Reinhard Diestel

Graphentheorie

Elektronische Ausgabe 2006

© Springer-Verlag Heidelberg 1996, 2000, 2006

Dies ist eine vollständige elektronische Fassung des gleichnamigen Springer-Lehrbuchs in seiner dritten Auflage (2006). Die Querverweise im Text sind aktive Links.

Die gedruckte Ausgabe des Buches (ISBN 3-540-21391-0; € 29,95) ist im Buchhandel erhältlich, oder direkt von Springer über

http://www.math.uni-hamburg.de/home/diestel/books/graphentheorie/

Diese Webseite enthält zudem Verweise auf weiteres Material wie Folien zur Vorlesung nach dem Buch und laufend aktualisierte Korrekturen.

Obwohl ich die meisten Teile dieses Buchs direkt geschrieben habe – nur die neueren Abschnitte sind von Melanie Win Myint aus dem Englischen übersetzt – folgt es im Wesentlichen der englischen Originalausgabe, die bei Springer in der Reihe *Graduate Texts in Mathematics* (173) erschienen ist. Auch diese gibt es elektronisch; sie enthält zusätzliche Beweise im Minorenkapitel, ein weiteres Kapitel über unendliche Graphen, und hier und da etwas andere Erläuterungen.

Dieses Buch, dieses Buch!

... für Dagmar

Vorwort

Etwa zwanzig Jahre sind vergangen seit dem Erscheinen derjenigen Lehrbücher der Graphentheorie, die bis heute für die meisten Grundvorlesungen den inhaltlichen Rahmen setzen. Der hierin geschaffene Kanon hat die Graphentheorie geprägt, und er wird sie weiter prägen.

Gerade in der Graphentheorie jedoch hat sich in den letzten Jahren einiges getan. Die Vernetzung von Methoden und Resultaten hat zugenommen, es sind tiefe neue Sätze bewiesen worden, ja ganze Zweige sind neu entstanden: man denke etwa an den Brückenschlag zwischen ehemals so unversöhnlichen Invarianten wie chromatischer Zahl und Durchschnittsgrad durch den Begriff der Listenfärbungen, an den Einzug probabilistischer Methoden und des Regularitätslemmas in die extremale Graphentheorie oder die Ramseytheorie, oder an die Theorie der Baumzerlegungen und Minoren mit ihren Verbindungen zur topologischen Graphentheorie – um nur einige Entwicklungen anzusprechen.

Die Zeit scheint daher reif für eine Neubesinnung: *was sind heute die Grundpfeiler der Graphentheorie, die einer einführenden und doch in die Tiefe zielenden Vorlesung das Fundament geben können?*

Dieses Buch möchte Material für eine solche Vorlesung anbieten. Ich habe dabei den Spagat versucht, die zur Orientierung notwendige Schlankheit und Konzentration auf Wesentliches mit so ausführlicher Darstellung im Detail zu verbinden, dass sowohl die wichtigsten übergreifenden Ideen als auch jeder einzelne Beweis dem Selbststudium und einer unabhängigen Vor- oder Nachbereitung zugänglich werden.

Mein Hauptanliegen war es also, die mir als besonders grundlegend erscheinenden Resultate und Methoden möglichst genau darzustellen und zu illustrieren. Fast jedes Kapitel enthält dementsprechend neben den Grundtatsachen seines Gebietes mindestens einen anspruchsvolleren Satz, dessen Beweis jedoch genauso im Detail dargestellt ist wie die kürzeren Beweise. Nicht ohne Unbehagen bemerkte ich dann bald, dass diese etwas anspruchsvolleren Beweise im Druck zuweilen in der Tat recht

lang aussehen! Ich hoffe jedoch, dass gerade die relative Ausführlichkeit ihrer Darstellung letztlich die Lesezeit minimiert...

Entsprechend dem genannten Doppelziel bin ich bei der Auswahl des dargestellten Materials recht restriktiv gewesen: im Zweifelsfall habe ich lieber für einen zentralen Satz zwei oder drei verschiedenartige Beweise dargestellt als zwei oder drei ähnliche Sätze mit ähnlichen Beweisen aneinanderzureihen. Besonders in dieser Hinsicht ist der Text also bewusst als einführendes Lehrbuch geschrieben, nicht als Monographie mit dem Anspruch einer umfassenden Darstellung und Einordnung des vorhandenen Materials.

Der Text ist einerseits unmittelbar verwendbar als Skriptum einer Vorlesung, lässt durch seine Konzentration in der Stoffwahl jedoch andererseits dem Vorlesenden bewusst Raum zur weiteren Ausgestaltung. Eine denkbare Alternative zu kapitelweisem Vorgehen ist es, in einer ersten Vorlesung nach Kapitel 0 die jeweils einfacheren Abschnitte der Folgekapitel durchzunehmen, ergänzt je nach Hörerkreis vielleicht durch Algorithmen, und die mathematisch tieferen Sätze einer weiterführenden Vorlesung vorzubehalten.

Die zum Verständnis des Textes nötigen Vorkenntnisse beschränken sich auf einige Grundbegriffe aus der linearen Algebra für Kapitel 0.9, aus der Topologie (wie man sie im Analysis-Grundstudium kennenlernt) für Kapitel 3, und aus der Wahrscheinlichkeitstheorie für Kapitel 9. (Genau genommen wird dort sogar nur der Begriff des Wahrscheinlichkeitsraumes selbst vorausgesetzt; alle anderen Begriffe und Hilfsmittel werden noch einmal knapp aber explizit eingeführt.)

Die Bezifferung der Sätze, Propositionen, Lemmas und Korollare erfolgt einheitlich im ganzen Buch durch drei Ziffern: Korollar 1.2.3 etwa findet sich in Kapitel 1, Abschnitt 2, und es folgt auf Satz 1.2.2. Mit dem Prädikat „Satz“ bin ich sicher etwas sparsamer umgegangen, als es üblich ist – in der Absicht, zur besseren Orientierung die besonders zentralen Resultate entsprechend hervorzuheben. In den Notizen am Ende eines jeden Kapitels finden sich Hinweise auf weitere Literatur, darunter auf die Originalquellen aller Sätze, deren Quellenangabe nicht in einer der zitierten Monographien oder Übersichtsartikel zu finden ist. Das Symbol □ bezeichnet meist das Ende eines Beweises. Steht es direkt im Anschluss an die hervorgehobene Aussage selbst, so soll es andeuten, dass der Beweis dieser Aussage nach dem zuvor Gesagten klar sei – und ist eine Aufforderung, dies zu überprüfen! Tiefere Sätze, die ohne Beweis zitiert werden, sind entsprechend durch das Fehlen des □-Symbols als solche zu erkennen.

Um die praktische Vorbereitung einer Vorlesung, die auf diesem Buch oder Teilen daraus aufbaut, zu erleichtern, sind zu Beginn eines jeden Beweises in der Randspalte die Nummern derjenigen Resultate aufgeführt, die in den Beweis eingehen und daher vorher behandelt oder zumindest erwähnt sein sollten. Diese Nummern sind in runde Klam-

mern gesetzt: der Verweis (3.1.2) im Rand neben dem Beweis von Satz 3.3.2 etwa besagt, dass das Lemma 3.1.2 in diesem Beweis verwendet wird. Entsprechend findet sich bereits in der Randspalte neben Lemma 3.1.2 in eckigen Klammern der Hinweis [3.3.2] darauf, dass dieses Lemma einmal im Beweis von Satz 3.3.2 Verwendung finden wird. Diese Verweise in den Randspalten berücksichtigen nur Abhängigkeiten zwischen Resultaten aus verschiedenen Abschnitten (sowohl desselben Kapitels als auch verschiedener Kapitel). Verweise innerhalb eines Abschnitts gibt es nicht; jeder Abschnitt bildet von der Darstellung her eine Einheit und sollte entsprechend von vorne gelesen werden. Wem all dies zu aufwendig ist, der kann sich einfach an die natürliche Reihenfolge der Kapitel und ihrer Abschnitte halten: mit zwei – deutlich im Text gekennzeichneten – Ausnahmen greifen Beweise stets nur auf früher behandelte Resultate zurück.

Wer ein Lehrbuch schreibt, muss sich für eine Terminologie entscheiden – und setzt damit die Freundschaft all jener aufs Spiel, deren Herz an einer anderen hängt. Ich habe lange überlegt, ob ich überhaupt eine deutsche Fassung dieses Buches schreiben sollte. Dies zu tun, dann aber die wohletablierte deutsche Terminologie weitgehend durch Anglizismen zu ersetzen (wie es im lockeren deutschen Sprachgebrauch ja durchaus verbreitet ist), erschien mir jedoch als absurd – und das Studium eines Anfängers auch nicht gerade erleichternd. Der Text folgt daher im wesentlichen der auf König und Wagner zurückgehenden deutschen Begriffsbildung;[1] Andersdenkende bitte ich um Nachsicht! Um dennoch ein wenig beim Brückenschlag zur englischen Terminologie zu helfen, gibt das Hauptregister am Ende des Buches zu jedem deutschen Fachwort in Klammern das in der englischen Fassung dieses Buches verwendete Wort, und der englisch-deutsche Index gibt für die gebräuchlichsten englischen Ausdrücke neben der Textstelle ihrer Definition auch ihre deutsche Entsprechung an.

Fast jedes Buch enthält Fehler, und dieses Buch wird kaum eine Ausnahme sein. Alle, denen verbliebene Fehler oder Verbesserungsmöglichkeiten auffallen, bitte ich herzlich, sie mir mitzuteilen: entweder direkt, oder über

http://www.springer.de/catalog/html-files/deutsch/math/3540609180.html

Dies ist die zu diesem Buch gehörige Web-Seite bei Springer: dort wird es neben der Verlagsinformation einen *link* geben zu einer von mir unterhaltenen Seite, die unter anderem notwendig gewordene Korrekturen in möglichst lesbarer Form bereitstellen soll.

An einem Lehrbuch ist fast nichts wirklich neu; selbst Stil und Materialauswahl sind unumgänglich durch Vorbilder geprägt. Das Lehrbuch,

[1] mehr dazu in den Notizen zu Kapitel 0

welches mich geprägt hat wie kein anderes, ist jenes am Anfang dieses Vorworts bereits mit angedeutete Springer-Buch von B. Bollobás: in der Vorlesung seines Autors, die jenes Buch nachzeichnet, habe ich meine erste Graphentheorie gelernt. Alle, die jenes Buch kennen, werden seinen Einfluss hier spüren – bei allen Unterschieden in Stoff und Darbietung.

Weiter geht mein Dank an alle, die mir durch Rat bei der Stoffauswahl, durch Literaturhinweise, oder bei der Fehlersuche geholfen haben. Besonders profitiert habe ich von der Hilfe von N. Alon, Th. Andreae, W.A. Deuber, R. Halin, M. Hintz, A. Huck, R. Klimmek, D. Kühn, L. Lovász, W. Mader, J. Nešetřil, P. Niemeyer, H.J. Prömel, A. Schrijver, A.D. Scott, D. Seese, P.D. Seymour, A. Steger, M. Stiebitz, Th. Szücs (für die Abbildungen), R. Thomas, C. Thomassen, B. Toft, W. Vogler, K. Waas und G.M. Ziegler. Ganz besonders danken aber möchte ich meinem Mitarbeiter und Kollegen Tommy R. Jensen: er hat die Entstehung dieses Buches kritisch begleitet von der Konzeption der am schwierigsten darzustellenden Beweise bis hin zu all den fehlenden Kommas, er hat mich viel über Färbungen gelehrt und alles, was ich über k-Flüsse weiß, und er hat bei all diesem nie seinen Gleichmut verloren, wenn ich mich einmal mehr entschied, einen von ihm gefundenen Fehler lieber großzügig zu ignorieren als durch seine Korrektur den vermeintlichen Textfluss zu hemmen...

So wünsche ich allen Lesern viel Freude an der hier dargestellten Mathematik, und ich selbst freue mich auf alle kritischen Kommentare.

RD, im Juni 1996

Zur zweiten Auflage:

Die vorliegende zweite Auflage enthält neben Korrekturen, Glättungen im Text und einer Reihe von Vereinfachungen in den Beweisen einige Zusätze.

So bietet das Zusammenhangskapitel jetzt zwei wunderschöne und ganz kurze neue Beweise des Menger-Satzes von Göring (bzw. Böhme, Göring und Harant). Im ersten Kapitel gibt es eine formale Einführung normaler Spannbäume – den Informatikern als *Tiefensuchbäume* bekannt – sowie der durch Spannbäume induzierten Baumordnung auf der Eckenmenge eines Graphen. Das Paarungskapitel enthält zusätzlich einen direkten Beweis des Satzes von Tutte über 1-Faktoren, das Kapitel über Teilstrukturen einen Beweis von Lemma 6.4.3, der die Anwendung des Regularitätslemmas besonders schön illustriert, und das Minorenkapitel eine noch ausführlichere Behandlung von Baumzerlegungen und Baumweite.

Am deutlichsten verändert hat sich in der Tat das Minorenkapitel: unter anderem bietet es jetzt einen kurzen Beweis des Dualitätssatzes

zur Baumweite – einen Beweis, der nur in diesem Buch zu finden ist (und in der englischen Parallelausgabe).

Neu ist schließlich der Anhang mit Lösungshinweisen zu den Übungsaufgaben. Diese sind im wesentlichen von Tommy Jensen erarbeitet worden, dem ich dafür herzlich danke. Wer sich gleich nach dem Lesen einer Aufgabe den entsprechenden Hinweis anschaut, wird diesen vielleicht nicht immer besonders erhellend finden. Das ist durchaus so gemeint: Sinn der Hinweise ist natürlich nicht, die eigene Beschäftigung mit den Aufgaben zu ersetzen, sondern demjenigen auf die richtige Spur zu helfen, der die Fragestellung bereits verstanden und sich eine zeitlang mit der Aufgabe beschäftigt hat, aber vielleicht einem falschen Ansatz gefolgt ist. Insbesondere sind die Aufgaben auch mit den Hinweisen für die Übungsgruppenarbeit parallel zur Vorlesung geeignet.

Ergänzend sei noch auf die englische Ausgabe des Buchs verwiesen (Springer GTM 173). Dort finden sich unter anderem ein neuer Beweis (von Gasparian) des Satzes über perfekte Graphen von Lovász, ein Beweis des Regularitätslemmas, sowie in der zweiten Auflage ein kurzer Beweis (8 Seiten) des fundamentalen Satzes 10.4.3 von Robertson & Seymour, dass hohe Baumweite jeden plättbaren Graphen als Minor erzwingt.

Die Web-Seiten dieses Buchs sind mir nach Hamburg gefolgt und jetzt in

http://www.math.uni-hamburg.de/home/diestel/books/graphentheorie/

beheimatet. Dort finden sich, wie bisher, auch die aktuellen Korrekturen – übrigens nicht in ermüdendem Logbuch-Format sondern schön lesbar als Randbemerkungen im PDF-Bild der Originalseite.

Mein Dank geht an alle, die durch Anregungen und Kritik diese zweite Auflage haben verbessern helfen. Ich bleibe auch weiterhin an Verbesserungsvorschlägen und Korrekturen interessiert!

RD, im Juli 2000

Zur dritten Auflage:

Mit der dritten Auflage ist nun auch die deutsche Ausgabe dieses Buchs „erwachsen geworden“: hinkte sie in den ersten beiden Auflagen dem englischen Original noch hier und da ein wenig hinterher, so ist sie ihm jetzt durchweg im Detail angeglichen und damit fast ebenbürtig. Es gibt weiterhin drei größere Teile, die sich nur in der englischen Ausgabe finden: das auch dort neue Kapitel über unendliche Graphen, den Beweis

des Regularitätslemmas, und zwei Beweise aus dem Minorenkapitel.[2] Der gesamte Rest jedoch ist jetzt eins zu eins übertragen. Ganz erheblich geholfen dabei hat mir Melanie Win Myint; ihr gebührt dafür – wie auch für die Erstellung des Besten Registers Aller Zeiten – mein aufrichtiger Dank.

Was also ist neu? Eine ganze Menge. Zum einen habe ich Themen neu aufgenommen, die in den letzten Jahren Gegenstand neuerer Entwicklungen waren und daher in einer modernen einführenden Darstellung der Graphentheorie nicht fehlen sollten. Dazu gehören durchaus einige Klassiker – etwa der Satz von Erdős und Pósa, oder stabile Paarungen – aber auch ganz neue Ergebnisse, wie der Struktursatz von Robertson und Seymour für die Graphen, die einen beliebigen fest vorgegebenen Minor nicht enthalten. Dieser Satz spielt eine zunehmend zentrale Rolle nicht nur in der Minorentheorie, ist aber nirgendwo sonst in kompakter Form nachzulesen. Auch hier braucht die Darstellung allein seiner Aussage, einschließlich aller notwendigen Begriffe, eine ganze Seite – doch es lohnt sich!

Weiter gibt es jetzt noch mehr Hintergrundsanalysen zu wichtigen Beweisen, die dem Leser ihre Entstehung und wichtigsten Ideen nahebringen sollen. Ein typisches Beispiel etwa ist eine nachträgliche Analyse, wie genau das Regularitätslemma im Beweis des Satzes von Erdős und Stone zur Anwendung kommt: während der Beweis selbst mit der nicht nachvollziehbaren Wahl aller relevanten Parameter für das Regularitätslemma beginnt, geht die nachträgliche Analyse von den leitenden Ideen aus und endet mit der dadurch nach und nach determinierten Wahl der Parameter.

Schließlich gibt es eine Unmenge an Verbesserungen im Detail, einschließlich einiger eleganter neuer Beweise klassischer Sätze. Bereits gut eingeführte Beweise habe ich dabei in der Substanz nicht angetastet, sondern allenfalls noch ein wenig geglättet: wer das Buch bereits als Vorlesungstext benutzt und gemocht hat, kann seine Notizen dazu weiterhin verwenden...

Einmal mehr geht mein Dank an alle, die durch Hinweise und Anregungen zur Verbesserung oder Konsolidierung dieser Neuauflage beigetragen haben. Dazu gehören nicht zuletzt die Hörer meiner Graphentheorie-Vorlesung im Wintersemester 2005/06: bis wenige Tage vor Drucklegung haben sie das Skript geprüft und Verbesserungen vorgeschlagen. Etliche werden jetzt „ihren“ Beitrag im Text wiederfinden... Allen bisherigen und neuen Lesern ein weiteres Mal viel Freude!

RD, im Januar 2006

[2] Dies sind der Beweis des Struktursatzes (10.4.3) von Robertson und Seymour für die Graphen ohne einen gegebenen plättbaren Minor, sowie der darauf aufbauende Beweis des „allgemeinen Kuratowskisatzes“, dass die Einbettbarkeit in eine gegebene Fläche stets durch das Verbot nur endlich vieler Minoren charakterisierbar ist.

Inhalt

Vorwort vii

0. Grundbegriffe 1
0.1 Graphen* 2
0.2 Der Grad einer Ecke* 5
0.3 Wege und Kreise* 7
0.4 Zusammenhang* 11
0.5 Bäume und Wälder* 14
0.6 Bipartite Graphen* 18
0.7 Kontraktion und Minoren* 19
0.8 Eulersche Graphen* 23
0.9 Algebraisches 24
0.10 Verwandte Begriffsbildungen 30
Übungen 32
Notizen 35

1. Paarungen, Packungen, Überdeckungen 37
1.1 Paarungen in bipartiten Graphen* 38
1.2 Paarungen in allgemeinen Graphen$^{(*)}$ 44
1.3 Packungen und Überdeckungen 48
1.4 Kantendiskunkte Spannbäume und Arborizität 51
1.5 Überdeckungen durch disjunkte Wege 55

* Die mit einem Sternchen gekennzeichneten Abschnitte und die Anfänge der mit $^{(*)}$ gekennzeichneten Abschnitte bilden zusammen einen Stoffvorschlag für eine einsemestrige einführende Vorlesung.

Übungen 56
Notizen 59

2. Zusammenhang 61
2.1 2-zusammenhängende Graphen und Untergraphen* 61
2.2 Die Struktur 3-zusammenhängender Graphen(*) 64
2.3 Der Satz von Menger* 69
2.4 Der Satz von Mader 75
2.5 Wegverbindungen(*) 77
Übungen 86
Notizen 89

3. Graphen in der Ebene 91
3.1 Topologische Voraussetzungen* 92
3.2 Ebene Graphen* 94
3.3 Zeichnungen 101
3.4 Plättbarkeit: der Satz von Kuratowski* 106
3.5 Algebraische Plättbarkeitskriterien 111
3.6 Plättbarkeit und Dualität 113
Übungen 116
Notizen 119

4. Färbungen 121
4.1 Landkarten und das Färben ebener Graphen* 122
4.2 Eckenfärbungen* 124
4.3 Kantenfärbungen* 129
4.4 Listenfärbungen 132
4.5 Perfekte Graphen 137
Übungen 145
Notizen 149

5. Flüsse 151
5.1 Flüsse und Rundflüsse(*) 152
5.2 Netzwerke* 153
5.3 Gruppenwertige Flüsse 157
5.4 k-Flüsse für kleine k 162

5.5 Flüsse und Färbungen 165
5.6 Die Tutteschen Flussvermutungen 169
Übungen 173
Notizen 175

6. Extremale Graphentheorie 177
6.1 Teilgraphen* 178
6.2 Minoren$^{(*)}$ 184
6.3 Die Hadwiger-Vermutung* 187
6.4 Szemerédis Regularitätslemma 191
Übungen 199
Notizen 202

7. Ramseytheorie für Graphen 205
7.1 Der Satz von Ramsey* 206
7.2 Ramseyzahlen von Graphen 210
7.3 Ramsey induziert 213
7.4 Ramseysätze und Zusammenhang 224
Übungen 227
Notizen 228

8. Hamiltonkreise 231
8.1 Einfache hinreichende Bedingungen* 231
8.2 Hamiltonkreise und Gradsequenz* 235
8.3 Hamiltonkreise im Quadrat eines Graphen 237
Übungen 246
Notizen 247

9. Zufallsgraphen 249
9.1 Der Begriff des Zufallsgraphen* 250
9.2 Die probabilistische Methode* 256
9.3 Eigenschaften fast aller Graphen* 259
9.4 Schwellenfunktionen und zweite Momente 264
Übungen 270
Notizen 272

10. Minoren, Bäume und WQO 275
10.1 Wohlquasiordnung* 276
10.2 Der Minorensatz für Bäume* 277
10.3 Baumzerlegungen 279
10.4 Baumweite und verbotene Minoren 287
10.5 Der Minorensatz$^{(*)}$ 292
Übungen 295
Notizen 299

Lösungshinweise für alle Übungen 303
Register 323
Englisch-deutscher Index 339
Symbolverzeichnis 343

0 Grundbegriffe

In diesem Kapitel stellen wir in relativ kompakter Form die in der Graphentheorie üblichen Grundbegriffe zusammen. Glücklicherweise sind fast all diese Begriffe und ihre Bezeichnungen anschaulich und ganz leicht zu merken; schwierigere Begriffsbildungen, die erst vor dem Hintergrund gewisser Sachverhalte natürlich werden, führen wir dann jeweils später ein.

