquél que dedica su vida a sembrar*
*sobrevive, en sus frutos, a su propio tiempo*

ABSTRACT. In this paper some new properties related to an algebraic derivative, associated to the Riemann-Liouville's fractional derivative $D^\delta$ and the Mikusinski's convolution, are shown. In the last section, and making use of the Meller's theorem, it is obtained an algebraic derivative associated to the Riemann-Liouville's generalized operator $D^\delta_\beta$.

## 1. INTRODUCCIÓN

En [2], V. M. Almeida, N. Castro y J. Rodríguez definieron la derivada algebraica

$$\mathcal{D}f(t) = \frac{-I^{\delta-1}}{\delta}\, tf(t)$$

en el anillo $(C_\delta, +, *)$, donde $*$ representa la convolución de Mikusinski

$$(f*g)(t) = \int_0^t f(t-\psi)g(\psi)d\psi$$

y

$$C_\delta = \Big\{ f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k t^{k\delta-1} \text{ unif. converg. en compactos de } [0,\infty) \Big\}$$

el espacio introducido, en [1], para el desarrollo de un cálculo operacional, tipo Mikusinski, asociado al operador

$$D^\delta f(t) = D^n I^{n-\delta} f(t) \qquad (n-1 < \delta \le n),$$

siendo

$$I^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau)\, d\tau$$

el operador integral fraccionaria de Riemann-Liouville.

2000 *Mathematics Subject Classification.* 44A40, 26A33, 33E20.
*Key words and phrases.* Algebraic derivative, operational calculus, operator of fractional order.

El operador integral $I^\delta$ fue identificado con la función $\dfrac{t^{\delta-1}}{\Gamma(\delta)} \in C_\delta$, en el sentido de que

$$I^\delta f(t) = \frac{t^{\delta-1}}{\Gamma(\delta)} * f(t) \qquad (\forall f(t) \in C_\delta)$$

y usando el método de inducción

$$(I^\delta)^k f(t) = \frac{t^{k\delta-1}}{\Gamma(k\delta)} * f(t) \qquad (k \in \mathbb{N}).$$

Representando por $I^\delta = l_\delta = \dfrac{t^{\delta-1}}{\Gamma(\delta)}$, se denota por $v_\delta = \dfrac{1}{l_\delta}$ al inverso algebraico de $l_\delta$ en $M_\delta$, cuerpo de fracciones asociado al anillo $C_\delta$.

Siguiendo a Mikusinski [9], se establecieron isomorfismos entre $C_\delta$ y $\mathbb{C}$ con subconjuntos de $M_\delta$ mediante las aplicaciones

$$\begin{gathered} C_\delta \longrightarrow M_\delta^1 \subset M_\delta \\ f \rightsquigarrow \tfrac{l_\delta f}{l_\delta} \end{gathered}$$

y

$$\begin{gathered} \mathbb{C} \longrightarrow M_\delta^2 \subset M_\delta \\ \alpha \rightsquigarrow \tfrac{\alpha t^{\delta-1}}{t^{\delta-1}} \end{gathered}$$

denominándose a los elementos $[\alpha] = \dfrac{\alpha t^{\delta-1}}{t^{\delta-1}}$, de $M_\delta$, operadores numéricos.

Haciendo uso de este cálculo operacional, en [2] se demostraron las siguientes proposiciones, las cuales ponen de manifiesto el buen comportamiento de la derivada algebraica $\mathcal{D}$ sobre ciertos elementos de $M_\delta$.