Bereits ab Abschnitt 0.2 werden wir schon laufend kleinere aber wichtige Tatsachen beweisen, um so die neuen Worthülsen gleich mit etwas Leben zu erfüllen. Häufig wird uns dabei die Frage leiten, wie verschiedene soeben definierte Grapheninvarianten voneinander abhängen: diese Frage zieht sich wie ein roter Faden durch wesentliche Teile der Graphentheorie, und es ist gut, von Anfang an ein Gespür dafür zu entwickeln.

Die Menge der natürlichen Zahlen, einschließlich der Null, bezeichnen wir mit $\mathbb{N}$. Mit $\mathbb{Z}_n$ bezeichnen wir den Restklassenring $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen modulo n; seine Elemente schreiben wir kurz als $\overline{i} := i + n\mathbb{Z}$. Ist x eine reelle Zahl, so bezeichnet $\lfloor x \rfloor$ die größte ganze Zahl $\leqslant x$, und $\lceil x \rceil$ die kleinste ganze Zahl $\geqslant x$. Mit log bezeichnete Logarithmen haben die Basis 2. Eine Menge $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_k\}$ disjunkter Teilmengen einer Menge A ist eine *Partition* von A, wenn $\bigcup \mathcal{A} := \bigcup_{i=1}^{k} A_i = A$ ist und $A_i \neq \emptyset$ für jedes i. Mit $[A]^k$ bezeichnen wir die Menge aller k-elementigen Teilmengen von A. Wir verwenden den Ausdruck „entweder ... oder“ synonym mit „oder“, also im einschließenden Sinne; die längere Version dient lediglich dem Ziel größerer syntaktischer Klarheit. Die Worte „ohne Beschränkung der Allgemeinheit“ kürzen wir als „oBdA“ ab.

$\mathbb{N}$
$\mathbb{Z}_n$
$\lfloor x \rfloor, \lceil x \rceil$
log
$\bigcup \mathcal{A}$
Partition
$[A]^k$

0.1 Graphen

Graph Ein *Graph* ist ein Paar $G = (V, E)$ disjunkter Mengen mit $E \subseteq [V]^2$; die Elemente von E sind also 2-elementige Teilmengen von V. Die Elemente von V nennt man die *Ecken* (oder *Knoten*) des Graphen G, die *Ecken* *Kanten* Elemente von E seine *Kanten*. Bildlich kann man G darstellen, indem man seine Ecken als Punkte zeichnet und zwei dieser Punkte immer dann durch eine Linie verbindet, wenn die entsprechenden Ecken eine Kante sind (Abb. 0.1.1). Wie man diese Punkte und Linien zeichnet, ob gerade oder geschwungen, disjunkt oder überkreuz, ist eine Frage der Zweckmäßigkeit und der Ästhetik: die formale Definition eines Graphen ist jedenfalls von seiner bildlichen Darstellung unabhängig.

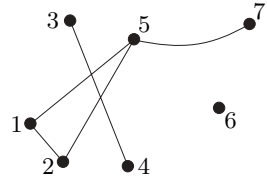


Abb. 0.1.1. Der Graph auf $V = \{1, \dots, 7\}$ mit der Kantenmenge $E = \{\{1,2\}, \{1,5\}, \{2,5\}, \{3,4\}, \{5,7\}\}$

auf Ein Graph $G = (W, F)$ ist ein Graph *auf* W; seine Eckenmenge
$V(G), E(G)$ W bezeichnen wir mit $V(G)$, seine Kantenmenge F mit $E(G)$. Statt $v \in V(G)$ oder $e \in E(G)$ schreiben wir gelegentlich auch einfach $v \in G$ oder $e \in G$. Der Graph G heißt *endlich* bzw. *unendlich* je nachdem, ob $V(G)$ endlich oder unendlich ist. Ist nichts anderes gesagt, so sind unsere
$|G|$, $\|G\|$ Graphen endlich. Statt $|V(G)|$ schreiben wir auch $|G|$ und nennen $|G|$
Ordnung die *Ordnung* von G; statt $|E(G)|$ schreiben wir $\|G\|$.

$\emptyset$ Den *leeren* Graphen $(\emptyset, \emptyset)$ bezeichnen wir kurz mit $\emptyset$. Einen Gra-
trivialer Graph phen der Ordnung 0 oder 1 nennen wir *trivial*. Manchmal, etwa bei Induktionsanfängen, kommen triviale Graphen gelegen; anderswo bilden sie lästige Ausnahmen. Um die Darstellung der wesentlichen Aussagen nicht unnötig zu verkomplizieren, werden wir solche Ausnahmen, insbesondere für den leeren Graphen $\emptyset$, in der Regel nicht explizit nennen sondern großzügig ignorieren.

Eine Ecke v und eine Kante e *inzidieren* miteinander und heißen
inzident *inzident*, wenn $v \in e$ gilt. Die beiden Ecken einer Kante sind ihre *Endecken*, und sie *verbindet* diese Ecken. Für eine Kante $\{x, y\}$ schreiben wir kürzer auch xy (oder yx). Ist $x \in X \subseteq V$ und $y \in Y \subseteq V$, so ist xy eine *X–Y-Kante*. Die Menge aller X–Y-Kanten in einer Menge
$E(X, Y)$ E bezeichnen wir mit $E(X, Y)$; für $E(\{x\}, Y)$ und $E(X, \{y\})$ schreiben wir kurz $E(x, Y)$ und $E(X, y)$. Die Menge $E(v, V \setminus \{v\})$ aller mit v
$E(v)$ inzidenten Kanten bezeichnen wir mit $E(v)$.

Zwei Ecken x, y von G sind (*adjazent* oder) *benachbart* in G und heißen *Nachbarn* voneinander, wenn $xy \in E(G)$ ist. Zwei Kanten $e \neq f$ sind *benachbart*, falls sie eine gemeinsame Endecke haben. Sind je zwei Ecken von G benachbart, so heißt G *vollständig*. Einen vollständigen Graphen auf n Ecken bezeichnen wir mit K^n; ein K^3 ist ein *Dreieck*.

Nachbarn *vollständig* K^n

Paarweise nicht benachbarte Ecken oder Kanten nennt man *unabhängig*. Formaler: eine Teilmenge von V oder von E heißt *unabhängig*, wenn ihre Elemente paarweise nicht benachbart sind. Unabhängige Eckenmengen nennt man auch *stabil*.

unabhängig

Im Folgenden sei $G' = (V', E')$ ein weiterer Graph. G heißt *isomorph* zu G', geschrieben $G \simeq G'$, wenn es eine Bijektion $\varphi: V \to V'$ gibt mit $xy \in E \Leftrightarrow \varphi(x)\varphi(y) \in E'$ für alle $x, y \in V$. Eine solche Abbildung φ ist ein *Isomorphismus*; ist $G = G'$, so nennt man φ einen *Automorphismus* von G. Wir unterscheiden meist nicht zwischen isomorphen Graphen, schreiben also $G = G'$ statt $G \simeq G'$, sprechen von „dem“ vollständigen Graphen auf 17 Ecken usw. Wollen wir in informellem Sprachgebrauch ausdrücken, dass es uns bei der Beschreibung eines Graphen nur um seinen Isomorphietyp geht, so nennen wir den Graphen *abstrakt*.

isomorph $\simeq$

Eine unter Isomorphie abgeschlossene Klasse von Graphen nennen wir eine *Eigenschaft* von Graphen. „Ein Dreieck zu enthalten“ etwa ist eine Grapheneigenschaft: hat G drei paarweise benachbarte Ecken, so hat auch jeder zu G isomorphe Graph drei solche Ecken. Eine Funktion, die Graphen als Argumente hat und isomorphen Graphen gleiche Werte zuordnet, nennt man eine (Graphen-) *Invariante*. Eckenzahl und Kantenzahl sind einfache Grapheninvarianten; die größte Anzahl paarweise benachbarter Ecken etwa wäre eine weitere.

Eigenschaft *Invariante*

Wir setzen $G \cup G' := (V \cup V', E \cup E')$ und $G \cap G' := (V \cap V', E \cap E')$. Ist $G \cap G' = \emptyset$, so heißen G und G' *disjunkt*. Gilt $V' \subseteq V$ und $E' \subseteq E$, so ist G' ein *Teilgraph* von G (und G ein *Obergraph* von G'), geschrieben $G' \subseteq G$. Informell sagen wir häufig einfach, dass G den Graphen G' *enthält*. Der Teilgraph G' heißt *induziert* oder *aufgespannt* (von V' in G), wenn er *alle* Kanten $xy \in E$ mit $x, y \in V'$ enthält. Einen solchen induzierten Teilgraphen nennen wir einen *Untergraphen*. Wir bezeichnen G' dann auch mit $G[V']$; dies ist also der Graph auf V', dessen Kanten genau die Kanten von G sind, deren Endecken beide in V' liegen. Ist G' ein Teilgraph von G (aber nicht notwendig ein Untergraph), so schreiben

$G \cap G'$ *Teilgraph* $G' \subseteq G$ *induziert* *Untergraph* $G[V']$

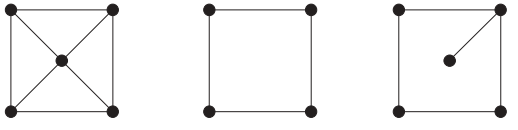


Abb. 0.1.2. Ein Graph G mit Teilgraphen G' und G'': G' ist Untergraph von G, G'' ist es nicht.

auf-spannend

wir statt $G[V(G')]$ auch kürzer $G[G']$. Umgekehrt nennt man $G' \subseteq G$ einen *aufspannenden* Teilgraphen von G, wenn V' ganz G aufspannt, d.h. wenn $V' = V$ ist.

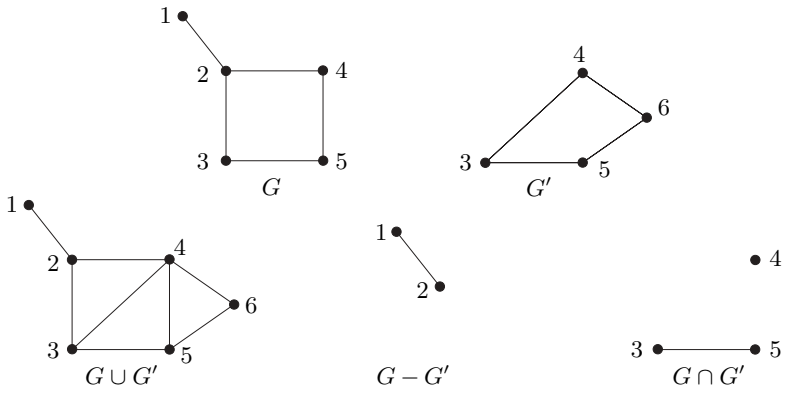


Abb. 0.1.3. Vereinigung, Differenz, Durchschnitt; die Ecken 2,3,4 spannen in $G \cup G'$ ein Dreieck auf, nicht aber in G

$G - U$

$G - H$

$G - F$

$G + F$

kanten-maximal

Ist U eine beliebige Menge (meist eine Teilmenge von V), so schreiben wir $G - U$ statt $G[V \setminus U]$; mit anderen Worten, $G - U$ entsteht aus G durch *Löschen* aller Ecken in $U \cap V$ und aller mit diesen Ecken inzidenten Kanten. Ist $U = \{v\}$ einelementig, so schreiben wir $G - v$ statt $G - \{v\}$. Ist H ein weiterer Graph, so schreiben wir statt $G - V(H)$ kurz $G - H$. Ist F irgendeine Teilmenge von $[V]^2$, so setzen wir $G - F := (V, E \setminus F)$ und $G + F := (V, E \cup F)$; statt $G - \{e\}$ und $G + \{e\}$ schreiben wir $G - e$ und $G + e$. Wir nennen G *kantenmaximal* mit einer gegebenen Grapheneigenschaft, wenn G selbst die Eigenschaft hat, aber kein $G + xy$ für nicht benachbarte Ecken $x, y \in G$ sie hat.

minimal
maximal

Sagen wir allgemeiner, ein gegebener Graph sei *minimal* oder *maximal* mit irgendeiner Eigenschaft, so meinen wir (wenn nichts anderes gesagt ist) die Minimalität oder Maximalität hinsichtlich der Teilgraphenbeziehung. Häufig werden wir auch von minimalen oder maximalen Ecken- oder Kantenmengen sprechen; hier ist die zugrundeliegende Relation natürlich einfach die Teilmengenbeziehung.

$G * G'$

Komplement $\overline{G}$

Kantengraph $L(G)$

Sind G und G' disjunkt, so bezeichnet $G * G'$ den Graphen auf $V \cup V'$ mit der Kantenmenge $E \cup E' \cup \{ vv' \mid v \in V \text{ und } v' \in V' \}$. Das *Komplement* $\overline{G}$ von G ist der Graph auf V, in dem zwei Ecken genau dann benachbart sind, wenn sie es in G nicht sind. Der *Kantengraph* $L(G)$ von G ist der Graph auf E, in dem $x, y \in E$ genau dann als Ecken benachbart sind, wenn sie es als Kanten in G sind.

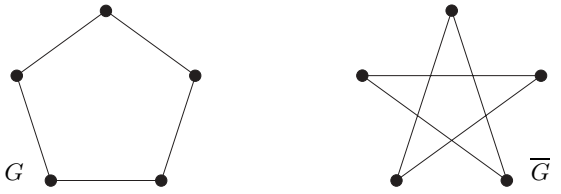


Abb. 0.1.4. Ein Graph, der zu seinem Komplement isomorph ist

0.2 Der Grad einer Ecke

Es sei $G = (V, E)$ ein (nicht leerer) Graph. Die Menge der Nachbarn einer Ecke v bezeichnen wir mit $N_G(v)$, oder kurz mit $N(v)$.[1] Allgemeiner bezeichnet $N(U)$ für $U \subseteq V$ die Menge aller Nachbarn in $V \setminus U$ von Ecken aus U. *$N(v)$*

Der *Grad* (oder die *Valenz*) $d_G(v) = d(v)$ einer Ecke v ist die Anzahl $|E(v)|$ der mit v inzidenten Kanten; nach unserer Definition eines Graphen[2] ist dies gerade die Anzahl der Nachbarn von v. Eine Ecke vom Grad 0 ist *isoliert*. Die Zahl $\delta(G) := \min\{\, d(v) \mid v \in V \,\}$ heißt *Minimalgrad* von G, und $\Delta(G) := \max\{\, d(v) \mid v \in V \,\}$ ist sein *Maximalgrad*. Hat jede Ecke von G den gleichen Grad k, so heißt G *regulär*, oder *k-regulär*. Einen 3-regulären Graphen nennt man auch *kubisch*. *Grad $d(v)$* *isoliert* *$\delta(G), \Delta(G)$* *regulär* *kubisch*

Die Zahl

$$d(G) := \sum_{v \in V} d(v)/|V|$$

$d(G)$

nennt man den *Durchschnittsgrad* von G. Offenbar gilt *Durchschnittsgrad*

$$\delta(G) \leqslant d(G) \leqslant \Delta(G)\,.$$

Der Durchschnittsgrad misst global, was lokal durch die einzelnen Eckengrade ausgedrückt wird: die ungefähre Anzahl der Kanten von G pro Ecke. Manchmal ist es natürlich, dieses Verhältnis direkt auszudrücken; wir schreiben dazu $\varepsilon(G) := |E|/|V|$. *$\varepsilon(G)$*

Natürlich sind die Größen d und ε lediglich zwei Seiten derselben Medaille. Zählen wir nämlich alle Eckengrade in G zusammen, so zählen wir dabei jede Kante vw genau zweimal: einmal von v und einmal von w aus. Es gilt also

$$|E| = \tfrac{1}{2} \sum_{v \in V} d(v) = \tfrac{1}{2} d(G) \cdot |V|\,,$$

[1] Auch bei anderen Bezeichnungen, die den Bezugsgraphen als Index angeben, lassen wir diesen Index häufig fort, wenn der Bezug klar ist.

[2] nicht jedoch bei Multigraphen; vgl. Abschnitt 0.10

und somit

$$\varepsilon(G) = \tfrac{1}{2}d(G)\,.$$

[8.3.3] **Proposition 0.2.1.** *Die Anzahl der Ecken ungeraden Grades in G ist stets gerade.*

Beweis. Wegen $|E| = \frac{1}{2}\sum_{v\in V} d(v)$ ist $\sum d(v)$ eine gerade Zahl. □

Hat ein Graph einen hohen Minimalgrad, lokal betrachtet also überall viele Kanten, so hat er auch global gesehen viele Kanten (gemessen an seiner Eckenzahl): $\varepsilon(G) = \frac{1}{2}d(G) \geqslant \frac{1}{2}\delta(G)$. Umgekehrt erzwingt ein hoher Durchschnittsgrad natürlich keinen hohen Minimalgrad: auch global gesehen „dichte“ Graphen können etwa isolierte Ecken haben. Jeder Graph enthält jedoch einen Teilgraphen, dessen Durchschnittsgrad nicht kleiner ist und dessen Minimalgrad mehr als die Hälfte seines Durchschnittsgrades beträgt:

[0.4.3] [2.5.1] **Proposition 0.2.2.** *Jeder Graph G mit mindestens einer Kante hat einen Teilgraphen H mit $\delta(H) > \varepsilon(H) \geqslant \varepsilon(G)$.*

Beweis. Um H aus G zu konstruieren, wollen wir sukzessive Ecken geringen Grades löschen, bis nur noch Ecken hohen Grades übrig sind. Bis zu welchem Grad $d(v)$ können wir eine Ecke v löschen, ohne dass ε sinkt? Offenbar bis höchstens $d(v) = \varepsilon$: dann löschen wir genau eine Ecke und mit ihr höchstens ε Kanten, d.h. das Verhältnis ε der Kanten- zur Eckenzahl wird nicht sinken.

Formal konstruieren wir, ausgehend von $G =: G_0$, eine Folge $G_0 \supseteq G_1 \supseteq \dots$ von Untergraphen von G wie folgt. Hat G_i eine Ecke v_i vom Grad $d(v_i) \leqslant \varepsilon(G_i)$, so setzen wir $G_{i+1} := G_i - v_i$; hat G_i keine solche Ecke, so beenden wir die Folge mit diesem G_i und setzen $G_i =: H$. Nach Wahl von v_i gilt $\varepsilon(G_{i+1}) \geqslant \varepsilon(G_i)$ für alle i, und damit insbesondere $\varepsilon(H) \geqslant \varepsilon(G)$.

Mit welchem $G_i = H$ kann unsere Folge von Untergraphen enden? Wegen $\varepsilon(K^1) = 0 < \varepsilon(G)$ tritt K^1 nicht unter den G_i auf; insbesondere ist H also nicht leer. Dass H dennoch keine zur Definition eines weiteren Untergraphen G_{i+1} geeignete Ecke v_i enthält, impliziert somit $\delta(H) > \varepsilon(H)$, wie behauptet. □

0.3 Wege und Kreise

Ein *Weg* ist ein nicht leerer Graph $P = (V, E)$ der Form *Weg*

$$V = \{x_0, x_1, \dots, x_k\} \qquad E = \{x_0x_1, x_1x_2, \dots, x_{k-1}x_k\},$$

wobei die x_i paarweise verschieden sind. Die Ecken x_0 und x_k sind die *Endecken* von P; sie sind durch P *verbunden*. Die Ecken $x_1, \dots, x_{k-1}$ sind die *inneren Ecken* von P. Die Anzahl der Kanten eines Weges ist seine *Länge*; den Weg der Länge k bezeichnen wir mit P^k. *Länge* P^k

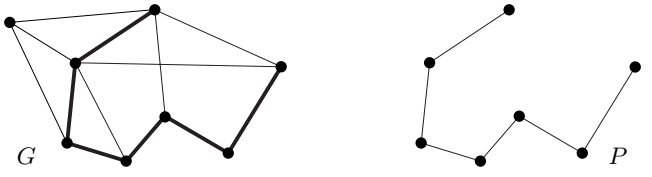


Abb. 0.3.1. Ein Weg $P = P^6$ in G

Oft bezeichnen wir einen Weg durch die natürliche Folge seiner Ecken,[3] schreiben also etwa $P = x_0x_1 \dots x_k$. Wir nennen dann P einen Weg *von* x_0 *nach* x_k, oder auch *zwischen* diesen Ecken, mit *erster* Ecke x_0 und *letzter* Ecke x_k, usw.

Für $0 \leqslant i \leqslant j \leqslant k$ schreiben wir

$$\begin{aligned} Px_i &:= x_0 \dots x_i \\ x_iP &:= x_i \dots x_k \\ x_iPx_j &:= x_i \dots x_j \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \mathring{P} &:= x_1 \dots x_{k-1} \\ P\mathring{x}_i &:= x_0 \dots x_{i-1} \\ \mathring{x}_iP &:= x_{i+1} \dots x_k \\ \mathring{x}_iP\mathring{x}_j &:= x_{i+1} \dots x_{j-1} \end{aligned}$$

für die entsprechenden Teilwege von P. Ähnliche offensichtliche Schreibweisen, wie etwa $PxQyR$ statt $Px \cup xQy \cup yR$, verwenden wir für Wege, die aus anderen Wegen durch Aneinanderhängen gewonnen worden sind.

Für Eckenmengen A, B nennen wir P einen *A–B-Weg*, wenn $V(P) \cap A = \{x_0\}$ ist und $V(P) \cap B = \{x_k\}$. Einen $\{a\}$–B-Weg bezeichnen wir kürzer als *a–B-Weg*, usw. Zwei oder mehr Wege heißen *A–B-Weg*

[3] Genauer, durch eine der beiden natürlichen Folgen: auch $x_k \dots x_0$ bezeichnet den Weg P. Dennoch ist es oft nützlich, sich informell auf eine dieser beiden linearen Ordnungen von $V(P)$ beziehen zu können, und zu deren Festlegung dient die informelle Schreibweise $P = x_0 \dots x_k$.

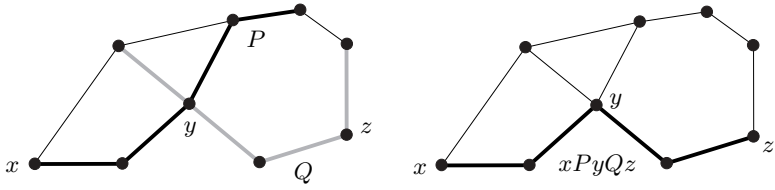


Abb. 0.3.2. Wege P, Q und $xPyQz$

kreuzungsfrei

kreuzungsfrei, wenn keiner eine innere Ecke eines anderen enthält. Zwei a–b-Wege etwa sind genau dann kreuzungsfrei, wenn sie bis auf a und b disjunkt sind.

H-Weg

Ist H ein Graph, so nennen wir P einen *H-Weg*, wenn P nicht trivial ist und den Graphen H genau in seinen Endecken x_0, x_k trifft. Ein Weg der Länge 1 mit Endecken in H gilt genau dann als H-Weg, wenn seine Kante nicht Kante von H ist.

Kreis

Ist $P = x_0 \dots x_{k-1}$ ein Weg und $k \geqslant 3$, so ist der Graph $C := P + x_{k-1}x_0$ ein *Kreis*. Auch einen Kreis bezeichnen wir häufig kurz durch seine (zyklische) Eckenfolge, im obigen Beispiel also etwa $C = x_0 \dots x_{k-1}x_0$. Die *Länge* eines Kreises ist wieder die Anzahl seiner Kanten, und den Kreis der Länge k bezeichnen wir mit C^k.

Länge

C^k

Taillenweite $g(G)$

Umfang

Die Länge eines kürzesten Kreises in $(\subseteq)$ einem Graphen G ist die *Taillenweite* $g(G)$ von G, die Länge eines längsten Kreises der *Umfang*. (Enthält G keinen Kreis, so habe G Taillenweite ∞ und Umfang null.) Eine Kante von G, die zwei Ecken eines Kreises in G verbindet aber nicht selbst Kante des Kreises ist, ist eine *Sehne* dieses Kreises; ein Kreis in G ist also genau dann sehnenlos, wenn er als Teilgraph in G induziert ist.

Sehne

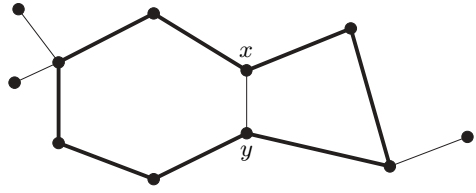


Abb. 0.3.3. Ein C^8 mit Sehne xy, und induzierte C^6, C^4

Hat G hohen Minimalgrad, so enthält G lange Wege und Kreise (vgl. Übung 7):

[0.4.3] [2.5.1]

Proposition 0.3.1. *Jeder Graph G enthält einen Weg der Länge $\delta(G)$ und einen Kreis der Länge mindestens $\delta(G)+1$ (für $\delta(G) \geqslant 2$).*

Beweis. Es sei $x_0 \dots x_k$ ein längster Weg in G. Alle Nachbarn von x_k in G liegen dann auf diesem Weg (Abb. 0.3.4). Es folgt $k \geqslant d(x_k) \geqslant \delta(G)$. Ist $i < k$ minimal mit $x_i x_k \in E(G)$, so ist $x_i \dots x_k x_i$ ein Kreis der Länge mindestens $\delta(G)+1$. □

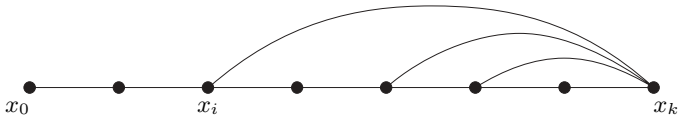


Abb. 0.3.4. Ein längster Weg $x_0 \dots x_k$, und die Nachbarn von x_k

Minimalgrad und Taillenweite hängen (bei variabler Eckenzahl) hingegen nicht zusammen; wie wir in Kapitel 9 sehen werden, gibt es Graphen, die gleichzeitig beliebig hohen Minimalgrad und beliebig hohe Taillenweite haben.

Abstand

$d_G(x, y)$

Durchmesser $\operatorname{diam} G$

Der *Abstand* zweier Eckenmengen X, Y in G ist die geringste Länge eines X–Y-Weges in G; existiert kein solcher Weg, so sei ihr Abstand unendlich. Den Abstand zweier einzelner Ecken x und y bezeichnen wir mit $d_G(x, y)$. Der größte Abstand zweier Ecken in G ist der *Durchmesser* $\operatorname{diam} G$ von G.

Durchmesser und Taillenweite eines Graphen hängen natürlich zusammen:

Proposition 0.3.2. *Für jeden Graphen G, der einen Kreis enthält, gilt $g(G) \leqslant 2 \operatorname{diam} G + 1$.*

Beweis. Es sei C ein kürzester Kreis in G. Ist $g(G) \geqslant 2 \operatorname{diam} G + 2$, so enthält C zwei Ecken, die in C einen Abstand von mindestens $\operatorname{diam} G + 1$ haben. In G haben diese Ecken geringeren Abstand; ein kürzester Weg P zwischen ihnen liegt somit nicht in C. Folglich enthält P einen C-Weg xPy. Zusammen mit dem kürzeren der beiden x–y-Wege in C ergibt xPy einen kürzeren Kreis als C, mit Widerspruch. □

zentral

Radius $\operatorname{rad} G$

Eine Ecke heißt *zentral* in G, wenn ihr größter Abstand von anderen Ecken möglichst klein ist. Dieser Abstand ist der *Radius* von G, geschrieben $\operatorname{rad} G$; formal ist also $\operatorname{rad} G = \min_{x \in V(G)} \max_{y \in V(G)} d_G(x, y)$. Wie man leicht sieht (Übung), gilt

$$\operatorname{rad} G \leqslant \operatorname{diam} G \leqslant 2 \operatorname{rad} G \,.$$

Durchmesser und Radius sind nicht mit Minimal-, Durchschnitts- oder Maximalgrad korreliert, solange wir nichts über die Ordnung des Graphen sagen. Graphen mit hohem Durchmesser und Minimalgrad haben jedoch viele Ecken (mehr als ihr Durchmesser oder Minimalgrad alleine es erzwingen; siehe Übung 8), und Graphen mit geringem Durchmesser und Maximalgrad haben wenige Ecken:

[7.4.1] [7.4.2]

Proposition 0.3.3. *Ein Graph G mit Radius $\leqslant k$ und Maximalgrad höchstens $d \geqslant 3$ hat weniger als $\frac{d}{d-2}(d-1)^k$ Ecken.*

Beweis. Es sei z eine zentrale Ecke in G. Bezeichnet D_i die Menge der Ecken von G mit Abstand i von z, so ist $V(G) = \bigcup_{i=0}^{k} D_i$, und es gilt $|D_0| = 1$ und $|D_1| \leqslant d$. Für $i \geqslant 1$ gilt $|D_{i+1}| \leqslant (d-1)|D_i|$, da jede Ecke aus D_{i+1} Nachbar einer Ecke in D_i ist, und jede Ecke in D_i höchstens $d-1$ Nachbarn in D_{i+1} hat (da sie einen weiteren Nachbarn in D_{i-1} hat). Induktiv gilt damit $|D_{i+1}| \leqslant d(d-1)^i$ für alle $i < k$, und somit

$$|G| \leqslant 1 + d\sum_{i=0}^{k-1}(d-1)^i = 1 + \frac{d}{d-2}\big((d-1)^k - 1\big) < \frac{d}{d-2}(d-1)^k.$$

□

Ganz ähnlich kann man zeigen, dass Graphen mit hohem Minimalgrad und hoher Taillenweite viele Ecken haben müssen. Zu gegebenen $d \in \mathbb{R}$ und $g \in \mathbb{N}$ sei

$$n_0(d,g) := \begin{cases} 1 + d\displaystyle\sum_{i=0}^{r-1}(d-1)^i & \text{wenn } g =: 2r+1 \text{ ungerade ist;} \\ 2\displaystyle\sum_{i=0}^{r-1}(d-1)^i & \text{wenn } g =: 2r \text{ gerade ist.} \end{cases}$$

Durch Betrachten von Distanzklassen wie im Beweis von Proposition 0.3.3 folgt leicht, dass ein Graph mit Minimalgrad δ und Taillenweite g mindestens $n_0(\delta, g)$ Ecken hat (Übung **6**). Wesentlich tiefer liegt der folgende Satz, nach dem man die gleiche Schranke bereits für hohen Durchschnittsgrad erhält:

Satz 0.3.4. (Alon, Hoory & Linial 2002)
Für jeden Graphen G mit $d(G) \geqslant d \geqslant 2$ und $g(G) \geqslant g \in \mathbb{N}$ gilt $|G| \geqslant n_0(d,g)$.

Ein Aspekt von Satz 0.3.4 ist, dass er die Existenz kurzer Kreise garantiert. Die folgende ganz allgemeine Abschätzung der Taillenweite folgt bereits aus der einfachen Minimalgradversion des Satzes (Übung **6**):

[1.3.1] **Korollar 0.3.5.** *Aus $\delta(G) \geqslant 3$ folgt $g(G) < 2\log|G|$.*

Beweis. Ist $g := g(G)$ gerade, so gilt

$$n_0(3,g) = 2\,\frac{2^{g/2}-1}{2-1} = 2^{g/2} + (2^{g/2} - 2) > 2^{g/2};$$

ist g ungerade, so ist

$$n_0(3,g) = 1 + 3\,\frac{2^{(g-1)/2}-1}{2-1} = \frac{3}{\sqrt{2}}\,2^{g/2} - 2 > 2^{g/2}.$$

Wegen $|G| \geqslant n_0(3,g)$ folgt die Behauptung. □

Ein *Kantenzug* (der *Länge* k) in einem Graphen G ist eine nicht leere Folge $v_0e_0v_1e_1\dots e_{k-1}v_k$ von abwechselnd Ecken und Kanten aus G mit $e_i = \{v_i, v_{i+1}\}$ für alle $i < k$. Ist $v_0 = v_k$, so heißt der Kantenzug *geschlossen*. Ein Kantenzug definiert auf natürliche Weise einen Weg in G, wenn seine Ecken v_i paarweise verschieden sind. Allgemein enthält[4] jeder Kantenzug zwischen zwei Ecken einen Weg zwischen diesen Ecken (Beweis?). *Kantenzug*

0.4 Zusammenhang

Ein nicht leerer Graph heißt *zusammenhängend*, wenn er für je zwei seiner Ecken x, y einen x–y-Weg enthält. Ist $U \subseteq V(G)$ und $G[U]$ zusammenhängend, so nennen wir U *zusammenhängend in* G. *zusammenhängend*

Proposition 0.4.1. *Die Eckenmenge eines zusammenhängenden Graphen G besitzt stets eine Aufzählung $(v_1, \dots, v_n)$ mit der Eigenschaft, dass $G_i := G[v_1, \dots, v_i]$ für jedes i zusammenhängend ist.* [0.5.2]

Beweis. Wähle v_1 beliebig. Es seien nun $v_1, \dots, v_i$ bereits gewählt und $i < |G|$. Wähle eine Ecke $v \in G - G_i$ beliebig. Da G zusammenhängend ist, enthält G einen v–v_1-Weg P. Wähle als v_{i+1} die letzte Ecke von P in $G - G_i$; dann hat v_{i+1} einen Nachbarn in G_i. Dass jedes G_i zusammenhängend ist, folgt hieraus mit Induktion nach i. □

Es sei $G = (V, E)$ ein Graph. Ein maximaler zusammenhängender Teilgraph von G ist eine *Komponente* von G. Beachte, dass Komponenten als zusammenhängende Graphen nicht leer sind; der leere Graph (aber nur dieser) hat somit keine Komponenten. Ein minimaler aufspannender Teilgraph von G, dessen Durchschnitt mit jeder Komponente von G zusammenhängend ist, heißt *Gerüst* von G. *Komponente* *Gerüst*

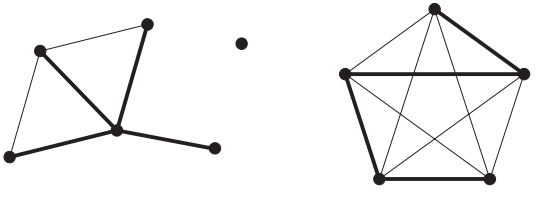


Abb. 0.4.1. Ein Graph mit drei Komponenten und Gerüst $(K^1 * \overline{K^4}) \cup K^1 \cup P^4$

Sind $A, B \subseteq V$ und $X \subseteq V \cup E$, und enthält jeder A–B-Weg in G eine Ecke oder Kante aus X, so *trennt* X die Mengen A und B in G und *trennt*

[4] Für Graphen definierte Bezeichnungen verwenden wir informell gelegentlich auch für Kantenzüge, wenn ihre Bedeutung offensichtlich ist.

Trenner ist ein A–B *-Trenner*; insbesondere gilt dann $A \cap B \subseteq X$. Allgemeiner *trennt* X den Graphen G, wenn X in G zwei Ecken aus $G - X$ trennt.

Artikulation Eine Ecke, die zwei andere Ecken der gleichen Komponente trennt, heißt *Artikulation*.

Brücke Eine Kante heißt *Brücke*, wenn sie ihre Endecken trennt; dies ist offenbar genau dann der Fall, wenn sie auf keinem Kreis liegt.

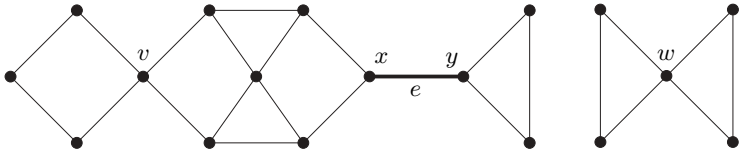


Abb. 0.4.2. Ein Graph mit Artikulationen v, w, x, y und Brücke $e = xy$

Teilung Das ungeordnete Paar $\{A, B\}$ heißt *Teilung* von G, wenn $A \cup B = V$ ist und G keine Kante zwischen $A \setminus B$ und $B \setminus A$ hat. Letzteres ist offensichtlich äquivalent zu der Aussage, dass A von B durch $A \cap B$ getrennt wird. Wenn weder $A \setminus B$ noch $B \setminus A$ leer ist, heißt die Teilung *echt*. Die Zahl $|A \cap B|$ ist die *Ordnung* der Teilung $\{A, B\}$.

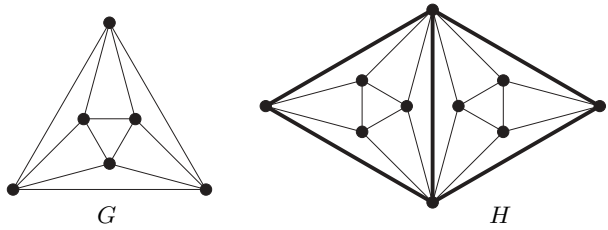
k-zusammenhängend G heißt *k-zusammenhängend* (für $k \in \mathbb{N}$), wenn $|G| > k$ gilt und $G - X$ für jede Eckenmenge $X \subseteq V$ der Mächtigkeit $< k$ zusammenhängend ist, also keine zwei Ecken von G durch weniger als k andere Ecken getrennt werden.

Jeder nicht leere Graph ist somit 0-zusammenhängend, und die 1-zusammenhängenden Graphen sind gerade die nicht trivialen zusammenhängenden Graphen. Die größte natürliche Zahl k, für die G k-zusammenhängend ist, ist der *Zusammenhang* $\kappa(G)$ von G. Insbesondere ist $\kappa(G) = 0$ genau dann, wenn G nicht zusammenhängend oder ein K^1 ist, und es gilt $\kappa(K^n) = n - 1$ für alle $n \geqslant 1$.

$\kappa(G)$

ℓ-kanten-zusammenhängend Ist $|G| > 1$, so heißt G *ℓ-kantenzusammenhängend*, wenn $G - F$ für jede Kantenmenge $F \subseteq E$ der Mächtigkeit $< \ell$ zusammenhängend ist. Das größte $\ell \in \mathbb{N}$, für das G ℓ-kantenzusammenhängend ist, ist der *Kantenzusammenhang* $\lambda(G)$ von G; insbesondere ist $\lambda(G) = 0$, wenn G unzusammenhängend ist.

$\lambda(G)$



Oktaeder *Abb. 0.4.3.* Das *Oktaeder* G (links) mit $\kappa(G) = \lambda(G) = 4$, und ein Graph H mit $\kappa(H) = 2$ und $\lambda(H) = 4$

Proposition 0.4.2. *Ist $|G| \geqslant 2$, so gilt $\kappa(G) \leqslant \lambda(G) \leqslant \delta(G)$.*

Beweis. Die zweite Ungleichung folgt sofort aus der Tatsache, dass die mit einer festen Ecke inzidenten Kanten stets G trennen. Zum Beweis der ersten sei F eine Menge von $\lambda(G)$ Kanten, für die $G - F$ unzusammenhängend ist; F existiert nach Definition von λ und ist ein minimaler Kantentrenner in G. Wir zeigen $\kappa(G) \leqslant |F|$.

Nehmen wir zuerst an, G habe eine Ecke v, die mit keiner Kante aus F inzidiert. Es sei C die v enthaltende Komponente von $G - F$. Die mit Kanten aus F inzidenten Ecken von C trennen dann v von $G - C$. Da F wegen seiner Minimalität keine Kante mit mehr als einer Endecke in C enthält, gibt es höchstens $|F|$ solche Ecken; damit ist $\kappa(G) \leqslant |F|$ wie gewünscht.

Betrachten wir nun den Fall, dass jede Ecke von G mit einer Kante aus F inzidiert. Es sei v eine beliebige Ecke, und C die v enthaltende Komponente von $G - F$. Die Nachbarn w von v mit $vw \notin F$ liegen dann ebenfalls in C. Da sie alle nach Annahme mit (paarweise verschiedenen) Kanten aus F inzidieren, folgt $d_G(v) \leqslant |F|$. Nun trennt aber $N_G(v)$ die Ecke v von allen anderen Ecken in G, was $\kappa(G) \leqslant d(v) \leqslant |F|$ impliziert – es sei denn, es gibt keine solchen anderen Ecken, d.h. es ist $\{v\} \cup N(v) = V$. Da v beliebig gewählt war, dürfen wir dann aber annehmen, dass G vollständig ist. Doch dann gilt $\kappa(G) = \lambda(G) = |G| - 1$ nach Definition. □

Hoher Zusammenhang setzt also hohen Minimalgrad voraus. Umgekehrt sichert hoher Minimalgrad keinen hohen Zusammenhang, ja nicht einmal hohen Kantenzusammenhang. (Beispiele?)

Bereits aus hohem Durchschnittsgrad folgt aber die Existenz eines Teilgraphen hohen Zusammenhangs. Um einen k-zusammenhängenden Teilgraphen zu erzwingen, reicht ein Durchschnittsgrad von $4k$:

Satz 0.4.3. (Mader 1972) [6.2.1] [9.2.3]
Jeder Graph G mit $d(G) \geqslant 4k$, wobei $0 \neq k \in \mathbb{N}$ sei, hat einen $(k+1)$-zusammenhängenden Teilgraphen H mit $\varepsilon(H) > \varepsilon(G) - k$.

(0.2.2) (0.3.1) γ

Beweis. Es sei $\gamma := \varepsilon(G)$ $(\geqslant 2k)$. Wir betrachten die Teilgraphen $G' \subseteq G$ mit

$$|G'| \geqslant 2k \quad \text{und} \quad \|G'\| > \gamma\left(|G'| - k\right). \qquad (*)$$

Solche Graphen G' existieren, da G selbst einer ist; wir wählen ein solches G' minimaler Ordnung und nennen es H. H

Kein Graph G', für den $(*)$ gilt, kann die Ordnung genau $2k$ haben, denn dies würde bedeuten, dass $\|G'\| > \gamma k \geqslant 2k^2 > \binom{|G'|}{2}$ gilt. Die Minimalität von H impliziert daher $\delta(H) > \gamma$: andernfalls könnten wir eine Ecke des Grades höchstens γ löschen und erhielten einen Graphen $G' \subsetneq H$, der immer noch $(*)$ erfüllte. Insbesondere ist $|H| \geqslant \gamma$. Teilen

wir die Ungleichung $\|H\| > \gamma\,|H| - \gamma k$ aus $(*)$ durch $|H|$, so erhalten wir wie gewünscht $\varepsilon(H) > \gamma - k$.