**Proposición 1.** *Sean $1 = \dfrac{t^{\delta-1}}{t^{\delta-1}}$ el elemento unidad de $M_\delta$, $0 = \dfrac{0}{t^{\delta-1}}$, $v_\delta = \dfrac{1}{l_\delta}$ el inverso algebraico de $l_\delta$ en $M_\delta$, y $n \in \mathbb{N}$. Se tiene que*

1. $\mathcal{D}1 = 0$.
2. $\mathcal{D}\alpha = 0$ *(siendo $\alpha$ cualquier operador numérico).*
3. $\mathcal{D}(\alpha p) = \alpha \mathcal{D}p$ *(para todo $p \in M_\delta$).*
4. $\mathcal{D}l_\delta^n = -nl_\delta^{n+1}$.
5. $\mathcal{D}v_\delta^n = nv_\delta^{n-1}$.
6. $\mathcal{D}(1-\alpha l_\delta)^n = n\alpha l_\delta^2(1-\alpha l_\delta)^{n-1}$.
7. $\mathcal{D}(v_\delta - \alpha)^n = n(v_\delta-\alpha)^{n-1}$.

**Proposición 2.** *Dado $p \in M_\delta$, si $\mathcal{D}p = 0$ entonces $p$ es un operador numérico.*

Usando estos resultados, se resolvió, siguiendo la misma técnica que W. Kierat y K. Skornik [6, 7], la ecuación integrodiferencial

$$\text{(1.1)} \qquad \begin{cases} -\mathcal{D}(D^\delta)^2 x(t) + (1+\mathcal{D})D^\delta x(t) - ax(t) = 0, \\[2ex] [t^{1-\delta}x(t)]_{t=0} = 0 \qquad (x(t) \in C_\delta),\ (a \in \mathbb{C}), \end{cases}$$

transformándola en la ecuación operacional (es decir, inmersa en el cuerpo de fracciones $M_\delta$)

$$\frac{\mathcal{D}x(t)}{x(t)} = \frac{a-1}{v_\delta} - \frac{a}{v_\delta - 1} = \frac{l_\delta[l_\delta(1-a)-1]}{1-l_\delta}, \tag{1.2}$$

estableciéndose

**Proposición 3.** *La función $x_a$, solución de las ecuaciones (1.2) y (1.1), admite las representaciones*

$$x_a = l_\delta(1-l_\delta)^{-a} \in M_\delta$$

*y*

$$x_a(t) = \frac{t^{\delta-1}}{\Gamma(a)}\, {}_1\Psi_1 \left[ \begin{array}{cc} (a,1); & \\ & t^\delta \\ (\delta,\delta); & \end{array} \right] \in C_\delta,$$

*donde ${}_1\Psi_1$ representa la función hipergeométrica generalizada de Wright* [10]

$${}_1\Psi_1 \left[ \begin{array}{cc} (a,b); & \\ & t \\ (c,d); & \end{array} \right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(kb+a)}{\Gamma(kd+c)} \frac{t^k}{k!}.$$

*Además, verifica la siguiente propiedad de convolución:*

$$D^\delta \int_0^t \frac{(t-\tau)^{\delta-1}}{\Gamma(a)}\, {}_1\Psi_1 \left[ \begin{array}{cc} (a,1); & \\ & (t-\tau)^\delta \\ (\delta,\delta); & \end{array} \right] \frac{\tau^{\delta-1}}{\Gamma(b)}\, {}_1\Psi_1 \left[ \begin{array}{cc} (b,1); & \\ & \tau^\delta \\ (\delta,\delta); & \end{array} \right] d\tau$$
$$= \frac{t^{\delta-1}}{\Gamma(a+b)}\, {}_1\Psi_1 \left[ \begin{array}{cc} (a+b,1); & \\ & t^\delta \\ (\delta,\delta); & \end{array} \right].$$

## 2. Otros resultados y ejemplos relativos a $\mathcal{D}$

De forma análoga a lo realizado en [5], definiremos el operador $h = \exp[\gamma(v_\delta - \alpha)^{-n}]$ y se mostrará el comportamiento de la derivada algebraica $\mathcal{D}$ en relación a el mismo.

**Definición 1.** *Sean $\gamma, \alpha \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ y $v_\delta = \dfrac{1}{l_\delta} \in M_\delta$. Entonces,*

$$h = \exp[\gamma(v_\delta - \alpha)^{-n}] = 1 + \frac{\gamma(v_\delta-\alpha)^{-n}}{1!} + \frac{\gamma^2(v_\delta-\alpha)^{-2n}}{2!} + \dots \tag{2.1}$$

*donde la convergencia de la serie de operadores (2.1) es en el sentido de Mikusinski* [9].