H_1, H_2

Es bleibt $\kappa(H) \geqslant k+1$ zu zeigen. Anderenfalls hat H eine echte Teilung $\{U_1, U_2\}$ der Ordnung höchstens k; wir setzen $H[U_i] =: H_i$. Da jede Ecke $v \in U_1 \setminus U_2$ all ihre $d(v) \geqslant \delta(H) > \gamma$ Nachbarn aus H in H_1 hat, erhalten wir $|H_1| \geqslant \gamma \geqslant 2k$. Analog zeigt man $|H_2| \geqslant 2k$. Da aufgrund der Minimalität von H weder H_1 noch H_2 die Bedingung $(*)$ erfüllt, ist überdies

$$\|H_i\| \leqslant \gamma\,\big(|H_i| - k\big)$$

für $i = 1, 2$. Aber dann gilt

$$\begin{aligned} \|H\| &\leqslant \|H_1\| + \|H_2\| \\ &\leqslant \gamma\,\big(|H_1| + |H_2| - 2k\big) \\ &\leqslant \gamma\,\big(|H| - k\big) \qquad (\text{da } |H_1 \cap H_2| \leqslant k \text{ ist}), \end{aligned}$$

was der Bedingung $(*)$ für H widerspricht. □

0.5 Bäume und Wälder

Wald

Baum

Ein Graph, der keinen Kreis enthält, ist ein *Wald*. Ein zusammenhängender Wald ist ein *Baum*. (Ein Wald ist somit ein Graph, dessen Komponenten Bäume sind.) Die Ecken vom Grad 1 eines Baumes sind seine *Blätter*.[5] Jeder nicht triviale Baum hat ein Blatt; betrachte etwa die Endecken eines längsten Weges. Dies kann bei Induktionsbeweisen für Bäume nützlich sein: entfernt man von einem Baum ein Blatt, so ist der Rest immer noch ein Baum.

Blatt

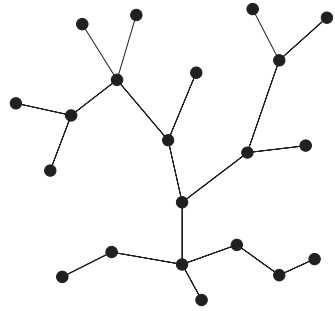


Abb. 0.5.1. Ein Baum

[5] Ausnahme: haben wir eine Ecke des Baumes als *Wurzel* gewählt (s.u.), so gilt sie auch dann nicht als Blatt, wenn sie den Grad 1 hat.

[0.6.1] [0.9.6] [3.2.9]

Satz 0.5.1. *Die folgenden Aussagen sind äquivalent für einen Graphen T:*

(i) *T ist ein Baum;*

(ii) *Zwischen je zwei Ecken enthält T genau einen Weg;*

(iii) *T ist minimal zusammenhängend, d.h. T ist zusammenhängend aber für jede Kante e von T ist $T - e$ nicht zusammenhängend;*

(iv) *T ist maximal kreislos, d.h. T ist kreislos aber für je zwei nicht benachbarte Ecken x, y enthält $T + xy$ einen Kreis.* □

Der Beweis von Satz 0.5.1 ist ganz einfach und eine gute Übung zum Umgang mit den in ihm auftretenden Begriffen. Für zwei Ecken $x, y \in T$ bezeichnen wir (die Notation aus Abschnitt 0.3 erweiternd) mit xTy den nach Satz 0.5.1 (ii) bestimmten x–y-Weg in T. *xTy*

Korollar 0.5.2. *Die Eckenmenge eines Baumes hat stets eine Aufzählung $(v_1, \dots, v_n)$ mit der Eigenschaft, dass v_i für jedes $i \geqslant 2$ genau einen Nachbarn in $\{v_1, \dots, v_{i-1}\}$ hat.*

Beweis. Verwende die Eckenaufzählung aus Proposition 0.4.1. □ (0.4.1)

[0.9.6] [1.4.1] [1.4.4] [3.2.9]

Korollar 0.5.3. *Ein zusammenhängender Graph mit n Ecken ist genau dann ein Baum, wenn er $n - 1$ Kanten hat.*

Beweis. Dass jeder Baum mit n Ecken $n - 1$ Kanten hat, folgt induktiv aus Korollar 0.5.2. Ist umgekehrt G ein beliebiger zusammenhängender Graph mit n Ecken und $n - 1$ Kanten, so betrachten wir ein Gerüst G' von G. Nach Satz 0.5.1 ist G' ein Baum und hat damit bereits selbst $n - 1$ Kanten. Es folgt $G = G'$, d.h. auch G ist ein Baum. □

[7.2.1] [7.2.3]

Korollar 0.5.4. *Ist T ein Baum und G ein Graph mit $\delta(G) \geqslant |T| - 1$, so gilt $T \subseteq G$, d.h. G hat einen zu T isomorphen Teilgraphen.*

Beweis. Finde eine Kopie von T in G induktiv entlang einer Eckenaufzählung von T aus Korollar 0.5.2. □

Ein Baum $T \subseteq G$ heißt *Spannbaum* von G, wenn er ganz G aufspannt, d.h. wenn $V(T) = V(G)$ ist. Ein Spannbaum ist nach Satz 0.5.1 also nichts anderes als ein Gerüst eines zusammenhängenden Graphen; insbesondere besitzt jeder zusammenhängende Graph einen Spannbaum. *Spannbaum*

Gelegentlich ist es hilfreich, eine spezielle Ecke eines Baumes besonders auszuzeichnen, indem man sie seine *Wurzel* nennt. Einen Baum mit fest gewählter Wurzel nennt man einen *Wurzelbaum*. Die Wahl einer Wurzel r aus der Eckenmenge eines Baumes T definiert eine Ordnungsrelation auf $V(T)$: wir schreiben $x \leqslant y$, wenn $x \in rTy$ gilt. *Wurzel* *Baumordnung*

Wir denken uns diese zu T und r gehörige *Baumordnung* vertikal: ist
oben/unten $x < y$, so sagen wir, dass x *unter* y in T liegt, wir nennen

$\lceil t \rceil, \lfloor t \rfloor$

$$\lceil y \rceil := \{\, x \mid x \leqslant y \,\} \quad \text{und} \quad \lfloor x \rfloor := \{\, y \mid y \geqslant x \,\}$$

Abschluss den *Abschluss* von y *nach unten* bzw. von x *nach oben*, und so weiter. Die Wurzel r des Baumes T ist dann seine kleinste Ecke, die Blätter sind die
Blatt maximalen Ecken, die Endecken einer Kante sind stets vergleichbar, und jede Eckenmenge der Form $\{\, x \mid x \leqslant y \,\}$ (wobei y irgendeine feste Ecke ist) ist eine *Kette*, d.h. eine Menge paarweise vergleichbarer Elemente.
Höhe (Beweise?) Die Ecken mit Abstand k von r haben die *Höhe* k und bilden
Schicht die $k$te *Schicht* von T.

Ein Wurzelbaum T in einem Graphen G heißt *normal* in G, wenn die Endecken eines jeden T-Weges in G in der Baumordnung von T vergleichbar sind. Ist T ein Spannbaum von G, so heißt dies nichts weiter, als dass zwei Ecken von T stets vergleichbar sein müssen, wenn sie in G benachbart sind (Abb. 0.5.2).

normaler Baum

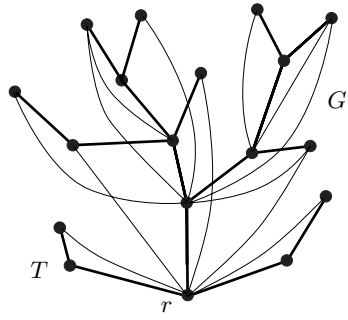


Abb. 0.5.2. Ein normaler Spannbaum mit Wurzel r

Ein normaler Baum T in G kann ein mächtiges Hilfsmittel sein, um die Trennungseigenschaften von G zu beschreiben:

Lemma 0.5.5. *Sei T ein normaler Baum in G.*

(i) *Je zwei Ecken $x, y \in T$ werden in G durch die Menge $\lceil x \rceil \cap \lceil y \rceil$ getrennt.*

(ii) *Ist $S \subseteq V(T) = V(G)$ nach unten abgeschlossen, so werden die Komponenten von $G - S$ von den Mengen $\lfloor x \rfloor$ aufgespannt, für die x in $T - S$ minimal ist.*

Beweis. (i) Es sei P ein beliebiger x–y-Weg in G; wir zeigen, dass P die Menge $\lceil x \rceil \cap \lceil y \rceil$ trifft. Dazu betrachten wir eine minimale Folge $t_1, \ldots, t_n$ in $V(P \cap T)$ mit der Eigenschaft, dass $t_1 = x$ und $t_n = y$ ist und t_i und t_{i+1} in der Baumordnung von T für alle i vergleichbar sind. (Solch eine Folge existiert: die Folge *aller* Ecken von P in $V(T)$ etwa erfüllt

diese Bedingungen, da T normal ist und jedes Segment t_iPt_{i+1} entweder eine Kante von T oder ein T-Weg ist.) In unserer minimalen Folge kann es nun nicht passieren, dass $t_{i-1} < t_i > t_{i+1}$ gilt für irgendein i: dann wären t_{i-1} und t_{i+1} vergleichbar, und durch Löschen von t_i erhielten wir eine kleinere solche Folge. Es gibt also ein $k \in \{1, \dots, n\}$ mit

$$x = t_1 > \dots > t_k < \dots < t_n = y\,.$$

Da t_k in $\lceil x \rceil \cap \lceil y \rceil \cap V(P)$ liegt, folgt die Behauptung.

(ii) Betrachten wir eine Komponente C von $G - S$, und in $V(C)$ ein minimales Element x. Dann gibt es in $V(C)$ kein weiteres minimales Element x': da x und x' unvergleichbar wären, enthielte nach (i) jeder x–x'-Weg in C eine Ecke unter beiden, im Widerspruch zu ihrer Minimalität in $V(C)$. Da jede Ecke von C über irgendeinem minimalen Element von $V(C)$ liegt, liegt sie damit über x. Umgekehrt liegt aber auch jede Ecke $y \in \lfloor x \rfloor$ in C: da S nach unten abgeschlossen ist, liegt der aufsteigende Weg xTy ja ganz in $T - S$. Somit gilt $V(C) = \lfloor x \rfloor$.

Wir zeigen nun, dass x minimal nicht nur in $V(C)$ sondern in ganz $T - S$ ist. Die Ecken unterhalb von x bilden eine Kette $\lceil t \rceil$ in T. Da t zu x benachbart ist, folgt aus der Maximalität von C als Komponente von $G - S$, dass t in S liegt. Da S nach unten abgeschlossen ist, gilt dann auch $\lceil t \rceil \subseteq S$. Damit haben wir bewiesen, dass jede Komponente von $G - S$ die behauptete Form hat.

Ist umgekehrt x irgendein minimales Element von $T - S$, so ist x natürlich auch minimal in der Komponente C von $G - S$, die es enthält. Wie oben folgt $C = \lfloor x \rfloor$. □

Normale Spannbäume werden in der Informatik meist *Tiefensuchbäume* genannt, weil man sie durch ein bestimmtes Suchverfahren auf Graphen definieren und konstruieren kann (Übung 20). Wir beweisen ihre Existenz wie folgt direkt:

Proposition 0.5.6. *Jeder zusammenhängende Graph enthält einen normalen Spannbaum, mit beliebig vorgebbarer Ecke als Wurzel.* [5.5.3]

Beweis. Es sei G ein zusammenhängender Graph, $r \in G$ eine beliebige Ecke, und $T \subseteq G$ ein maximaler in G normaler Baum mit Wurzel r. Wir zeigen, dass T alle Ecken von G enthält.

Wenn nicht, so betrachten wir eine Komponente C von $G - T$. Da T in G normal ist, bildet $N(C)$ eine Kette in T; deren größtes Element heiße x. Wir erweitern nun T zu einem Baum T', indem wir einen Nachbarn $y \in C$ von x hinzufügen und mit x verbinden. Die von T' auf $V(T)$ induzierte Baumordnung stimmt dann mit der Baumordnung von T selbst überein. Um einen Widerspruch zur Maximalwahl von T herzuleiten, zeigen wir jetzt, dass auch T' in G normal ist.

Sei dazu P ein T'-Weg in G. Liegen beide Endecken von P in T, so sind sie in der Baumordnung von T (und somit in der von T') vergleichbar; P ist ja dann auch ein T-Weg, und T ist nach Annahme normal in G. Liegen nicht beide Endecken von P in T, so ist y eine davon, und bis auf seine andere Endecke z liegt P ganz in C. Die Ecke z liegt dann in $N(C)$, und es gilt $z \leqslant x$ nach Wahl von x. Für unseren Nachweis der Vergleichbarkeit von y und z reicht es somit zu zeigen, dass $x < y$ ist. Nach Definition der Baumordnung von T' ist dies gleichbedeutend mit $x \in rT'y$, was schon deshalb gilt, weil x der einzige Nachbar von y in T' ist. □

0.6 Bipartite Graphen

r-partit

Es sei $r \geqslant 2$ eine natürliche Zahl. Ein Graph $G = (V, E)$ heißt *r-partit*, wenn eine Partition von V in r Teile existiert, so dass die Endecken einer jeden Kante von G in verschiedenen Partitionsklassen liegen: Ecken aus der gleichen Klasse dürfen nicht benachbart sein. Ein 2-partiter Graph heißt auch *bipartit* (oder *paar*).

bipartit

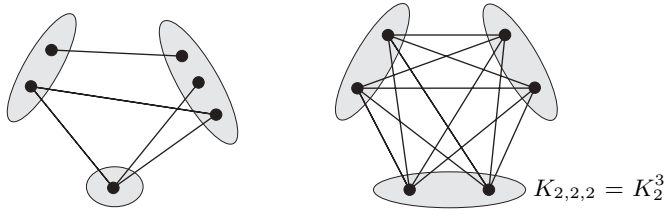


Abb. 0.6.1. Zwei 3-partite Graphen

vollständig multipartit

Ist G ein r-partiter Graph, in dem *je* zwei Ecken aus verschiedenen Klassen benachbart sind, so heißt G *vollständig r-partit* (bzw. *vollständig bipartit*), oder allgemeiner *vollständig multipartit*. Sind $n_1, \ldots, n_r$ die Mächtigkeiten seiner r Partitionsklassen, so bezeichnen wir diesen (bis auf Isomorphie eindeutig bestimmten) Graphen $\overline{K^{n_1}} * \ldots * \overline{K^{n_r}}$ mit $K_{n_1,\ldots,n_r}$. Ist $n_1 = \ldots = n_r = s$, so bezeichnen wir den Graphen auch mit K_s^r; dies ist also der vollständig r-partite Graph, in dem jede Partitionsklasse genau s Ecken enthält.[6] (Abb. 0.6.1 zeigt als Beispiel das Oktaeder K_2^3; vergleiche diese Darstellung mit der aus Abb. 0.4.3!)

$K_{n_1,\ldots,n_r}$
K_s^r

Stern
Zentrum

Graphen der Form $K_{1,n}$ nennt man *Sterne*; die Ecke der einelementigen Partitionsklasse dieses $K_{1,n}$ ist das *Zentrum* des Sterns.

Offenbar kann ein bipartiter Graph keinen Kreis ungerader Länge enthalten. Diese Eigenschaft charakterisiert die bipartiten Graphen sogar:

[6] Umgekehrt entsteht jeder K_s^r aus einem K^r durch Aufblähung von dessen Ecken zu unabhängigen s-Mengen; diese Beziehung soll in der Notation K_s^r anklingen.

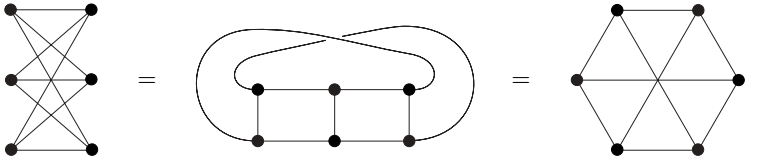


Abb. 0.6.2. Drei Darstellungen des bipartiten Graphen $K_{3,3} = K_3^2$

Proposition 0.6.1. *Ein Graph ist genau dann bipartit, wenn er keinen Kreis ungerader Länge enthält.* [4.3.1] [5.4.2]

Beweis. Es sei $G = (V, E)$ ein Graph ohne Kreise ungerader Länge; (0.5.1)
wir zeigen, dass G bipartit ist. Da ein Graph bipartit ist, wenn all seine Komponenten es sind, dürfen wir G als zusammenhängend voraussetzen. Es sei $T \subseteq G$ ein Spannbaum, r dessen Wurzel, und $\leqslant_T$ die entsprechende Baumordnung auf V. Für jedes $v \in V$ hat der eindeutig bestimmte Weg rTv gerade oder ungerade Länge; dies definiert eine Partition von V in zwei Teile. Wir zeigen, dass diese Partition G als bipartit erweist.

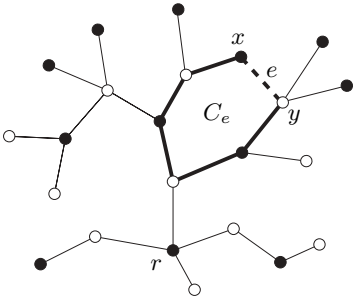


Abb. 0.6.3. Der Kreis C_e in $T + e$

Es sei $e = xy$ eine beliebige Kante von G. Ist $e \in T$, etwa mit $x <_T y$, so gilt $rTy = rTxy$, und x, y liegen in verschiedenen Partitionsklassen. Ist andererseits $e \notin T$, so ist $C_e := xTy + e$ ein Kreis (Abb. 0.6.3), und nach dem bereits behandelten Fall liegen die Ecken des Weges xTy abwechselnd in den beiden Partitionsklassen. Da C_e nach Annahme gerade Länge hat, liegen wiederum auch x, y in verschiedenen Klassen. □

0.7 Kontraktion und Minoren

In Abschnitt 0.1 haben wir zwei grundlegende Relationen des Enthaltenseins zwischen Graphen kennengelernt: die Teilgraphen- und die Untergraphenbeziehung. In diesem Abschnitt lernen wir zwei weitere kennen: die Minorenrelation und die Relation des topologischen Minors.

G/e

Kanten-kontraktion

Ist $e = xy$ Kante eines Graphen $G = (V, E)$, so bezeichnet G/e den durch *Kontraktion* von e aus G entstehenden Graphen: wir kontrahieren e zu einer neuen Ecke v_e, und diese erhält als Nachbarn all die Ecken, die vorher zu x oder zu y benachbart waren (Abb. 0.7.1). Formal ist G/e ein Graph (V', E') mit Eckenmenge $V' := (V \setminus \{x, y\}) \cup \{v_e\}$ (wobei v_e eine „neue“ Ecke ist, also $v_e \notin (V \setminus \{x, y\}) \cup E$) und Kantenmenge

v_e

$$E' := \Big\{ vw \in E \mid \{v, w\} \cap \{x, y\} = \emptyset \Big\} \cup \Big\{ v_e w \mid xw \in E \setminus \{e\} \text{ oder } yw \in E \setminus \{e\} \Big\}.$$

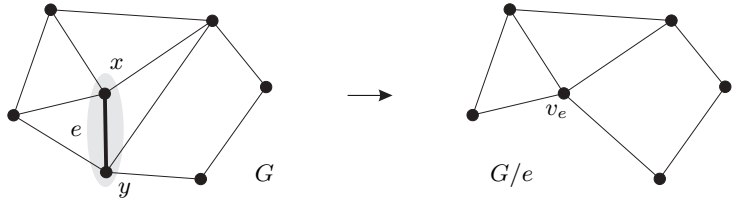


Abb. 0.7.1. Kontraktion der Kante $e = xy$

Häufig wollen wir in einem Graphen $G = (V, E)$ mehrere Kanten gleichzeitig kontrahieren, sagen wir alle Kanten der Menge $F \subseteq E$. Um dies in einem Schritt zu tun, betrachten wir die Komponenten des Teilgraphen (V, F) von G. Jede dieser Komponenten schrumpft dann auf eine Ecke zusammen, und die Kanten von G zwischen verschiedenen Komponenten werden zu Kanten zwischen den neuen kontrahierten Ecken. (Kanten aus $E \setminus F$ mit beiden Endecken in der gleichen Komponente fallen weg; ebenso behalten wir von mehreren Kanten zwischen den gleichen zwei Komponenten nur eine.) Ist X der so entstandene Graph, dann nennen wir unseren Ausgangsgraphen G einen MX; siehe die rechte Hälfte von Abbildung 0.7.2.

MX

Verzweigungs-mengen

Formal ist also G ein MX, wenn V eine Partition $\{ V_x \mid x \in V(X) \}$ in zusammenhängende Teilmengen hat mit der Eigenschaft, dass G für je zwei Ecken $x, y \in X$ genau dann eine V_x–V_y - Kante enthält, wenn $xy \in E(X)$ ist.[7] Die Mengen V_x heißen *Verzweigungsmengen* des MX. Eine äquivalente Formalisierung des Begriffs eines MX, mittels der Abbildung $v \mapsto x$ für $v \in V_x$, ist in Übung **27** beschrieben.

G/U

v_U

Ist $V_x = U \subseteq V$ eine Verzweigungsmenge, und enthält jede andere Verzweigungsmenge nur eine Ecke, so schreiben wir statt X auch G/U, bezeichnen die aus U kontrahierte Ecke $x \in X$ als v_U, und denken uns den Rest von X einfach als Untergraphen von G. Die oben definierte

[7] Das M steht für „Minor“. Formal bezeichnet MX die Klasse aller Graphen, deren Eckenmenge wie beschrieben partitionierbar ist. Mit „einem MX“ ist jedoch „ein beliebiges Element“ dieser Klasse gemeint, nicht die Klasse selbst.

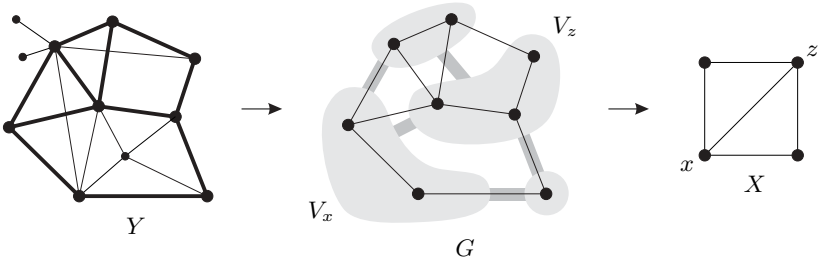


Abb. 0.7.2. Der Graph G ist ein MX, und G ist Teilgraph von Y. Damit ist X ein *Minor* von Y.

Kontraktion einer einzelnen Kante uu' entspricht dann dem Spezialfall $U = \{u, u'\}$.

Proposition 0.7.1. *G ist genau dann ein MX, wenn X aus G durch eine Reihe von Kantenkontraktionen gewonnen werden kann, wenn also Graphen $G_0, \dots, G_n$ und Kanten $e_i \in G_i$ existieren mit $G_0 = G$, $G_n \simeq X$, und $G_{i+1} = G_i/e_i$ für alle $i < n$.*

Beweis mit Induktion nach $|G| - |X|$. □

Enthält ein Graph Y einen MX als Teilgraphen, so nennt man X einen *Minor* von Y und schreibt $X \preccurlyeq Y$. Beachte, dass jeder Teilgraph eines Graphen auch sein Minor ist; insbesondere ist jeder Graph ein Minor seiner selbst. Nach Proposition 0.7.1 entsteht jeder Minor eines Graphen dadurch, dass wir zunächst Ecken und Kanten löschen und dann weitere Kanten kontrahieren. Umgekehrt ist jeder Graph, der aus einem anderen Graphen durch wiederholtes Löschen und Kontrahieren entsteht (in beliebiger Reihenfolge; siehe Proposition 0.7.3), sein Minor.

Minor; $\preccurlyeq$

Ersetzen wir in X jede Kante xy so durch einen x–y-Weg, dass die Ersetzungswege keine inneren Ecken mit X oder miteinander gemeinsam haben, so nennen wir den entstandenen Graphen eine *Unterteilung* von X, oder einen TX. Enthält ein Graph Y einen TX als Teilgraphen, so heißt X *topologischer Minor* von Y (Abb. 0.7.3).

Unterteilung TX
topologischer Minor

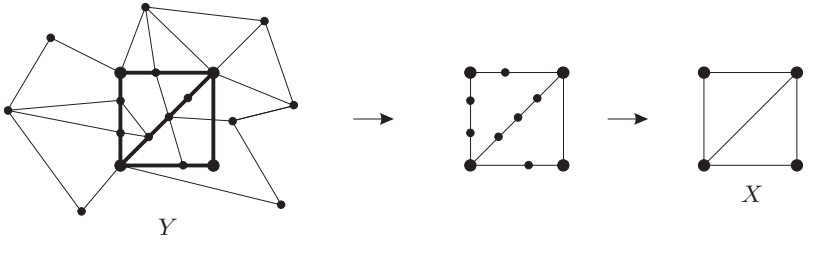


Abb. 0.7.3. Der Graph Y hat einen Teilgraphen, der ein TX ist. Damit ist X ein *topologischer Minor* von Y.

Verzweigungsecken
Unterteilungsecken

Ist G ein TX,[8] so fassen wir $V(X)$ als Teilmenge von $V(G)$ auf und nennen diese Ecken die *Verzweigungsecken* von G; die anderen Ecken von G sind seine *Unterteilungsecken*. (Diese haben also den Grad 2, während die Verzweigungsecken von G den gleichen Grad wie in X haben.)

[3.4.2] [6.3.1]

Proposition 0.7.2.

(i) *Jeder TX ist auch ein MX (Abb. 0.7.4); jeder topologische Minor eines Graphen ist somit auch sein (gewöhnlicher) Minor.*

(ii) *Ist $\Delta(X) \leqslant 3$, so enthält jeder MX einen TX; jeder Minor mit Maximalgrad $\leqslant 3$ eines Graphen ist somit auch sein topologischer Minor.* □

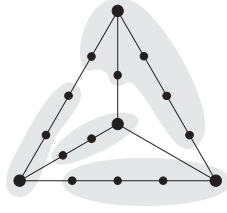


Abb. 0.7.4. Eine Unterteilung des K^4 als MK^4

[10.4.1]

Proposition 0.7.3. *Die Relationen „X ist Minor von Y“ und „X ist topologischer Minor von Y“ sind Ordnungsrelationen auf der Klasse der endlichen Graphen, d.h. sie sind reflexiv, antisymmetrisch und transitiv.* □

Einbettung

Nachdem wir nun die vier wichtigsten Relationen zwischen Graphen kennengelernt haben, können wir einen davon abhängigen weiteren Begriff einführen: den der *Einbettung* eines Graphen G in einen anderen Graphen H. Grob gesprochen ist dies, wie auch sonst in der Mathematik, eine strukturerhaltende injektive Abbildung $\varphi\colon V(G) \to V(H)$. Wann jedoch die Struktur von G durch sein Bild in H als erhalten gilt, hängt von der Relation ab, die wir betrachten wollen. So nennen wir φ eine Einbettung von G in H „als Teilgraphen“, wenn φ die Benachbartheit von Ecken erhält, d.h. wenn aus $uv \in E(G)$ stets $\varphi(u)\varphi(v) \in E(H)$ folgt und somit die Ecken in $\varphi(V(G))$ zusammen mit diesen Kanten $\varphi(u)\varphi(v)$ einen Teilgraphen von H bilden. Enthält φ auch die Nichtbenachbartheit von Ecken in G, so bettet es G in H „als Untergraphen“ ein.

Analog können wir Einbettungen als Minor oder topologischen Minor definieren. Damit φ eine Einbettung von G in H als Minor definiert, verlangen wir, dass φ die Ecken von G nicht auf einzelne Ecken von H

[8] Das T in TX steht für „topologisch“ und erinnert daran, dass für $\delta(X) \geqslant 3$ die TX genau die Graphen sind, die als 1-Komplex homöomorph zu X sind. Fußnote 7 gilt entsprechend auch für den Gebrauch der Bezeichnung TX.

abbildet sondern auf disjunkte zusammenhängende Eckenmengen in H, und dass es in H zwischen zwei Mengen $\varphi(u)$ und $\varphi(v)$ stets eine Kante gibt, wenn uv Kante von G ist. Eine Einbettung von G in H als topologischer Minor bildet die Ecken von G auf Ecken von H ab, und zusätzlich die Kanten von G auf kreuzungsfreie Wege in H zwischen den ihren Endecken entsprechenden Ecken von H.

Je nach Bedarf kann man weitere Einbettungen definieren, etwa als aufspannenden Teilgraphen, als induzierten Minor usw.

0.8 Eulersche Graphen

Wer sich als Mathematiker einmal in der ehemals ostpreußischen Stadt Königsberg (und dazu im 18. Jahrhundert) findet, wird sich umgehend – so jedenfalls gebietet es eine durch den großen Mathematiker Leonhard Euler begründete Tradition – nach einer Möglichkeit erkundigen, die in Abb. 0.8.1 dargestellten Brücken über den Pregel in einem einzigen Rundgang jeweils genau einmal zu überschreiten.

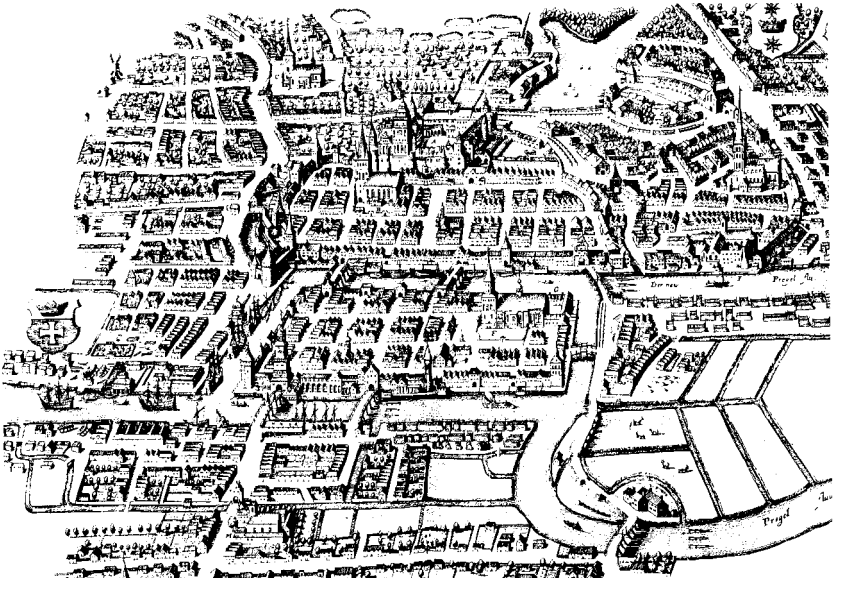


Abb. 0.8.1. Die Königsberger Brücken (anno 1736)

Hiervon inspiriert[9] nennen wir einen geschlossenen Kantenzug in einem Graphen *eulersch*, wenn er jede Kante des Graphen genau einmal

[9] Wer diese Inspiration auch nach Betrachtung von Abb. 0.8.2 als zu sprunghaft empfindet, mag in dem *Multigraphen* aus Abb. 0.10.1 seine Zuflucht finden.

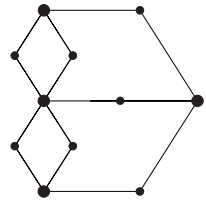


Abb. 0.8.2. Der Graph zum Brückenproblem

eulersch enthält. Ein Graph heißt *eulersch*, wenn er einen solchen Kantenzug enthält.

[1.1.5] [8.3.3]

Satz 0.8.1. (Euler 1736)
Ein zusammenhängender Graph ist genau dann eulersch, wenn jede seiner Ecken geraden Grad hat.

Beweis. Die Gradbedingung ist offensichtlich notwendig: tritt eine Ecke k-mal in einem eulerschen Kantenzug auf (bzw. $(k+1)$-mal, wenn sie erste und letzte Ecke des Kantenzugs ist), so ist ihr Grad $2k$.

Umgekehrt sei nun G ein zusammenhängender Graph, in dem alle Eckengrade gerade sind. Es sei

$$W = v_0 e_0 \dots e_{\ell-1} v_\ell$$

ein Kantenzug maximaler Länge in G, der keine Kante mehrfach enthält. Da wir W nicht mehr verlängern können, liegen alle mit v_ℓ inzidenten Kanten auf W. Da nach Annahme die Anzahl dieser Kanten gerade ist, folgt $v_\ell = v_0$ (warum?), d.h. der Kantenzug W ist geschlossen.

Ist W nicht eulersch in G, so hat G eine nicht auf W liegende Kante e, die mit einer Ecke von W inzidiert, etwa $e = uv_i$. (Hier geht ein, dass G zusammenhängend ist; siehe den Beweis von Proposition 0.4.1.) Der Kantenzug

$$u e v_i e_i \dots e_{\ell-1} v_\ell e_0 \dots e_{i-1} v_i$$

ist dann länger als W, mit Widerspruch. □

0.9 Algebraisches

$G = (V, E)$ Es sei $G = (V, E)$ ein Graph mit n Ecken und m Kanten, etwa $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ und $E = \{e_1, \dots, e_m\}$. Mit $\mathcal{V}(G)$ bezeichnen wir den $\mathbb{F}_2$-Vektorraum aller Funktionen $V \to \mathbb{F}_2$; dabei bezeichnet $\mathbb{F}_2$ wie üblich den Körper $\{0, 1\}$. Wir nennen diesen Vektorraum den *Eckenraum* von G. Seine Elemente entsprechen in natürlicher Weise den Teilmengen von V: einer Eckenmenge $U \subseteq V$ entspricht die Indikatorfunktion $V \to \mathbb{F}_2$, die

Eckenraum $\mathcal{V}(G)$

den Ecken aus U die Eins aus $\mathbb{F}_2$ zuordnet und allen anderen Ecken die Null. Im Folgenden unterscheiden wir begrifflich nicht mehr zwischen den Eckenmengen $U \subseteq V$ und ihren Indikatorfunktionen, sondern fassen die Eckenmengen selbst als die Elemente von $\mathcal{V}(G)$ auf. Für $U, U' \subseteq V$ ist dann $U+U'$ gerade die symmetrische Differenz der Mengen U und U' (warum?), und es gilt $U = -U$ für alle $U \subseteq V$. Das neutrale Element von $\mathcal{V}(G)$ ist die leere Eckenmenge $\emptyset$, und $\{\{v_1\}, \dots, \{v_n\}\}$ ist eine Basis von $\mathcal{V}(G)$, seine *Standardbasis*. Insbesondere ist also $\dim \mathcal{V}(G) = n$. +

Analog zum Eckenraum bilden die Funktionen $E \to \mathbb{F}_2$ den *Kantenraum* $\mathcal{E}(G)$ von G: seine Elemente sind die Teilmengen von E, die Vektoraddition ist die symmetrischen Differenz dieser Teilmengen, und $\emptyset \subseteq E$ ist das neutrale Element. Wiederum gilt $F = -F$ für alle $F \subseteq E$, und $\{\{e_1\}, \dots, \{e_m\}\}$ ist die *Standardbasis* von $\mathcal{E}(G)$; insbesondere ist $\dim \mathcal{E}(G) = m$. *Kantenraum* $\mathcal{E}(G)$ *Standardbasis*

Wir wenden uns zunächst dem Kantenraum zu. Sind $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ und $\lambda'_1, \dots, \lambda'_m$ die Koeffizienten zweier Kantenmengen $F, F' \in \mathcal{E}(G)$ bezüglich der Standardbasis, so schreiben wir wie üblich

$$\langle F, F' \rangle := \lambda_1\lambda'_1 + \ldots + \lambda_m\lambda'_m \in \mathbb{F}_2 \,. \qquad \langle F, F' \rangle$$

Beachte, dass $\langle F, F' \rangle = 0$ auch für $F = F' \neq \emptyset$ gelten kann: offenbar gilt $\langle F, F' \rangle = 0$ genau dann, wenn F und F' eine gerade Anzahl von Kanten gemeinsam haben. Für einen Unterraum $\mathcal{F}$ von $\mathcal{E}(G)$ schreiben wir wie gewohnt

$$\mathcal{F}^\perp := \big\{\, D \in \mathcal{E}(G) \mid \langle F, D \rangle = 0 \text{ für alle } F \in \mathcal{F} \,\big\}\,; \qquad \mathcal{F}^\perp$$

dies ist dann ebenfalls ein Unterraum von $\mathcal{E}(G)$ (der Lösungsraum eines geeigneten homogenen linearen Gleichungssystems – welches?), und es gilt[10]

$$\dim \mathcal{F} + \dim \mathcal{F}^\perp = m \,. \qquad (\dagger)$$

Mit $\mathcal{C} = \mathcal{C}(G)$ bezeichnen wir den Unterraum von $\mathcal{E}(G)$, der von den Kreisen in G (genauer:[11] von ihren Kantenmengen) aufgespannt wird. Die Elemente von $\mathcal{C}$ heißen *Zyklen* in G; $\mathcal{C}$ selbst ist der *Zyklenraum*, seine Dimension die *zyklomatische Zahl* von G. $\mathcal{C}(G)$ *Zyklenraum*

Proposition 0.9.1. *Die induzierten Kreise in G erzeugen seinen gesamten Zyklenraum.* [2.2.3]

[10] Dies ist bekannter für reelle und komplexe Vektorräume (wo $\mathcal{F}$ und $\mathcal{F}^\perp$ eine direkte Summe bilden), gilt hier aber genauso; Literaturhinweise dazu am Ende des Kapitels.

[11] Der Einfachheit halber unterscheiden wir nicht immer streng zwischen den Kantenmengen $F \in \mathcal{E}(G)$ und den dazu gehörigen Teilgraphen (V, F) von G. Insbesondere unterscheiden wir meist nicht zwischen Kreisen und ihren Kantenmengen.

Beweis. Nach Definition von $\mathcal{C}(G)$ reicht es zu zeigen, dass jeder Kreis $C \subseteq G$ von induzierten Kreisen erzeugt wird. Dies folgt sofort mit Induktion nach der Länge von C. Hat nämlich C eine Sehne e, so gibt es zwei Kreise $C_1, C_2 \subseteq C + e$, die e aber sonst keine Kante gemeinsam haben. Nach Induktionsannahme werden C_1 und C_2 von induzierten Kreisen erzeugt, und wegen $C = C_1 + C_2$ gilt dies dann auch für C. □

Die Elemente von $\mathcal{C}$ sind ganz einfach an den Eckengraden der von ihnen gebildeten Teilgraphen zu erkennen. Bei ihrer Erzeugung aus Kreisen brauchen wir zudem statt beliebiger symmetrischer Differenzen nur disjunkte Vereinigungen:

[3.5.1] **Proposition 0.9.2.** *Die folgenden Aussagen sind äquivalent für Kantenmengen $F \subseteq E$:*

(i) *$F \in \mathcal{C}(G)$;*

(ii) *F ist eine disjunkte Vereinigung von Kreisen in G;*

(iii) *Alle Eckengrade des Graphen (V, F) sind gerade.*

Beweis. Da Kreise gerade Eckengrade haben und dies bei der Bildung symmetrischer Differenzen erhalten bleibt, folgt (i)→(iii) mit Induktion nach der Anzahl der zur Erzeugung von F verwendeten Kreise. Die Implikation (iii)→(ii) folgt mit Induktion nach $|F|$: ist $F \neq \emptyset$, so enhält (V, F) einen Kreis, und dessen Kanten löschen wir zum Induktionsschritt. Die Implikation (ii)→(i) folgt direkt aus der Definition von $\mathcal{C}(G)$. □

Ist $\{V_1, V_2\}$ eine Partition von V, so nennen wir die Menge $E(V_1, V_2)$ aller diese Partition *kreuzenden* Kanten von G einen *Schnitt*. Für $v \in V$ schreiben wir wie gehabt $E(v)$ statt $E(\{v\}, V \setminus \{v\})$.

Schnitt

[3.6.3] **Proposition 0.9.3.** *Die Schnitte in G bilden zusammen mit $\emptyset$ einen Unterraum von $\mathcal{E}(G)$. Dieser wird erzeugt durch die Schnitte der Form $E(v)$.*

Beweis. Es sei $\mathcal{C}^*$ die Menge der Schnitte in G, zusammen mit $\emptyset$. Zum Beweis, dass $\mathcal{C}^*$ ein Unterraum ist, ist zu zeigen, dass für alle $D, D' \in \mathcal{C}^*$ auch $D + D'$ $(= D - D')$ in $\mathcal{C}^*$ liegt. Wegen $D + D = \emptyset \in \mathcal{C}^*$ und $D + \emptyset = D \in \mathcal{C}^*$ dürfen wir annehmen, dass D und D' voneinander und von $\emptyset$ verschieden sind. Sind solche Schnitte $D, D' \in \mathcal{C}^*$ gegeben, etwa zu Partitionen $\{V_1, V_2\}$ und $\{V_1', V_2'\}$ von V, so enthält $D + D'$ gerade die Kanten, die genau eine der beiden Partitionen kreuzen (Abb. 0.9.1). Dies aber sind gerade die Kanten zwischen $(V_1 \cap V_1') \cup (V_2 \cap V_2')$ und $(V_1 \cap V_2') \cup (V_2 \cap V_1')$, und diese beiden Mengen bilden (wegen $D \neq D'$) erneut eine Partition von V. Somit ist $D + D' \in \mathcal{C}^*$, d.h. $\mathcal{C}^*$ ist in der Tat ein Unterraum von $\mathcal{E}(G)$.

Dass die Schnitte der Form $E(v)$ ganz $\mathcal{C}^*$ erzeugen, liegt daran, dass jede Kante $xy \in G$ in genau zwei solchen Schnitten liegt (in $E(x)$

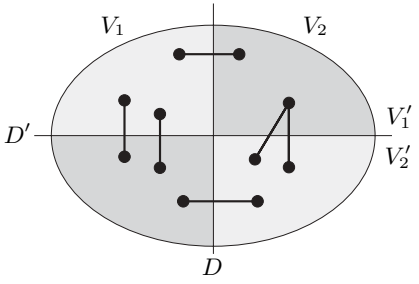


Abb. 0.9.1. Schnittkanten zu $D + D'$

und in $E(y)$); ist $\{V_1, V_2\}$ eine beliebige Partition von V, so gilt deshalb $E(V_1, V_2) = \sum_{v \in V_1} E(v)$. □

Den Unterraum $\mathcal{C}^* =: \mathcal{C}^*(G)$ von $\mathcal{E}(G)$ aus Proposition 0.9.3 nennt man den *Schnittraum* von G. Es ist nicht schwer, aus den Schnitten $E(v)$ eine explizite Basis und damit die Dimension von $\mathcal{C}^*$ zu bestimmen (Übung 30). *Schnittraum $\mathcal{C}^*(G)$*

Einen Schnitt $F \neq \emptyset$, der minimal ist unter den nicht leeren Schnitten von G, nennen wir einen *Minimalschnitt*. Minimalschnitte spielen für den Schnittraum die gleiche Rolle wie Kreise für den Zyklenraum, die ja dessen minimale nicht-leere Elemente sind. Ist G zusammenhängend, so sind seine Minimalschnitte genau seine minimalen Schnitte, also diejenigen Schnitte, deren Partitionsmengen beide einen zusammenhängenden Untergraphen induzieren. Ist G nicht zusammenhängend, so sind seine Minimalschnitte gerade die minimalen Schnitte seiner Komponenten. (Siehe auch Lemma 2.1.2.) *Minimalschnitt*

Analog zu Proposition 0.9.2 reichen Minimalschnitte und disjunkte Vereinigungen zur Erzeugung des Schittraums aus:

Lemma 0.9.4. *Jeder Schnitt ist eine disjunkte Vereinigung von Minimalschnitten.* [3.6.2]

Beweis. Für eine Vorüberlegung betrachten wir zunächst einen zusammenhängenden Graphen $H = (V, E)$, einen zusammenhängenden Teilgraphen $C \subseteq H$, und eine Komponente D von $H - C$. Da sowohl D als auch $H - D$ zusammenhängend sind (Abb. 0.9.2), bilden die Kanten zwischen D und $H - D$ einen minimalen Schnitt. Nach Wahl von D ist dies genau die Menge $E(C, D)$ aller C–D - Kanten.