El comportamiento de la derivada algebraica $\mathcal{D}$, en relación al operador $h$ viene dada por

**Proposición 4.** *Sea $\mathcal{D} = -\frac{I^{\delta-1}}{\delta}t$ y $h = \exp[\gamma(v_\delta - \alpha)^{-n}]$. Entonces,*

$$\mathcal{D}h = (-n)\gamma(v_\delta - \alpha)^{-n-1}\exp[\gamma(v_\delta - \alpha)^{-n}].$$

*Demostración.* Por la Proposición 1, podemos escribir

$$\begin{aligned}\mathcal{D}h &= \mathcal{D}\Big[1 + \frac{\gamma(v_\delta - \alpha)^{-n}}{1!} + \frac{\gamma^2(v_\delta - \alpha)^{-2n}}{2!} + \dots\Big]\\ &= \frac{(-n)\gamma(v_\delta - \alpha)^{-n-1}}{1!} + \frac{(-2n)\gamma^2(v_\delta - \alpha)^{-2n-1}}{2!} + \dots\\ &= (-n)\gamma(v_\delta - \alpha)^{-n-1}\Big[1 + \frac{\gamma(v_\delta - \alpha)^{-n}}{1!} + \frac{\gamma^2(v_\delta - \alpha)^{-2n}}{2!} + \dots\Big]\\ &= (-n)\gamma(v_\delta - \alpha)^{-n-1}\exp[\gamma(v_\delta - \alpha)^{-n}].\end{aligned}$$

□

Como aplicación de esta proposición y del cálculo operacional, se pueden resolver ecuaciones del tipo

$$\mathcal{D}(D^\delta)^2 x(t) + (n-1)D^\delta x(t) + x(t) = 0 \qquad (n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}) \tag{2.2}$$

donde

$$x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k t^{k\delta - 1} \quad \text{con} \quad a_1 = 0.$$

La ecuación (2.2) se transforma ([1, prop. 3.4]) en

$$\mathcal{D}[v_\delta^2 x(t) - a_2\Gamma(2\delta)] + (n-1)v_\delta x(t) + x(t) = 0,$$

que por la Proposición 1, nos lleva a

$$2v_\delta + v_\delta^2 \mathcal{D}x(t) + (n-1)v_\delta x(t) + x(t) = 0$$

o bien a la expresión equivalente

$$\frac{\mathcal{D}x(t)}{x(t)} = \frac{-(n+1)}{v_\delta} + \frac{-1}{v_\delta^2}. \tag{2.3}$$

No es complicado comprobar, en base a la Proposición 4, que elemento $x_n$ de $M_\delta$ dado por

$$x_n = v_\delta^{-(n+1)} \exp[v_\delta^{-1}]$$

representa una solución de (2.3), la cual admite la siguiente representación como función de $C_\delta$:

$$\begin{aligned}x_n(t) &= l_\delta^{n+1}[1 + v_\delta^{-1} + \frac{v_\delta^{-2}}{2!} + \dots] = l_\delta^{n+1} + l_\delta^{n+2} + \frac{l_\delta^{n+3}}{2!} + \dots\\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{l_\delta^{n+1+k}}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{(n+1+k)\delta - 1}}{k!\,\Gamma[(n+1+k)\delta]}\\ &= t^{(n+1)\delta - 1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t^\delta)^k}{k!\,\Gamma[(n+1+k)\delta]} = t^{(n+1)\delta - 1}\, {}_1\Psi_1 \left[\begin{array}{cc} (1,0); & \\ & t^\delta \\ ((n+1)\delta, \delta); & \end{array}\right]\end{aligned}$$

y es una solución de la ecuación (2.2).