Zum Beweis des Lemmas sei nun $G = (V, E)$ beliebig, und $\{V_1, V_2\}$ eine beliebige Partition von V. Wir betrachten zunächst eine Komponente C von $G[V_1]$; es sei H die C enthaltende Komponente von G. Dann ist $E(C, V_2) = E(C, H - C)$ die disjunkte Vereinigung der Kantenmengen $E(C, D)$ über alle Komponenten D von $H - C$. Diese Kantenmengen sind nach der Vorüberlegung minimale Schnitte in H, und damit

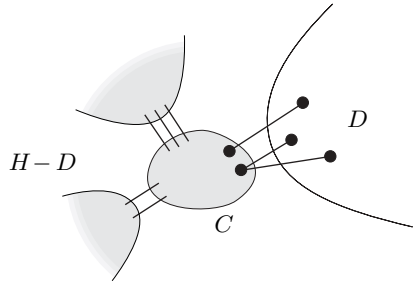


Abb. 0.9.2. $H - D$ ist zusammenhängend, und $E(C, D)$ ein minimaler Schnitt

Minimalschnitte von G. Die disjunkte Vereinigung der Kantenmengen $E(C, V_2)$ über alle Komponenten C von $G[V_1]$ ist aber gerade der betrachtete Schnitt $E(V_1, V_2)$. □

[3.6] **Satz 0.9.5.** *Ist $\mathcal{C}$ der Zyklenraum eines Graphen und $\mathcal{C}^*$ sein Schnittraum, so gilt*

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}^{*\perp} \quad \textit{und} \quad \mathcal{C}^* = \mathcal{C}^{\perp}.$$

Beweis. (Siehe auch Übung **34**.) Betrachten wir einen Graphen $G = (V, E)$. Offenbar enthält jeder Kreis in G aus jedem Schnitt eine gerade Anzahl von Kanten. Hieraus folgt $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}^{*\perp}$.

Zu jeder Kantenmenge F, die kein Zyklus ist, gibt es andererseits nach Proposition 0.9.2 eine Ecke v, die mit einer ungeraden Anzahl von Kanten aus F inzidiert. Es gilt also $\langle E(v), F\rangle = 1$, und wegen $E(v) \in \mathcal{C}^*$ folgt $F \notin \mathcal{C}^{*\perp}$. Damit ist $\mathcal{C} = \mathcal{C}^{*\perp}$ bewiesen.

Zum Beweis von $\mathcal{C}^* = \mathcal{C}^{\perp}$ reicht wegen $\mathcal{C} = \mathcal{C}^{*\perp}$ ein Beweis von $\mathcal{C}^* = (\mathcal{C}^{*\perp})^{\perp}$. Davon folgt $\mathcal{C}^* \subseteq (\mathcal{C}^{*\perp})^{\perp}$ direkt aus der Definition von $\perp$. Mit (†) gilt jedoch

$$\dim \mathcal{C}^* + \dim \mathcal{C}^{*\perp} = m = \dim \mathcal{C}^{*\perp} + \dim (\mathcal{C}^{*\perp})^{\perp},$$

d.h. $\mathcal{C}^*$ kann nicht echt kleiner sein als $(\mathcal{C}^{*\perp})^{\perp}$. Somit folgt $\mathcal{C}^* = (\mathcal{C}^{*\perp})^{\perp}$ wie behauptet. □

Fundamentalkreise

(0.5.1)

Fundamentalschnitte

Betrachten wir einmal einen zusammenhängenden Graphen $G = (V, E)$ mit einem Spannbaum $T \subseteq G$. Jede Kante $e \in E \setminus E(T)$ liegt dann auf einem eindeutig bestimmten Kreis C_e in $T + e$ (Abb. 0.6.3); diese Kreise C_e heißen *Fundamentalkreise* von G zu T. Zu jeder Kante $e \in T$ andererseits hat $T - e$ genau zwei Komponenten (Satz 0.5.1 (iii)), und die Kanten von G zwischen diesen beiden Komponenten (einschließlich e selbst) bilden einen Schnitt D_e von G (Abb.0.9.3). Diese Schnitte D_e heißen *Fundamentalschnitte* von G zu T.

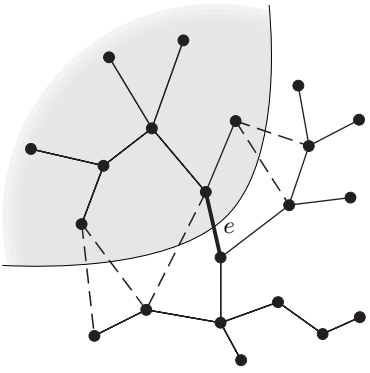


Abb. 0.9.3. Der Fundamentalschnitt D_e

Es ist nicht schwer zu zeigen, dass die Fundamentalkreise und -schnitte von G seinen Zyklen- bzw. Schnittraum erzeugen (Übungen **35**–**36**). Der Beweis des folgenden umfassenderen Satzes liefert dies jedoch vermöge Satz 0.9.5 und der Dimensionsformel (†) umsonst mit.

Satz 0.9.6. *Ist $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph und $T \subseteq G$ ein Spannbaum, so bilden die zu T gehörigen Fundamentalkreise und -schnitte Basen von $\mathcal{C}(G)$ und $\mathcal{C}^*(G)$. Hat G genau n Ecken und m Kanten , so gilt* [3.5.1]

$$\dim \mathcal{C}(G) = m - n + 1 \quad \textit{und} \quad \dim \mathcal{C}^*(G) = n - 1\,.$$

Beweis. Da eine Kante $e \in T$ in D_e liegt aber in keinem $D_{e'}$ mit $e' \neq e$, ist der Schnitt D_e nicht durch andere Fundamentalschnitte erzeugbar. Die $n-1$ Fundamentalschnitte (vgl. Kor. 0.5.3) bilden daher eine linear unabhängige Teilmenge von $\mathcal{C}^*$. Jede der $m-n+1$ Kanten $e \in E \setminus E(T)$ liegt auf C_e aber auf keinem $C_{e'}$ mit $e' \neq e$; die Fundamentalkreise bilden daher eine linear unabhängige Teilmenge von $\mathcal{C}$. Es gilt somit (0.5.3)

$$\dim \mathcal{C}^* \geqslant n - 1 \quad \text{und} \quad \dim \mathcal{C} \geqslant m - n + 1\,.$$

Nach Satz 0.9.5 und (†) gilt aber auch

$$\dim \mathcal{C}^* + \dim \mathcal{C} = m = (n-1) + (m-n+1).$$

Die beiden Ungleichungen können somit nur mit Gleichheit gelten. Die Mengen der Fundamentalkreise und -schnitte sind daher als linear unabhängige Teilmengen von $\mathcal{C}^*$ und $\mathcal{C}$ maximal, bilden also die behaupteten Basen. □

Inzidenzmatrix

Die *Inzidenzmatrix* $B = (b_{ij})_{n\times m}$ eines Graphen $G = (V, E)$ mit $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ und $E = \{e_1, \dots, e_m\}$ ist definiert über $\mathbb{F}_2$ durch

$$b_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{falls } v_i \in e_j \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

B^t bezeichne wie üblich die zu B transponierte Matrix. Die Matrizen B und B^t definieren, bezüglich der Standardbasen, Homomorphismen $B\colon \mathcal{E}(G) \to \mathcal{V}(G)$ und $B^t\colon \mathcal{V}(G) \to \mathcal{E}(G)$.

Proposition 0.9.7.

(i) *Der Kern von B ist $\mathcal{C}(G)$.*

(ii) *Das Bild von B^t ist $\mathcal{C}^*(G)$.* □

Adjazenzmatrix

Die *Adjazenzmatrix* $A = (a_{ij})_{n\times n}$ von G ist definiert durch

$$a_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{falls } v_i v_j \in E \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Unsere letzte Proposition zeigt einen einfachen Zusammenhang zwischen A und B (nunmehr als reelle Matrizen aufgefasst). Mit D bezeichnen wir die reelle Diagonalmatrix $(d_{ij})_{n\times n}$ mit $d_{ii} = d(v_i)$ und $d_{ij} = 0$ sonst.

Proposition 0.9.8. $BB^t = A + D$. □

0.10 Verwandte Begriffsbildungen

Der Übersicht halber erwähnen wir in diesem Abschnitt noch einige Begriffe, die im Text nicht oder nur am Rande vorkommen.

Hypergraph

Ein *Hypergraph* ist ein Paar (V, E) disjunkter Mengen, bei dem jedes Element von E eine nicht leere Teilmenge (beliebiger Mächtigkeit) von V ist. Jeder Graph ist also ein spezieller Hypergraph.

gerichteter Graph

Ein *gerichteter Graph* ist ein Paar (V, E) disjunkter Mengen (von *Ecken* und *Kanten*) zusammen mit zwei Funktionen $\mathrm{init}\colon E \to V$ und $\mathrm{ter}\colon E \to V$, die jeder Kante e eine *Anfangsecke* $\mathrm{init}(e)$ und eine *Endecke* $\mathrm{ter}(e)$ zuordnen; die Kante e heißt dann *von* $\mathrm{init}(e)$ *nach* $\mathrm{ter}(e)$ *gerichtet*. Man beachte, dass ein gerichteter Graph zwischen zwei Ecken x, y durchaus mehrere Kanten haben kann. Solche Kanten nennt man *Mehrfachkanten*; haben zwei Mehrfachkanten die gleiche Richtung (etwa beide von x nach y), so sind sie *parallel*. Ist $\mathrm{init}(e) = \mathrm{ter}(e)$, so ist e eine *Schlinge*.

$\mathrm{init}(e)$

$\mathrm{ter}(e)$

Mehrfachkanten

Schlinge

Orientierung

Ein gerichteter Graph D ist eine *Orientierung* eines (ungerichteten) Graphen G, wenn $V(D) = V(G)$ und $E(D) = E(G)$ ist und

$\{\text{init}(e), \text{ter}(e)\} = \{x, y\}$ gilt für jede Kante $e = xy$. Ein solcher *orientierter Graph* entsteht also aus einem ungerichteten Graphen einfach dadurch, dass jede Kante xy nachträglich „gerichtet“ wird: entweder von x nach y oder von y nach x (aber nicht beides). Orientierte Graphen sind also gerichtete Graphen ohne Mehrfachkanten und Schlingen.

orientierter Graph

Ein *Multigraph* ist ein Paar (V, E) disjunkter Mengen (von *Ecken* und *Kanten*) zusammen mit einer Funktion $E \to V \cup [V]^2$, die jeder Kante ihre – ein oder zwei – *Endecken* zuordnet. Auch ein Multigraph kann also Mehrfachkanten und Schlingen haben; wir können ihn auffassen als einen gerichteten Graphen, bei dem wir die Richtungen seiner Kanten „vergessen“ haben. Um auszudrücken, dass x und y die Endecken einer Kante e sind, schreiben wir auch bei Multigraphen $e = xy$; die Kante e ist dadurch jedoch im allgemeinen nicht mehr eindeutig bestimmt.

Multigraph

Ein Graph ist im Wesentlichen dasselbe wie ein Multigraph ohne Mehrfachkanten und Schlingen. Einen Satz über Graphen allgemeiner für Multigraphen zu zeigen, vereinfacht jedoch zuweilen den Beweis. Überdies gibt es Zusammenhänge, in denen Multigraphen natürlich auftreten und eine Beschränkung auf Graphen künstlich und technisch kompliziert wäre; das vielleicht wichtigste Beispiel hierfür ist die Dualität bei ebenen Graphen (Kapitel 3.6 und 5.5). Wir werden deshalb gelegentlich Multigraphen betrachten und dabei für Graphen definierte Begriffe informell weiterbenutzen, solange die gemeinte Bedeutung offensichtlich ist.

Es gibt allerdings auch einige Besonderheiten. So gelten in einem Multigraphen sowohl Schlingen als auch Doppelkanten als Kreise, der Länge 1 bzw. 2. Durch eine Schlinge an einer Ecke wird diese ihr eigener Nachbar, und die Schlinge trägt 2 zum Grad der Ecke bei; die Ecke v_e in Abbildung 0.10.1 hat also den Grad $d(v_e) = 6$.

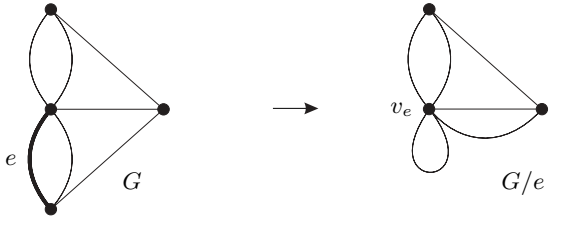


Abb. 0.10.1. Kontraktion einer Kante e in dem zu Abb. 0.8.1 gehörigen Multigraphen

Die Endecken einer Schlinge oder „Parallelkante“ e eines Multigraphen G fasst man als Eckentrenner auf, der e vom Rest von G trennt. Die Ecke v einer Schlinge e ist damit eine Artikulation – es sei denn, $(\{v\}, \{e\})$ ist bereits eine ganze Komponente von G – und $(\{v\}, \{e\})$ ist ein „Block“ im Sinne von Kapitel 2.1. Multigraphen mit Schlingen sind daher nie 2-zusammenhängend, und ein 3-zusammenhängender Multigraph ist automatisch ein Graph.

Eine besondere Vereinfachung ergibt sich bei Kontraktionen. Kontrahieren wir eine Kante $e = xy$ eines Multigraphen $G = (V, E)$ zu einer neuen Ecke v_e, so verschwindet dabei zwar die Kante e, doch alle anderen Kanten bleiben erhalten: zu e parallele x–y - Kanten werden zu Schlingen an v_e; Kanten xw und yw werden zu Mehrfachkanten zwischen v_e und w (Abb. 0.10.1). Somit gilt ganz formal $E(G/e) = E \setminus \{e\}$; nur die Inzidenzfunktion $e' \mapsto \{\text{init}(e'), \text{ter}(e')\}$ wird bei der Übertragung auf G/e der veränderten Eckenmenge angepasst. Entsprechend vereinfacht sich der Begriff eines Minors.

Unterdrücken

Unter dem *Unterdrücken* einer Ecke v vom Grad 2 in G versteht man ihre Löschung bei gleichzeitigem Verbinden ihrer beiden Nachbarn durch eine neue Kante.[12] (Sind die beiden an v anliegenden Kanten identisch, d.h. bilden sie eine Schlinge, so fügen wir keine neue Kante hinzu und erhalten einfach $G - v$. Führen die beiden Kanten zur gleichen Ecke $w \neq v$, dann ist die neue Kante eine Schlinge an w. Siehe Abbildung 0.10.2.) Da alle anderen Eckengrade beim Unterdrücken von v unverändert bleiben, ergibt das Unterdrücken mehrerer Ecken vom Grad 2 in G einen wohldefinierten neuen Multigraphen, der unabhängig ist von der Reihenfolge, in der die Ecken unterdrückt werden.

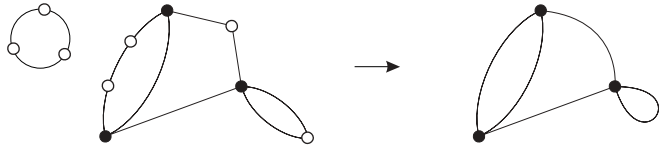


Abb. 0.10.2. Unterdrücken der weißen Ecken

Der größeren Klarheit halber sei noch bemerkt, dass in der Literatur dort, wo regelmäßig Multigraphen betrachtet werden, diese meist einfach „Graphen“ genannt werden; unsere Graphen heißen dort dann „schlichte Graphen“.

Übungen

1.$^-$ Wieviele Kanten hat ein K^n?

2. Es sei $d \in \mathbb{N}$ und $V := \{0,1\}^d$, d.h. V sei die Menge aller 0–1 - Folgen der Länge d. Der Graph auf V, bei dem zwei Ecken genau dann benachbart sind, wenn sie sich in genau einer Koordinate unterscheiden, heißt *d-dimensionaler Würfel*. Bestimme Durchschnittsgrad, Kantenzahl, Durchmesser, Taillenweite und Umfang dieses Graphen.

   (Tip zum Umfang: Induktion nach d.)

[12] Das klingt komplizierter als es ist: anschaulich werden die beiden Kanten an v zu einer Kante verschmolzen, wobei v von einer stolzen Ecke zu einem bescheidenen inneren Kantenpunkt mutiert.

3. Ein Graph G enthalte einen Kreis C und einen Weg P der Länge $\geqslant k$ zwischen zwei Ecken von C. Zeige, dass G einen Kreis der Länge $\geqslant \sqrt{k}$ enthält.

4.$^-$ Ist die Abschätzung in Proposition 0.3.2 bestmöglich?

5. Zeige, dass jeder Graph G die Ungleichung $\operatorname{rad} G \leqslant \operatorname{diam} G \leqslant 2 \operatorname{rad} G$ erfüllt.

6. Beweise Satz 0.3.4 für Minimal- statt Durchschnittsgrad. Für einen Graphen G wie im Satz leite daraus die schwächere Schranke $|G| \geqslant n_0(d/2, g)$ ab.

7.$^+$ Zeige, dass jeder zusammenhängende Graph G einen Weg der Länge $\min\{2\delta(G), |G|-1\}$ enthält.

8.$^+$ Zeige, dass ein zusammenhängender Graph mit Durchmesser k und Minimalgrad d mindestens etwa $kd/3$ Ecken hat, aber nicht notwendig mehr als etwa $kd/2$.

9.$^-$ Zeige, dass die Eckenmengen der Komponenten eines Graphen eine Partition seiner gesamten Eckenmenge bilden. (Mit anderen Worten: jede Ecke ist in genau einer Komponente enthalten.)

10.$^-$ Zeige, dass jeder 2-zusammenhängende Graph einen Kreis enthält.

11. Bestimme κ und λ für P^m, C^n, K^n, $K_{m,n}$ und den n-dimensionalen Würfel (siehe Übung 2), $m, n \geqslant 3$.

12.$^-$ Gibt es eine Funktion $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, so dass Graphen mit Minimalgrad mindestens $f(k)$ stets k-zusammenhängend sind?

13.$^+$ Es seien α, β zwei Grapheninvarianten mit Werten in $\mathbb{N}$. Formalisiere die folgenden beiden Aussagen und zeige dann, dass sie äquivalent sind:

   (i) α ist nach oben durch eine Funktion in β beschränkt;

   (ii) wir können beliebig große Werte von β allein dadurch erzwingen, dass wir α groß genug machen.

   Zeige, dass die Aussage

   (iii) β ist nach unten durch eine Funktion in α beschränkt

   nicht äquivalent zu (i) und (ii) ist. Durch welche kleine Änderung wird (iii) äquivalent zu (i) und (ii)?

14.$^+$ Wo liegt der tiefere Grund dafür, dass im Beweis von Satz 0.4.3 statt einer unteren Schranke für $\varepsilon(G)$ eine Annahme der Form $m \geqslant c_k n - b_k$ zugrundegelegt wird statt einfacher $m \geqslant c_k n$?

15. Beweise Satz 0.5.1.

16.$^-$ Zeige, dass ein Baum T mindestens $\Delta(T)$ Blätter hat.

17. Finde zwei ganz kurze Beweise, dass ein Baum ohne Ecken vom Grad 2 mehr Blätter als andere Ecken hat: einen mit Induktion, den anderen ohne.

18. Zeige, dass die mit einem Wurzelbaum T assoziierte „Baumordnung“ in der Tat eine partielle Ordnung auf $V(T)$ ist, und beweise ihre im Text behaupteten Eigenschaften.

19. Zeige, dass ein Graph genau dann 2-kantenzusammenhängend ist, wenn er eine *stark zusammenhängende* Orientierung hat: eine Orientierung, in der jede Ecke von jeder anderen aus auf einem gerichteten Weg erreichbar ist.

20.$^+$ Es sei G ein zusammenhängender Graph und $r \in G$ eine Ecke. Von r ausgehend, durchlaufe Kanten von G wie folgt: in jedem Schritt gehe wenn möglich zu einer noch nicht besuchten Ecke; ansonsten gehe zurück entlang der Kante, durch die die gegenwärtige Ecke erstmals erreicht wurde. Zeige, dass die insgesamt durchschrittenen Kanten einen normalen Spannbaum in G mit Wurzel r bilden.

(Dieses Verfahren hat den normalen Spannbäumen die Bezeichnung *Tiefensuchbaum* eingetragen.)

21. Es sei $\mathcal{T}$ eine Menge von Teilbäumen eines Baumes T. Je zwei Bäume aus $\mathcal{T}$ haben einen nicht leeren Durchschnitt. Zeige, dass auch der Durchschnitt $\bigcap \mathcal{T}$ aller Bäume aus $\mathcal{T}$ nicht leer ist.

22. Zeige, dass jeder Automorphismus eines Baumes eine Ecke oder eine Kante festlässt.

23.$^-$ Sind die Partitionsklassen eines regulären bipartiten Graphen stets gleich groß?

24. Zeige, dass ein Graph genau dann bipartit ist, wenn jeder *induzierte* Kreis gerade Länge hat.

25.$^+$ Beweise oder widerlege, dass ein zusammenhängender Graph genau dann bipartit ist, wenn es keine zwei benachbarten Ecken gibt, die den gleichen Abstand von einer dritten Ecke haben.