**Proposición 5.** *La función $x_n$ verifica que, $\forall k \in \mathbb{N}$,*

$$(D^{\delta})^k x_n(t) = x_{n-k}(t) \qquad (n-k>0),$$
$$(I^{\delta})^k x_n(t) = x_{n+k}(t).$$

*Demostración.* Es consecuencia inmediata del hecho de que el elemento $l_\delta \in M_\delta$ represente al operador integral $I^\delta$, y de la expresión $x_n = v_\delta^{-(n+1)} \exp[v_\delta^{-1}] = l_\delta^{n+1} \exp[v_\delta^{-1}]$. □

Para finalizar esta sección demostraremos que $\mathcal{D}$ es una derivada algebraica, incluso en el anillo de Mikusinski $(C, +, *)$. Para lo que necesitaremos comprobar la veracidad de la siguiente proposición.

**Proposición 6.** *Dados $\alpha \in \mathbb{R}^+$ y $f, g \in C$, se verifica que*

$$I^\alpha (f*g)(t) = [(I^\alpha f) * g](t) = [f * (I^\alpha g)](t).$$

*Demostración.* Es suficiente con la demostración de la primera igualdad, ya que la segunda sería consecuencia de la conmutatividad de la convolución $*$. Así,

$$\begin{aligned} I^\alpha (f*g)(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \Big[ \int_0^\tau f(\tau-u) g(u)\, du \Big] d\tau \\ &= \int_0^\tau \Big[ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_u^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(t-\tau)\, d\tau \Big] g(u)\, du \\ &= \int_0^\tau \Big[ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t-u} (t-u-\psi)^{\alpha-1} f(\psi)\, d\psi \Big] g(u)\, du = [(I^\alpha f) * g](t). \end{aligned}$$

□

**Proposición 7.** *Para cualquier par de funciones $f, g \in C$, se tiene*

(a) $\mathcal{D}(f+g)(t) = \mathcal{D}f(t) + \mathcal{D}g(t)$.
(b) $\mathcal{D}(f*g)(t) = [(\mathcal{D}f) * g](t) + [f * (\mathcal{D}g)](t)$.

*Demostración.* La comprobación de (a) es trivial debido al carácter lineal de $\mathcal{D}$ respecto a la suma.

Para demostrar (b), hemos de tener en cuenta que $-tf(t)$ representa la derivada algebraica de Mikusinski de la función $f$ junto con la Proposición 6, de forma que

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(f*g)(t) &= -\frac{I^{\delta-1}}{\delta} t(f*g)(t) = \frac{I^{\delta-1}}{\delta} \{ [(-tf)*g](t) + [f*(-tg)](t) \} \\ &= [(\mathcal{D}f)*g](t) + [f*(\mathcal{D}g)](t). \end{aligned}$$

□

Sin embargo, este hecho es de nula aplicabilidad dado que

$$\mathcal{D} l^n \neq -n l^{n+1} \qquad \text{y} \qquad \mathcal{D} s^n \neq n s^{n-1},$$

donde $l = \{1\}$ representa el operador integral de Mikusinski y $s = \dfrac{1}{l}$ el correspondiente operador diferencial [9]. En otras palabras, la derivada algebraica no está solamente relacionada con la convolución que se esté usando, sino que está también íntimamente ligada al operador para el cual se ha desarrollado el cálculo operacional.

## 3. Una derivada algebraica asociada al operador $D_\beta^\delta$

En esta sección usaremos la derivada algebraica $\mathcal{D}$ para obtener una derivada algebraica asociada al operador $D_\beta^\delta$, el cual puede ser considerado como una generalización de $D^\delta$. Para ello, consideramos

**Teorema 1.** *Si $\mathcal{T} : X \to \hat{X}$ es un isomorfismo entre los espacios vectoriales $X$ y $\hat{X}$, y $\hat{L} : \hat{X} \to \hat{X}$ es un operador lineal en $\hat{X}$ con una convolución asociada $\hat{*} : \hat{X} \times \hat{X} \to \hat{X}$, entonces la operación $x * y = \mathcal{T}^{-1}(\mathcal{T}x \hat{*} \mathcal{T}y)$ es una convolución para el operador $L = \mathcal{T}^{-1}\hat{L}\mathcal{T}$ en $X$.*

Este teorema, conocido como el teorema de semejanza de Meller, puede ser encontrado en [4].

Almeida y Rodríguez [3] mediante el uso de este teorema demostraron que se podía obtener la derivada algebraica $\mathcal{D} = \mathcal{T}^{-1}\hat{\mathcal{D}}\mathcal{T}$ asociada a $*$, en caso de que se tuviese tal derivada $\hat{\mathcal{D}}$ asociada a $\hat{*}$. Además probaron que si $\hat{*}$ carecía de divisores de cero, lo que implicaría que también $*$ estuviese libre de ellos, entonces el isomorfismo $\mathcal{T}$ puede ser extendido a los respectivos cuerpos de fracciones $\mathcal{M}$ y $\hat{\mathcal{M}}$ mediante

$$\mathcal{T}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{\mathcal{T}f}{\mathcal{T}g} \quad \text{para todo} \quad \frac{f}{g} \in \mathcal{M}.$$

Este isomorfismo de cuerpos (de Algebras en realidad), permitió comprobar que cuando existiese un elemento $\hat{l} \in \hat{X}$ verificando $\hat{W}\hat{f} = \hat{l}\hat{*}\hat{f}$, para cualquier $\hat{f} \in \hat{X}$, siendo $\hat{W}$ el operador inverso por la derecha de $\hat{L}$, también existiría $l = \mathcal{T}^{-1}(\hat{l}) \in \mathcal{M}$ tal que $Wf = l * f$, siendo $W$ el correspondiente operador inverso por la derecha de $L$; remarcando que el isomorfismo $\mathcal{T} : \mathcal{M} \to \hat{\mathcal{M}}$ aplica $s = \dfrac{1}{l}$ en $\hat{s} = \dfrac{1}{\hat{l}}$.

Finalmente se estableció

**Proposición 8.** *Son ciertas las siguientes propiedades:*

1. *Si $\hat{\mathcal{D}}\hat{s} = 1$ entonces $\mathcal{D}s = 1$.*
2. *Si $\hat{\mathcal{D}}1 = 0$ entonces $\mathcal{D}1 = 0$.*
3. *Si $\hat{\mathcal{D}}\hat{s}^n = n\hat{s}^{n-1}$ entonces $\mathcal{D}s^n = ns^{n-1}$.*
4. *Si $\hat{\mathcal{D}}\hat{l}^n = -n\hat{l}^{n+1}$ entonces $\mathcal{D}l^n = -nl^{n+1}$.*

Pasemos a continuación a extender algunas propiedades obtenidas en [3].

**Proposición 9.**

1. *Si $\hat{\mathcal{D}}\hat{\alpha} = 0$ entonces $\mathcal{D}\alpha = 0$ ($\hat{\alpha} = \mathcal{T}(\alpha)$ y $\alpha$ son operadores numéricos).*
2. *Si $\hat{\mathcal{D}}(\hat{\alpha}\hat{p}) = \hat{\alpha}\hat{\mathcal{D}}\hat{p}$ entonces $\mathcal{D}(\alpha p) = \alpha\mathcal{D}p$ ($\hat{p} = \mathcal{T}(p)$ y $p$ operadores cualesquiera).*
3. *Si $\hat{\mathcal{D}}(1 - \hat{\alpha}\hat{l})^n = n\hat{\alpha}\hat{l}^2(1 - \hat{\alpha}\hat{l})^{n-1}$ entonces $\mathcal{D}(1 - \alpha l)^n = n\alpha l^2(1 - \alpha l)^{n-1}$.*
4. *Si $\hat{\mathcal{D}}(\hat{s} - \hat{\alpha})^n = n(\hat{s} - \hat{\alpha})^{n-1}$ entonces $\mathcal{D}(s - \alpha)^n = n(s - \alpha)^{n-1}$.*

*Demostración.* La demostración se convierte en un ejercicio de cálculos, al hacer uso de la condición de isomorfismo de cuerpos de $\mathcal{T}$. □

Pero además, $\mathcal{D}$ verifica la Proposición 2 siempre que $\hat{\mathcal{D}}$ también lo haga.