26.$^+$ Finde eine Funktion $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft, dass für alle $k \in \mathbb{N}$ jeder Graph mit Durchschnittsgrad $\geqslant f(k)$ einen bipartiten Teilgraphen mit Minimalgrad $\geqslant k$ hat.

27.$^-$ Es seien G und X zwei Graphen. Zeige, dass G genau dann ein MX ist, wenn es eine surjektive Abbildung $f\colon V(G) \to V(X)$ gibt, die die Benachbartheit zwischen Ecken von G erhält, wenn diese verschiedene Bilder haben, für die zwei Ecken $x, y \in X$ nur dann benachbart sind, wenn es in G benachbarte Ecken $u \in f^{-1}(x)$ und $v \in f^{-1}(y)$ gibt, und für die jedes Urbild einer Ecke von X eine zusammenhängende Eckenmenge in G ist.

28. Zeige, dass die Minorenrelation $\preccurlyeq$ auf jeder Menge paarweise nicht isomorpher endlicher Graphen eine Ordnungsrelation definiert. Gilt dies auch für unendliche Graphen?

29. Beweise oder widerlege, dass in jedem zusammenhängenden Graphen ein Kantenzug existiert, der jede Kante in jeder ihrer beiden Richtungen genau einmal durchläuft.

30. Finde zu einem gegebenem Graphen unter den Schnitten der Form $E(v)$ eine Basis für seinen Schnittraum.

31. Zeige, dass die Minimalschnitte eines Graphen gerade die minimalen Schnitte seiner Komponenten sind.

32. Ein Kreis $C \subseteq G$ heißt *geodätisch* in G, wenn für je zwei Ecken von C ihr Abstand in G nicht kürzer ist als ihr Abstand in C. Zeige, dass die geodätischen Kreise eines Graphen seinen Zyklenraum erzeugen.

33. Zeige, dass die Kreise und Schnitte eines Graphen zusammen seinen gesamten Kantenraum erzeugen – oder finde ein Gegenbeispiel.

34.$^+$ Die einzige Inklusion im Beweis von 0.9.5, die sich auf die Dimensionsformel (†) stützt, ist $\mathcal{C}^\perp \subseteq \mathcal{C}^*$. Zeige diese Inklusion direkt.

35. Zeige direkt, dass die Fundamentalkreise eines zusammenhängenden Graphen seinen Zyklenraum erzeugen.

36. Zeige direkt, dass die Fundamentalschnitte eines zusammenhängenden Graphen seinen Schnittraum erzeugen.

37. Es sei $A = (a_{ij})_{n\times n}$ die Adjazenzmatrix eines Graphen G. Zeige, dass die Matrix $A^k = (a'_{ij})_{n\times n}$ die Anzahlen a'_{ij} der Kantenzüge der Länge k von v_i nach v_j in G angibt.

38.$^+$ Beweise Gallais Schnitt-Zyklen-Partitionssatz, dass man die Eckenmenge eines Graphen $G = (V, E)$ stets so als disjunkte Vereinigung $V = V' \cup V''$ möglicherweise leerer Teilmengen schreiben kann, dass die Kantenmengen von $G[V']$ und $G[V'']$ beide im Zyklenraum von G liegen.

Notizen

Die in diesem Buch verwendete Terminologie steht in der von König, Wagner und Halin begründeten deutschsprachigen Tradition der Graphentheorie. Angelsächsische Rückimporte wie „adjazent“ statt „benachbart“ oder „Matching“ statt „Paarung“ sind bei den Definitionen und im Index zwar mit genannt, doch verwenden wir meist das deutsche Wort, wenn es schlichter oder leichter zu merken ist. (Zum Trost für Internationalisten: wer englische Wörter mag, findet in der entsprechenden Ausgabe dieses Buches davon mehr. . .)

Bei den Symbolen andererseits halten wir uns an die mittlerweile international üblichen Fassungen; so bezeichnet etwa $E(G)$ die Kantenmenge (*the edge set*) von G, nicht seine Eckenmenge. Auch bei Konventionen verwenden wir englischen Standard – in der Hoffnung, damit den Zugang zu weiterführender Literatur und Originalarbeiten zu erleichtern. So heißen Wege typischerweise P (für *path*), Bäume T, usw.

In einem kleinen Punkt weicht unsere Notation vom internationalen Standard ab: statt unserer Bezeichnungen K^n, P^n, C^n etc. ist es in der Literatur üblich, K_n, P_n, C_n usw. zu schreiben. Abgesehen von einer gewissen Natürlichkeit, eine an Dimension erinnernde Größe durch einen oberen Index zu beziffern, hat unser kleiner Sonderweg hier im Wesentlichen einen praktischen Grund: die unteren Indizes bleiben so frei für den ad-hoc-Gebrauch,

d.h. wir können von Wegen $P_1, \ldots, P_k$ sprechen, oder von Komponenten C_1 und C_2.

Satz 0.3.4 ist von N. Alon, S. Hoory & N. Linial, The Moore bound for irregular graphs, *Graphs Comb.* **18** (2002), 53–57. Der Beweis benutzt eine raffinierte Beweisführung, welche sogenannte „Irrfahrten“ (zufällig erzeugte Kantenzüge) entlang der Kanten des betrachteten Graphen zählt.

Die Hauptaussage des Satzes 0.4.3, dass ein Durchschnittsgrad von mindestens $4k$ einen k-zusammenhängenden Teilgraphen erzwingt, sowie unser Beweis des Satzes, gehen zurück auf W. Mader, Existenz n-fach zusammenhängender Teilgraphen in Graphen genügend großer Kantendichte, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* **37** (1972) 86–97. Unsere stärkere Aussage wurde zuerst von Ph. Sprüssel gefunden (2005, unveröffentlicht), mit einem anderen Beweis. Zur Geschichte des Königsberger Brückenproblems (und zu Eulers tatsächlichem Anteil an seiner Lösung) vergleiche N.L. Biggs, E.K. Lloyd & R.J. Wilson, *Graph Theory 1736–1936*, Oxford University Press 1976.

Von dem weiten Gebiet der Algebraischen Graphentheorie vermittelt Abschnitt 0.9 kaum einen angemessenen Eindruck. Ein Klassiker hierzu ist N.L. Biggs, *Algebraic Graph Theory* (2. Auflage), Cambridge University Press 1993. Eine umfassendere Darstellung geben C.D. Godsil & G.F. Royle, *Algebraic Graph Theory*, Springer GTM 207, 2001. Auch das *Handbook of Combinatorics* (R.L. Graham, M. Grötschel & L. Lovász, Hrsg.), North-Holland 1995, enthält interessante Artikel über algebraische Methoden in der Graphentheorie. Die Dimensionsformel (†) findet man etwa in G. Fischer, *Lineare Algebra* (10. Auflage), Vieweg 1995 bewiesen (Kap. 6.1, oder Kor. 2.3.1(1) mit Satz 2.6.6).

1 Paarungen Packungen Überdeckungen

Nehmen wir einmal an, wir wollten in einem gegebenen Graphen möglichst viele unabhängige Kanten finden. Wie könnten wir das anstellen? Werden wir alle Ecken mit unabhängigen Kanten überdecken können? Und falls nicht, können wir uns dann sicher sein, dass dies tatsächlich unmöglich ist? Erstaunlicherweise liegt dieses Problem nicht nur zahlreichen Anwendungen zugrunde; es führt auch geradewegs zu ausgesprochen interessanter Graphentheorie.

Eine Menge M unabhängiger Kanten in einem Graphen $G = (V, E)$ nennt man ein *Matching* oder eine *Paarung*. M ist eine Paarung *von* $U \subseteq V$, wenn jede Ecke aus U mit einer Kante aus M inzidiert. Die Ecken aus U heißen dann (in M) *gepaart*; mit keiner Kante aus M inzidente Ecken sind *ungepaart*.

Paarung

gepaarte Ecken

Einen k-regulären aufspannenden Teilgraphen nennt man einen *k-Faktor*. Ein Teilgraph $H \subseteq G$ ist also genau dann ein 1-Faktor von G, wenn $E(H)$ eine Paarung von V ist. Das Problem, welche Graphen einen 1-Faktor haben, d.h. eine Paarung ihrer gesamten Eckenmenge, ist Thema der ersten beiden Abschnitte dieses Kapitels.

Faktor

Eine offensichtlich sinnvolle Verallgemeinerung des Paarungsproblems, möglichst viele unabhängige Kanten in einem Graphen zu finden, ist das *Packungsproblem*: für eine feste Klasse $\mathcal{H}$ von Graphen finde in einem gegebenen Graphen G möglichst viele disjunkte Teilgraphen, die jeweils zu einem Element von $\mathcal{H}$ isomorph sind. Dieses Problem ist dual zu dem *Überdeckungsproblem*, mit möglichst wenigen Ecken von G all seine Teilgraphen aus $\mathcal{H}$ zu treffen.

Packung

Überdeckung

Gibt es in G bis zu k disjunkte Teilgraphen aus $\mathcal{H}$, so brauchen wir offenbar mindestens k Ecken, um alle solchen Teilgraphen zu treffen. Reichen k Ecken dazu nicht aus, so können wir jedoch fragen, ob zumindest $f(k)$ Ecken reichen – wobei $f(k)$ von $\mathcal{H}$ und k abhängen darf, aber nicht von G. In Abschnitt 1.3 werden wir beweisen, dass für die Klasse $\mathcal{H}$ aller Kreise eine solche Funktion f existiert.

In Abschnitt 1.4 betrachten wir Packungen und Überdeckungen in Bezug auf die Kanten eines Graphen: wir fragen, wie viele kantendisjunkte Spannbäume wir in einem gegebenen Graphen finden können, und wie wenige Teilbäume des Graphen ausreichen, um alle seine Kanten zu überdecken. In Abschnitt 1.5 beweisen wir einen graphentheoretischen Überdeckungssatz anderer Art, aus dem ganz leicht der bekannte Dualitätssatz von Dilworth über Teilordnungen folgt.

1.1 Paarungen in bipartiten Graphen

$G = (V, E)$
A, B
a, b *etc.*

Für diesen gesamten Abschnitt sei $G = (V, E)$ ein fester bipartiter Graph mit Eckenpartition $\{A, B\}$. Als a, a' usw. bezeichnete Ecken von G liegen generell in A, als b usw. bezeichnete in B.

alternierend

Verbesserungsweg

Wie finden wir in G eine Paarung größtmöglicher Mächtigkeit? Betrachten wir zunächst eine beliebige Paarung M in G. Ein Weg in G, der in einer ungepaarten Ecke aus A beginnt und dann abwechselnd Kanten aus $E \setminus M$ und aus M enthält, ist ein *alternierender Weg* (bezüglich M). Einen alternierenden Weg P, der in einer ungepaarten Ecke aus B endet, nennt man einen *Verbesserungsweg* (Abb. 1.1.1). Die symmetrische Differenz M' von M mit $E(P)$ ist nämlich eine Paarung in G von größerer Mächtigkeit als $|M|$: jede innere Ecke von P ist in M' wie in M gepaart, und zusätzlich sind in M' die beiden Endecken von P gepaart.

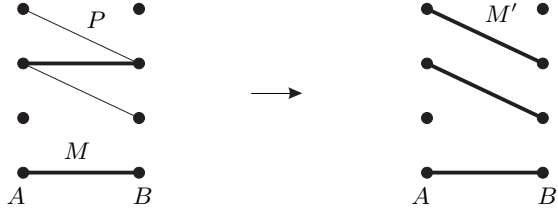


Abb. 1.1.1. Verbesserung von M zu M' durch den alternierenden Weg P

Alternierende Wege spielen bei der praktischen Suche nach möglichst großen Paarungen eine wesentliche Rolle. Wie man leicht zeigt (Übung), gibt es nämlich zu jeder Paarung, die weniger Kanten enthält

als möglich, einen Verbesserungsweg; durch sukzessives Verbessern einer beliebigen Anfangspaarung lässt sich somit eine Paarung maximaler Mächtigkeit gewinnen.

Unser erster Satz charakterisiert die größte Mächtigkeit einer Paarung in G durch eine Art Dualitätsbedingung. Wir nennen eine Menge $U \subseteq V$ eine *Eckenüberdeckung* (oder kurz *Überdeckung*) von E, wenn jede Kante aus E mit einer Ecke aus U inzidiert.

Eckenüberdeckung

Satz 1.1.1. (König 1931)
Die größte Mächtigkeit einer Paarung in G ist gleich der geringsten Mächtigkeit einer Eckenüberdeckung von E.

Beweis. Es sei M eine Paarung in G von maximaler Mächtigkeit. Wir wählen aus jeder Kante von M eine Ecke aus: ihre Ecke in B, falls in dieser Ecke ein alternierender Weg endet, und sonst ihre Ecke in A (Abb. 1.1.2). Wir zeigen, dass die Menge U der $|M|$ so ausgewählten Ecken ganz E überdeckt: da jede Überdeckung alle Kanten von M treffen muss, kann es keine Überdeckung durch weniger Ecken geben, und so folgt hieraus die Behauptung.

M

U

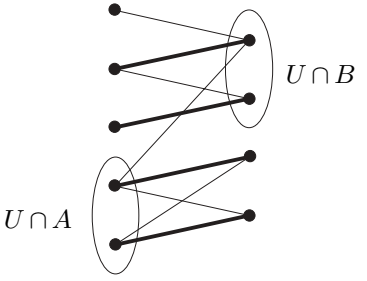


Abb. 1.1.2. Die Eckenüberdeckung U

Es sei $ab \in E$ eine beliebige Kante; wir zeigen, dass a oder b in U liegt. Ist $ab \in M$, so gilt dies nach Definition von U; es sei also $ab \notin M$. Wegen seiner Maximalität enthält M eine Kante $a'b'$ mit $a = a'$ oder $b = b'$. Wir dürfen $a = a'$ annehmen: ist nämlich a ungepaart (und $b = b'$), so ist ab ein alternierender Weg, und aus der Kante $a'b' \in M$ wurde die Ecke $b' = b$ für U gewählt. Liegt $a' = a$ nicht in U, so ist $b' \in U$, d.h. in b' endet ein alternierender Weg P. Dann endet auch in b ein alternierender Weg P': entweder $P' := Pb$ (falls $b \in P$) oder $P' := Pb'a'b$. Da P' wegen der Maximalität von M kein Verbesserungsweg sein kann, ist b gepaart und wurde aus seiner Paarungskante für U gewählt. □

Statt allgemein nach einer größtmöglichen Paarung in G zu fragen, interessiert man sich häufig konkret für die Frage, ob G eine Paarung

von ganz A enthält. Offensichtlich notwendig hierfür ist, dass es für jede Teilmenge von A genügend Nachbarn in B gibt, dass also gilt:

Heiratsbedingung

$$|N(S)| \geqslant |S| \qquad \text{für alle } S \subseteq A.$$

Der folgende sogenannte *Heiratssatz* besagt, dass diese einfache notwendige Bedingung auch hinreichend ist zur Existenz einer Paarung von A:

[1.2.3] **Satz 1.1.2.** (Hall 1935)
G enthält genau dann eine Paarung von A, wenn $|N(S)| \geqslant |S|$ gilt für alle Eckenmengen $S \subseteq A$.

Wir geben drei Beweise, von „algorithmisch-natürlich“ bis „glatt und elegant“. Man kann den Heiratssatz auch leicht aus dem Satz von König herleiten (Übung 4).

M **Erster Beweis.** Es sei M eine Paarung von G, in der nicht alle Ecken aus A gepaart sind; wir konstruieren zu M einen Verbesserungsweg. Es sei $a_0, b_1, a_1, b_2, a_2, \dots$ eine maximale Folge verschiedener Ecken $a_i \in A$ und $b_i \in B$ mit den folgenden Eigenschaften für alle $i \geqslant 1$ (Abb. 1.1.3):

(i) a_0 ist ungepaart;

$f(i)$ (ii) b_i ist zu einer Ecke $a_{f(i)} \in \{a_0, \dots, a_{i-1}\}$ benachbart;

(iii) $a_i b_i \in M$.

Aufgrund der Heiratsbedingung kann unsere Folge nicht in einer Ecke aus A enden: die i Ecken $a_0, \dots, a_{i-1}$ haben insgesamt mindestens i
k Nachbarn in B, also nicht nur die Ecken $b_1, \dots, b_{i-1}$. Es sei $b_k \in B$ die letzte Ecke der Folge. Nach (i)–(iii) ist

P
$$P := b_k a_{f(k)} b_{f(k)} a_{f^2(k)} b_{f^2(k)} a_{f^3(k)} \dots a_{f^r(k)}$$

mit $f^r(k) = 0$ ein alternierender Weg.

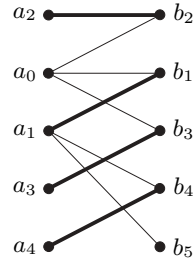


Abb. 1.1.3. Beweis des Heiratssatzes mit alternierenden Wegen

Woran kann es liegen, dass unsere Eckenfolge nicht verlängerbar ist? Gibt es ein $a \in A$ mit $ab_k \in M$, so könnten wir sie mit $a_k := a$

verlängern – es sei denn, es ist bereits $a = a_i$ mit $0 < i < k$. Nach (iii) wäre dann jedoch $b_k = b_i$, mit Widerspruch. Dass wir die Folge nicht verlängern können, kann also nur den Grund haben, dass b_k nicht gepaart ist. Dann aber ist P ein Verbesserungsweg zwischen b_k und a_0. □

Zweiter Beweis. Wir verwenden Induktion nach $|A|$. Für $|A| = 1$ ist die Behauptung wahr. Es sei nun $|A| \geqslant 2$, und für kleinere $|A|$ sei die Heiratsbedingung hinreichend zur Existenz einer Paarung von A.

Gilt $|N(S)| \geqslant |S| + 1$ für jedes nicht leere $S \subsetneqq A$, so wählen wir irgendeine Kante $ab \in G$ und betrachten $G' := G - \{a, b\}$. Für jedes nicht leere $S \subseteq A \setminus \{a\}$ gilt dann

$$|N_{G'}(S)| \geqslant |N_G(S)| - 1 \geqslant |S|\,,$$

d.h. nach Induktionsannahme enthält G' eine Paarung von $A \setminus \{a\}$. Zusammen mit der Kante ab ergibt dies eine Paarung von A in G.

Es gebe also ein nicht leeres $A' \subsetneqq A$ mit $|B'| = |A'|$ für $B' := N(A')$. Nach Induktionsannahme enthält $G' := G[A' \cup B']$ eine Paarung von A'. Nun erfüllt aber auch $G - G'$ die Heiratsbedingung: gäbe es ein $S \subseteq A \setminus A'$ mit $|N_{G-G'}(S)| < |S|$, so wäre $|N_G(S \cup A')| < |S \cup A'|$, mit Widerspruch. Nach Induktionsannahme enthält somit auch $G - G'$ eine Paarung von $A \setminus A'$, und wir können die beiden Paarungen zu einer Paarung von A in G zusammensetzen. □

A', B'

G'

Für unseren letzten Beweis sei H ein A enthaltender Teilgraph von G, der die Heiratsbedingung erfüllt und mit dieser Eigenschaft kantenminimal ist. Wegen der Heiratsbedingung für $S = \{a\}$ ist $d_H(a) \geqslant 1$ für alle $a \in A$.

H

Dritter Beweis. Wir werden zeigen, dass $d_H(a) = 1$ ist für alle $a \in A$. Da H der Heiratsbedingung genügt, bilden seine Kanten dann eine Paarung von A.

Nehmen wir an, eine Ecke $a \in A$ habe verschiedene Nachbarn b_1, b_2 in H. Wegen der Minimalität von H verletzen die Graphen $H - ab_1$ und $H - ab_2$ die Heiratsbedingung (Abb. 1.1.4). Für $i = 1, 2$ gibt es

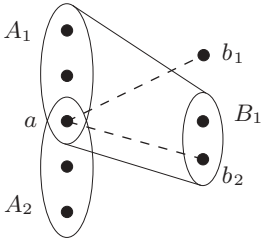


Abb. 1.1.4. B_1 enthält b_2, aber nicht b_1

also jeweils eine Menge $A_i \subseteq A$, die a enthält und $|A_i| > |B_i|$ erfüllt für $B_i := N_{H-ab_i}(A_i)$. Wegen $b_1 \in B_2$ und $b_2 \in B_1$ erhalten wir

$$\begin{aligned} |N_H(A_1 \cap A_2 \setminus \{a\})| &\leqslant |B_1 \cap B_2| \\ &= |B_1| + |B_2| - |B_1 \cup B_2| \\ &= |B_1| + |B_2| - \big|N_H(A_1 \cup A_2)\big| \\ &\leqslant |A_1| - 1 + |A_2| - 1 - |A_1 \cup A_2| \\ &= |A_1 \cap A_2 \setminus \{a\}| - 1\,. \end{aligned}$$

Also verletzt H die Heiratsbedingung, entgegen unserer Annahme. □

Zu diesem letzten Beweis gibt es ein hübsches „Dual“, bei dem man zunächst zeigt, dass $d_H(b) \leqslant 1$ ist für alle $b \in B$. Siehe Übung **5** und den Hinweis dazu.