**Proposición 10.** *Si ($\hat{\mathcal{D}}\hat{p} = 0 \Longrightarrow \hat{p}$ es un operador numérico), entonces ($\mathcal{D}p = 0 \Longrightarrow p$ operador numérico).*

*Demostración.* Si $\mathcal{D}p = 0$, entonces $\mathcal{T}^{-1}\hat{\mathcal{D}}\mathcal{T}p = 0$ y, dado que $\mathcal{T}$ es un isomorfismo, podemos concluir que $\hat{\mathcal{D}}\mathcal{T}p = 0$, por lo que $\mathcal{T}p$ es un operador numérico. Por último, no es complicado comprobar que los operadores numéricos de $\mathcal{M}$ están constituidos por las imágenes inversas a través de $\mathcal{T}$ de los operadores numéricos de $\hat{\mathcal{M}}$. $\square$

Apliquemos ahora estos resultados al caso concreto en que los operadores $\hat{L}$ y $L$ sean $D^\delta$ y $D^\delta_\beta$ respectivamente.

Sea el operador $D^\delta_\beta = D^n_\beta I^{n-\delta}_\beta$ ($\beta > 0$), ($n - 1 < \delta \leq n$), donde

$$I^\alpha_\beta f(t) = \frac{\beta}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t^\beta - \tau^\beta)^{\alpha-1} \tau^{\beta-1} f(\tau)\, d\tau$$

es el operador integral fraccionaria generalizada de Riemann-Liouville estudiado en [8]. Así mismo, denotemos $T^\alpha f(t) = f(t^\alpha)$ ($\alpha > 0$), y $D_\beta f(t) = \dfrac{1}{\beta} t^{1-\beta} \dfrac{d}{dt} f(t)$.

En [1] fue demostrado que $D^\delta_\beta = T^\beta D^\delta T^{\frac{1}{\beta}}$. Si consideramos los espacios $\hat{X} = C_\delta$ y

$$X = C_{\beta(\delta)} = \Big\{ f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k t^{\beta(k\delta-1)} \text{ unif. conv. en compactos de } [0, \infty) \Big\},$$

podemos establecer el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "D^\delta_\beta"] \arrow[d, "T^{\frac{1}{\beta}}"'] & X \\ \hat{X} \arrow[r, "D^\delta"'] & \hat{X} \arrow[u, "T^\beta"'] \end{tikzcd}$$

Como ya sabemos, de [2], la convolución para $D^\delta$,

$$(f * g)(t) = \int_0^\infty f(t - \psi) g(\psi)\, d\psi,$$

dota a $\hat{X}$ de la estructura de anillo conmutativo y unitario sin divisores de cero, y que el operador $\mathcal{D}f(t) = \dfrac{-I^{\delta-1}}{\delta} tf(t)$ constituye una derivada algebraica. Por lo tanto, podemos definir la convolución asociada a $D^\delta_\beta$ como

$$(f \otimes g)(t) = T^\beta [T^{\frac{1}{\beta}} f * T^{\frac{1}{\beta}} g](t) = \int_0^{t^\beta} f[(t^\beta - \psi)^{\frac{1}{\beta}}] g(\psi^{\frac{1}{\beta}})\, d\psi.$$

Tal y como ya se ha mencionado, $\dfrac{t^{\delta-1}}{\Gamma(\delta)}$ se identifica con $I^\delta$, operador inverso por la derecha de $D^\delta$, luego podemos identificar la función $T^\beta\Big(\dfrac{t^{\delta-1}}{\Gamma(\delta)}\Big) = \dfrac{t^{\beta(\delta-1)}}{\Gamma(\delta)}$ con $I^\delta_\beta$, operador inverso por la derecha de $D^\delta_\beta$, en el sentido de que $I^\delta_\beta f(t) = \dfrac{t^{\beta(\delta-1)}}{\Gamma(\delta)} \otimes f(t)$.

Dado que $\mathcal{D}$ verifica la Proposición 1, concluimos que

$$\mathcal{D}_\beta f(t) = T^\beta \mathcal{D} T^{\frac{1}{\beta}} f(t) = \frac{-I^{\delta-1}_\beta}{\delta} t^\beta f(t)$$

es una derivada algebraica sobre $(X, +, \otimes)$ satisfaciendo la Proposición 1, siendo $l_\beta = \dfrac{t^{\beta(\delta-1)}}{\Gamma(\delta)}$ y $s_\beta = \dfrac{1}{l_\beta}$.

Como quiera que $l^k_\beta = T^\beta(l^k)$, no es difícil probar la siguiente proposición.

**Proposición 11.** *Sea $f(t) \in C_{\beta(\delta)}$, entonces se tiene que:*

$$(I^\delta_\beta)^k f(t) = \frac{t^{\beta(k\delta-1)}}{\Gamma(k\delta)} \otimes f(t) \qquad (k \in \mathbb{N}).$$

En [1], se probaron las siguientes igualdades para cualquier función $f(t) \in C_{\beta(\delta)}$:

- $I^\delta_\beta D^\delta_\beta f(t) = f(t) - a_1 t^{\beta(\delta-1)}$.
- $(I^\delta_\beta)^m (D^\delta_\beta)^m f(t) = f(t) - \displaystyle\sum_{j=1}^{m} a_j t^{\beta(j\delta-1)}$.

Estas igualdades pueden ser usadas para demostrar la siguiente proposición.

**Proposición 12.** *Sea $s_\beta$ el inverso algebraico de $l_\beta$, entonces para toda función $f(t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k t^{\beta(k\delta-1)}$. Entonces,*

1. $s_\beta f(t) = D^\delta_\beta f(t) + \Gamma(\delta) a_1$.
2. $s^m_\beta f(t) = (D^\delta_\beta)^m f(t) + \sum_{j=1}^{m} \Gamma(j\delta) a_j s^{m-j}_\beta$.

**Nota.** En el presente cálculo operacional, los operadores numéricos vienen dados por $[\alpha] = \dfrac{\alpha t^{\beta(\delta-1)}}{t^{\beta(\delta-1)}}$.

De igual forma a lo hecho en [2], transformamos la ecuación

$$\left\{ \begin{array}{l} -\mathcal{D}_\beta (D^\delta_\beta)^2 x(t) + (1 + \mathcal{D}_\beta) D^\delta_\beta x(t) - a x(t) = 0, \\[2ex] [t^{\beta(1-\delta)} x(t)]_{t=0} = 0 \qquad (x(t) \in C_{\beta(\delta)}),\ (a \in \mathbb{C}), \end{array} \right. \tag{3.1}$$

en

$$\frac{\mathcal{D}_\beta x(t)}{x(t)} = \frac{a-1}{s_\beta} - \frac{a}{s_\beta - 1} = \frac{l_\beta [l_\beta (1-a) - 1]}{1 - l_\beta}, \tag{3.2}$$

para obtener finalmente la solución

$$x_{a,\beta} = s^{a-1}_\beta (s_\beta - 1)^{-a} = l_\beta (1 - l_\beta)^{-a}.$$

Es obvio que $x_{a,\beta}(t) = T^\beta x_a(t)$, por lo que

$$x_{a,\beta}(t) = \frac{t^{\beta(\delta-1)}}{\Gamma(a)}\,{}_1\Psi_1\left[\begin{array}{cc} (a,1); & \\ & t^{\beta\delta} \\ (\delta,\delta); & \end{array}\right].$$

Más aún, podemos identificar la expresión operacional de $x_{a,\beta}$, es decir su expresión como elemento del correspondiente cuerpo de fracciones, con la suma de una serie en dicho cuerpo. En [3], se estableció la proposición

**Proposición 13.** *Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente, en el sentido de Mikusinski al operador $p$. Entonces $\{T^\beta(a_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $T^\beta(p)$.*

Como es bien sabido, la convergencia de una serie depende de la convergencia de su sucesión de sumas parciales asociada, por lo que la Proposición 13 es cierta también para el caso de series.

Como la serie $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-a}{k}(-1)^k l_\delta^{k+1}$ converge a $l_\delta(1-l_\delta)^{-a}$, [2], se concluye que la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-a}{k}(-1)^k l_\beta^{k+1}$$

converge a $l_\beta(1-l_\beta)^{-a} = T^\beta[l_\delta(1-l_\delta)^{-a}]$. Por lo tanto

$$x_{a,\beta} = l_\beta(1-l_\beta)^{-a} = \frac{t^{\beta(\delta-1)}}{\Gamma(a)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(k+a)}{\Gamma(k\delta+\delta)}\frac{t^{k\beta\delta}}{\Gamma(k+1)}.$$

Este último resultado nos permite enunciar y demostrar la siguiente proposición.

**Proposición 14.** *La función* $x_{a,\beta}(t) = \dfrac{t^{\beta(\delta-1)}}{\Gamma(a)}\,{}_1\Psi_1\left[\begin{array}{cc} (a,1); & \\ & t^{\beta\delta} \\ (\delta,\delta); & \end{array}\right]$ *es una solución de la ecuación (3.1) verificando*

$$D_\beta^\delta[x_{a,\beta}\otimes x_{b,\beta}](t) = x_{a+b,\beta}(t).$$

*Demostración.* Nuevamente hay que considerar que $x_{a,\beta} = l_\beta(1-l_\beta)^{-a}$ y que $l_\beta$ se identifica con $I_\beta^\delta$. □

## Referencias


[1] J. A. Alamo y J. Rodríguez, Cálculo operacional de Mikusinski para el operador de Riemann-Liouville y su generalizado, *Rev. Acad. Canar. Cienc.* **1** (1993), 31–40.

[2] V. M. Almeida, N. Castro y J. Rodríguez, An algebraic derivative associated to the operator $D^\delta$, en *Algebraic analysis and related topics* (Varsovia, 1999), *Banach Center Publ.* **53**, Polish Acad. Sci., Varsovia (2000), 71–78.

[3] V. M. Almeida y J. Rodríguez, Meller's theorem and the algebraic derivative, *Integral Transform. Spec. Funct.* **10** (2000), 1–12.

[4] I. H. Dimovski, *Convolutional calculus*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1990.

[5] W. Kierat, A note on applications of the algebraic derivative to solving of some differential equations, *Acta Univ. Palack. Olomuc. Fac. Rerum Natur. Math.* **32** (1993), 63–68.

[6] W. Kierat y K. Skornik, An application of Mikusinski's operational calculus to the theory of Laguerre functions and Laguerre polynomials, *Integral Transform. Spec. Funct.* **1** (1993), 315–316.

[7] W. Kierat y K. Skornik, A remark on solutions of the Laguerre differential equation, en *Different aspects of differentiability* (Varsovia, 1993), *Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.)* **340** (1995), 137–141.

[8] A. C. McBride, *Fractional calculus and integral transforms of generalized functions*, Pitman (Advanced Publishing Program), Londres, 1979.

[9] J. Mikusinski, *Operational calculus*, Pergamon, Oxford, 1959.

[10] H. M. Srivastava y H. L. Manocha, *A treatise on generating functions*, Ellis Horwood, 1984.

Departamento de Análisis Matemático, Universidad de La Laguna, 38271 La Laguna (Tenerife), Canary Islands, Spain

*Correo electrónico*: valmeida@ull.es, joroguez@ull.es