Korollar 1.1.3. *Ist G k-regulär mit $k \geqslant 1$, so hat G einen 1-Faktor.*

Beweis. Ist G k-regulär, so gilt offenbar $|A| = |B|$; es reicht also, mit Satz 1.1.2 zu zeigen, dass G eine Paarung von A enthält. Nun gehen von jeder Menge $S \subseteq A$ insgesamt $k\,|S|$ Kanten nach $N(S)$, und diese Kanten gehören zu den $k\,|N(S)|$ Kanten, die insgesamt mit $N(S)$ inzidieren. Es gilt also $k\,|S| \leqslant k\,|N(S)|$, d.h. G erfüllt in der Tat die Heiratsbedingung. □

Bei Anwendungen aus dem wirklichen Leben werden Paarungen nicht immer auf der Basis globaler Kriterien des gesamten Graphen ausgesucht. Vielmehr entstehen sie häufig als Ergebnis voneinander unabhängiger Entscheidungen, die lokal von beteiligten Ecken getroffen werden. Eine typische solche Situation liegt vor, wenn es den Ecken nicht gleichgültig ist, durch welche ihrer inzidenten Kanten sie gepaart werden, sondern sie einige gegenüber anderen bevorzugen. Wenn dann M eine Paarung ist und $e = ab$ eine Kante, die nicht in M liegt, so dass a und b beide die Kante e gegenüber ihrer gegenwärtigen Paarungskante (wenn eine solche existiert) bevorzugen, dann könnten a und b beschließen, M lokal zu verändern, indem sie e hinzunehmen und ihre vorherigen Paarungskanten verwerfen. Die Paarung M wäre also *instabil*, auch wenn sie vielleicht maximale Größe hat.

Präferenzlisten

stabile Paarung

Etwas formaler nennen wir eine Familie $(\leqslant_v)_{v \in V}$ vollständiger Ordnungen $\leqslant_v$ auf $E(v)$ ein System von *Präferenzlisten* für G. Dann heißt eine Paarung M in G *stabil*, wenn für jede Kante $e \in E \setminus M$ eine Kante $f \in M$ existiert, so dass e und f eine gemeinsame Ecke v mit $e <_v f$ haben. Der folgende Satz ist im Englischen als das *stable marriage theorem* bekannt:

[4.4.4] **Satz 1.1.4.** (Gale & Shapley 1962)
Für jedes System von Präferenzlisten hat G eine stabile Paarung.

Beweis (vergleiche Übung **14**). Wir nennen eine Paarung M in G *besser* als eine Paarung $M' \neq M$, wenn M die Ecken in B glücklicher macht als M', das heißt, wenn jede Ecke b aus einer Kante $f' \in M'$ auch mit einer Kante $f \in M$ inzidiert, für die $f' \leqslant_b f$ gilt. Wir werden eine Folge sukzessive immer besserer Paarungen konstruieren. Da wir diese an jeder Ecke $b \in B$ nur $d(b)$-mal echt verbessern können, wird diese Folge nach endlich vielen Schritten zu einem Ende kommen.

Zu gegebener Paarung M nennen wir eine Ecke $a \in A$ *interessant für* $b \in B$, wenn $e = ab \in E \setminus M$ ist und, falls M eine mit b inzidente Kante f enthält, $f <_b e$ gilt. Wir nennen $a \in A$ *zufrieden mit* M, falls a ungepaart ist oder für seine Paarungskante $f \in M$ gilt, dass $f >_a e$ ist für alle Kanten $e = ab$ mit der Eigenschaft, dass a für b interessant ist.

Mit der leeren Paarung beginnend, konstruieren wir jetzt eine Folge von Paarungen, die jeweils alle Ecken in A zufrieden stellen. Haben wir eine solche Paarung M konstruiert, so betrachten wir im nächsten Schritt eine Ecke $a \in A$, die ungepaart aber interessant für ein $b \in B$ ist. (Gibt es kein solches a, so beenden wir die Konstruktion.) Wir fügen dann zu M die $\leqslant_a$-maximale Kante ab hinzu, für die a für b interessant ist, und löschen aus M die bisherige Kante an b (falls sie existiert).

Offensichtlich ist jede Paarung in unserer Folge besser als die vorherige, und induktiv folgt leicht, dass jede von ihnen alle Ecken in a zufrieden stellt. Unsere Folge endet schließlich mit einer Paarung M, für die jede ungepaarte Ecke in A für all ihre Nachbarn in B uninteressant ist. Da jede gepaarte Ecke in A mit M zufrieden ist, ist diese Paarung stabil. □

Zahlreichen Anwendungen des Heiratssatzes geht eine – zuweilen recht clevere – Aufbereitung des eigentlich zu lösenden Problems voraus, seine Umwandlung in die immerhin recht spezielle Form eines bipartiten Paarungsproblems. Als einfaches Beispiel leiten wir aus dem Heiratssatz einen der ältesten Sätze der Graphentheorie her, dessen Originalbeweis gar nicht so einfach (und gewiss nicht kurz) ist:

Korollar 1.1.5. (Petersen 1891)
Jeder reguläre Graph geraden Grades > 0 *hat einen 2-Faktor.*

Beweis. Es sei G ein beliebiger $2k$-regulärer Graph ($k \geqslant 1$), oBdA zusammenhängend. Nach Satz 0.8.1 enthält G einen eulerschen Kantenzug $v_0 e_0 \dots e_{\ell-1} v_\ell$, mit $v_\ell = v_0$. Wir ersetzen jetzt jede Ecke v durch ein Eckenpaar (v^-, v^+) und jede Kante $e_i = v_i v_{i+1}$ durch die Kante $v_i^+ v_{i+1}^-$ (Abb. 1.1.5). Der entstandene bipartite Graph ist k-regulär und hat somit nach Korollar 1.1.3 einen 1-Faktor. Identifizieren wir in diesem 1-Faktor jedes Eckenpaar (v^-, v^+) wieder zur ursprünglichen Ecke v, so erhalten wir einen 2-Faktor in G. □ (0.8.1)

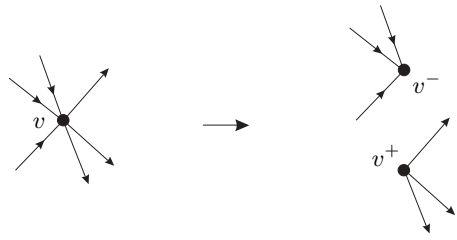


Abb. 1.1.5. Die Eckenspaltung im Beweis von Korollar 1.1.5

1.2 Paarungen in allgemeinen Graphen

$\mathcal{C}_G$ Für einen Graphen G bezeichne $\mathcal{C}_G$ die Menge seiner Komponenten und
$q(G)$ $q(G)$ die Anzahl seiner *ungeraden Komponenten*, der Komponenten ungerader Ordnung. Hat G einen 1-Faktor, so gilt offenbar

Tutte-Bedingung

$$q(G-S) \leqslant |S| \qquad \text{für alle } S \subseteq V(G).$$

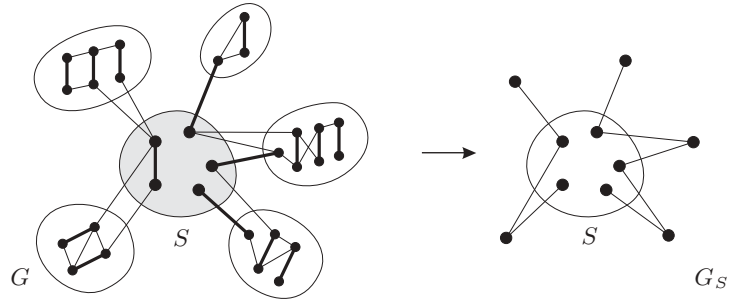


Abb. 1.2.1. Die Tutte-Bedingung $q(G-S) \leqslant |S|$ für $q = 3$, und der kontrahierte Graph G_S aus Satz 1.2.3

Dass auch die Umkehrung dieser Implikation gilt, ist ein weiterer klassischer Satz der Graphentheorie:

Satz 1.2.1. (Tutte 1947)
Ein Graph G hat genau dann einen 1-Faktor, wenn $q(G-S) \leqslant |S|$ gilt für alle $S \subseteq V(G)$.

V, E *Beweis.* Es sei $G = (V, E)$ ein Graph ohne 1-Faktor. Wir werden eine Menge $S \subseteq V$ finden, die die Tutte-Bedingung verletzt; solche Mengen
schlecht nennen wir *schlecht*.

Wir dürfen annehmen, dass G kantenmaximal ist ohne 1-Faktor. Ist nämlich $S \subseteq V$ schlecht in einem Graphen $G' \supseteq G$, der aus G durch Hinzufügung von Kanten entstanden ist, so ist S auch schlecht in G: jede

ungerade Komponente von $G' - S$ ist die Vereinigung von Komponenten von $G - S$, und von diesen muss dann auch jeweils eine ungerade sein.

Wie sieht G aus? *Falls* G eine schlechte Menge S enthält, dann hat G aufgrund seiner Kantenmaximalität und der trivialen Vorwärtsrichtung des Satzes die folgende Struktur:

Alle Komponenten von $G - S$ sind vollständig, und jede Ecke aus S ist zu allen Ecken außer sich selbst benachbart. $(*)$

Erfüllt umgekehrt eine Menge $S \subseteq V$ die Bedingung $(*)$, so ist S auch notwendig schlecht (es sei denn, die leere Menge ist schlecht, was uns ja auch genügt): wäre S nicht schlecht, so könnten wir die ungeraden Komponenten von $G - S$ disjunkt mit S verbinden und die restlichen Ecken zu Paaren benachbarter Ecken zusammenfassen – es sei denn, $|G|$ ist ungerade, doch dann ist $\emptyset$ schlecht in G.

Es reicht also, eine Menge S zu finden, die $(*)$ erfüllt. Dazu sei S die Menge derjenigen Ecken, die zu allen Ecken (außer sich selbst) benachbart sind. Erfüllt dieses S nicht $(*)$, so gibt es eine Komponente von $G - S$ mit nicht benachbarten Ecken a, a'. Sind a, b, c die ersten drei Ecken auf einem kürzesten a–a'-Weg in dieser Komponente, so haben wir $ab, bc \in E$ und $ac \notin E$. Wegen $b \notin S$ gibt es überdies eine Ecke $d \in V$ mit $bd \notin E$. Wegen der Kantenmaximalität von G gibt es dann eine Paarung M_1 von V in $G + ac$ und eine Paarung M_2 von V in $G + bd$.

S a, b, c d M_1, M_2

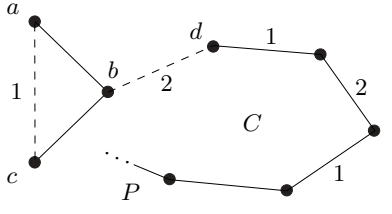


Abb. 1.2.2. Was passiert, wenn S nicht $(*)$ erfüllt

Es sei $P = d \dots v$ ein maximaler Weg in G, der in d mit einer Kante aus M_1 beginnt und dann abwechselnd Kanten aus M_1 und M_2 enthält. Liegt die letzte Kante von P in M_1, so gilt $v = b$, da wir P sonst fortsetzen könnten; wir setzen dann $C := P + bd$. Liegt die letzte Kante von P in M_2, so muss wegen der Maximalität von P die mit v inzidente M_1-Kante die Kante ac sein; dann ist $v \in \{a, c\}$, und wir bezeichnen den Kreis $dPvbd$ mit C. In beiden Fällen ist C ein Kreis gerader Länge, bei dem jede zweite Kante in M_2 liegt, und dessen Kanten außer bd alle in G liegen. Indem wir in M_2 die Kanten auf C durch die Kanten von $C - M_2$ ersetzen, erhalten wir eine in E enthaltene Paarung von V, mit Widerspruch. □

v

Korollar 1.2.2. (Petersen 1891)
Jeder brückenlose kubische Graph hat einen 1-Faktor.

Beweis. Wir zeigen, dass jeder brückenlose kubische Graph G der Tutte-Bedingung genügt. Sei dazu $S \subseteq V(G)$ gegeben und C eine ungerade Komponente von $G-S$. Da G kubisch ist, ist die Summe der Eckengrade (in G) aller Ecken in C ungerade, aber nur ein gerader Anteil dieser Summe kommt von Kanten aus C. Somit hat G eine ungerade Anzahl von S–C - Kanten. Da G keine Brücke hat, gibt es mindestens drei solche Kanten. Die Gesamtzahl der Kanten zwischen S und $G-S$ beträgt somit mindestens $3q(G-S)$. Sie beträgt aber auch höchstens $3|S|$, da G kubisch ist. Es gilt daher $q(G-S) \leqslant |S|$, wie erwünscht. □

Um den Satz von Tutte noch von einer anderen Seite zu beleuchten, geben wir noch einen zweiten Beweis. Wir beweisen sogar einen etwas stärkeren Satz, der überdies interessante strukturelle Aussagen zur Lage sämtlicher größtmöglicher Paarungen in beliebigen Graphen impliziert – auch dann, wenn diese keinen 1-Faktor enthalten.

faktorkritisch

Ein Graph $G = (V, E)$ heiße *faktorkritisch*, wenn $G \neq \emptyset$ ist und $G - v$ für jede Ecke v einen 1-Faktor hat. G selbst hat dann natürlich keinen 1-Faktor, da es ungerade Ordnung hat. Eine Eckenmenge $S \subseteq V$ heiße *paarbar nach* $G - S$, wenn der bipartite[1] Graph G_S, der aus G durch Kontraktion der Komponenten $C \in \mathcal{C}_{G-S}$ und Löschen aller Kanten innerhalb von S entsteht, eine Paarung von S enthält. (Formal ist G_S der Graph mit Eckenmenge $S \cup \mathcal{C}_{G-S}$ und Kantenmenge $\{\, sC \mid \exists\, c \in C : sc \in E \,\}$; siehe Abb. 1.2.1.)

paarbar

G_S

Satz 1.2.3. *Jeder Graph $G = (V, E)$ enthält eine Eckenmenge S mit den folgenden beiden Eigenschaften:*

(i) *S ist paarbar nach $G - S$;*

(ii) *Jede Komponente von $G - S$ ist faktorkritisch.*

Für jedes solche S enthält G genau dann einen 1-Faktor, wenn $|S| = |\mathcal{C}_{G-S}|$ ist.

Für jedes gegebene G folgt die Aussage des Satzes von Tutte leicht aus der Aussage dieses Satzes. Mit (i) und (ii) gilt nämlich $|S| \leqslant |\mathcal{C}_{G-S}| = q(G-S)$ (da faktorkritische Graphen ungerade Ordnung haben); aus der Tutte-Bedingung $q(G-S) \leqslant |S|$ folgt somit $|S| = |\mathcal{C}_{G-S}|$, und damit nach der letzten Aussage des Satzes die Existenz eines 1-Faktors.

(1.1.2)

Beweis von Satz 1.2.3. Zunächst ist klar, dass die letzte Aussage des Satzes sofort aus den Eigenschaften (i) und (ii) von S folgt: hat G einen 1-Faktor, so gilt $q(G-S) \leqslant |S|$ und damit wie oben die Identität $|S| = |\mathcal{C}_{G-S}|$; gilt andererseits $|S| = |\mathcal{C}_{G-S}|$, so folgt die Existenz eines 1-Faktors direkt aus (i) und (ii).

[1] abgesehen von dem – gestatteten – Fall, dass S oder $\mathcal{C}_{G-S}$ leer ist

Wir beweisen jetzt die Existenz von S, mit Induktion nach $|G|$. Für $|G| = 0$ leistet $S = \emptyset$ das Gewünschte. Es sei nun $|G| > 0$, und die Behauptung gelte für Graphen kleinerer Ordnung.

Unter den Mengen $T \subseteq V$, die die Tutte-Bedingung „am schlechtesten erfüllen“, d.h. für die

$$d(T) := d_G(T) := q(G-T) - |T|$$

am größten ist, sei S eine Menge maximaler Mächtigkeit. Dann ist $d(S) \geqslant d(\emptyset) \geqslant 0$. S

Wir zeigen zunächst, dass jedes $C \in \mathcal{C}_{G-S} =: \mathcal{C}$ ungerade Ordnung hat. Anderenfalls betrachte eine beliebige Ecke $c \in C$ und $T := S \cup \{c\}$. Dann hat $C - c$ ungerade Ordnung und somit mindestens eine ungerade Komponente, und diese ist auch eine Komponente von $G - T$. Wir haben dann $\mathcal{C}$

$$q(G-T) \geqslant q(G-S) + 1 \quad \text{und} \quad |T| = |S| + 1$$

und damit $d(T) \geqslant d(S)$, was der Wahl von S widerspricht.

Als nächstes zeigen wir die Aussage (ii), dass jedes $C \in \mathcal{C}$ faktorkritisch ist. Angenommen, es gibt ein $C \in \mathcal{C}$ und $c \in C$, so dass $C' := C - c$ keinen 1-Faktor enthält. Nach Induktionsannahme und der vorweg gezeigten Tatsache, dass für festes G der Satz von Tutte aus unserem Satz folgt, existiert dann ein $S' \subseteq V(C')$ mit

$$q(C' - S') > |S'|\,.$$

Da $|C|$ ungerade und somit $|C'|$ gerade ist, sind aber $q(C' - S')$ und $|S'|$ entweder beide gerade oder beide ungerade, unterscheiden sich also nicht um genau 1. Somit folgt schärfer

$$q(C' - S') \geqslant |S'| + 2\,,$$

also $d_{C'}(S') \geqslant 2$. Für $T := S \cup \{c\} \cup S'$ haben wir dann

$$d(T) \geqslant d(S) - 1 - 1 + d_{C'}(S') \geqslant d(S)\,,$$

wobei die erste „-1“ vom Verlust der Komponente C herrührt und die zweite von der Aufnahme der Ecke c in die Menge T. Wie oben widerspricht dies aber der Wahl von S.

Es bleibt zu zeigen, dass S nach $G - S$ paarbar ist. Falls nicht, dann gibt es nach dem Heiratssatz eine Menge $S' \subseteq S$, von der aus Kanten in weniger als $|S'|$ der Komponenten in $\mathcal{C}$ führen. Die anderen Komponenten in $\mathcal{C}$ sind aber auch Komponenten von $G - (S \setminus S')$. Für $T = S \setminus S'$ gilt somit $d(T) > d(S)$, wiederum entgegen der Wahl von S. □

S
$\mathcal{C}$
$k_S, k_{\mathcal{C}}$

Betrachten wir noch einmal die Menge S aus Satz 1.2.3, sowie eine beliebige Paarung M in G. Wir schreiben wieder $\mathcal{C} := \mathcal{C}_{G-S}$. Es sei k_S die Anzahl der Kanten aus M mit mindestens einer Endecke in S, und $k_{\mathcal{C}}$ die Anzahl der Kanten aus M mit beiden Endecken in $G - S$. Da jedes $C \in \mathcal{C}$ ungerade Ordnung hat, wird mindestens eine seiner Ecken von keiner Kante der zweiten Art getroffen. Für jedes M gilt somit

$$k_S \leqslant |S| \quad \text{und} \quad k_{\mathcal{C}} \leqslant \tfrac{1}{2}\Big(|V| - |S| - |\mathcal{C}|\Big). \tag{1}$$

M_0

Überdies hat G eine Paarung M_0, für die hier in beiden Fällen Gleichheit gilt: wähle zuerst $|S|$ Kanten von S nach $\bigcup \mathcal{C}$ gemäß (i), und sodann nach (ii) geeignete Mengen von $\frac{1}{2}\big(|C|-1\big)$ Kanten in jeder Komponente $C \in \mathcal{C}$. Diese Paarung M_0 hat also genau

$$|M_0| = |S| + \tfrac{1}{2}\Big(|V| - |S| - |\mathcal{C}|\Big) \tag{2}$$

Kanten.

Aus (1) und (2) zusammen folgt nun, dass für *jede* Paarung M maximaler Mächtigkeit in den beiden Ungleichungen von (1) Gleichheit gelten muss: wegen $|M| \geqslant |M_0|$ und (2) hat M mindestens $|S| + \frac{1}{2}\big(|V| - |S| - |\mathcal{C}|\big)$ Kanten, und mit (1) folgt hieraus, dass keine der beiden Ungleichungen in (1) echt sein kann. Gleichheit in (1) aber impliziert ihrerseits, dass M die obige Struktur hat: wegen $k_S = |S|$ enthält M für jedes $s \in S$ eine Kante st mit $t \in G - S$, und wegen $k_{\mathcal{C}} = \frac{1}{2}\big(|V| - |S| - |\mathcal{C}|\big)$ enthält M für jedes $C \in \mathcal{C}$ genau $\frac{1}{2}(|C| - 1)$ Kanten aus C; da letztere nur eine Ecke von C aussparen, liegen die Endecken t der Kanten st überdies in verschiedenen C.

Hinter Satz 1.2.3 versteckt sich mithin ein Struktursatz für alle Paarungen M maximaler Mächtigkeit, in beliebigen Graphen. In noch etwas allgemeinerer Form ist dieser Struktursatz bekannt als *Satz von Gallai und Edmonds*; Näheres dazu in den Notizen.

1.3 Packungen und Überdeckungen

Viel von der schlichten Schönheit der Sätze von König (1.1.1) und Hall (1.1.2) geht sicher davon aus, dass sie die Existenz der gewünschten Paarung bereits garantieren, sobald ein offensichtlicher Hinderungsgrund dafür nicht auftritt. Im Satz von König etwa können wir stets k unabhängige Kanten finden, solange nicht weniger als k Ecken alle Kanten überdecken (was die Existenz von k unabhängigen Kanten natürlich ausschließt).

Ist allgemeiner G ein beliebiger Graph (nicht notwendig bipartit) sowie $\mathcal{H}$ irgendeine Klasse von Graphen, und ist k die maximale Anzahl disjunkter Teilgraphen von G, die jeweils zu einem Graphen in $\mathcal{H}$

isomorph sind, so können wir fragen, ob die minimale Anzahl s von Ecken von G, die *all* seine Teilgraphen aus $\mathcal{H}$ treffen, zumindest durch eine Funktion von k beschränkt ist – wenn schon nicht, wie bei König, durch k selbst. Ist dies der Fall, so sagen wir, dass $\mathcal{H}$ die „Erdős-Pósa-Eigenschaft“ habe. Formaler: eine Graphenklasse $\mathcal{H}$ hat die *Erdős-Pósa-Eigenschaft*, wenn eine Funktion $k \mapsto f(k)$ von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{R}$ existiert, so dass es für jedes k in jedem Graphen G stets entweder k disjunkte Teilgraphen aus $\mathcal{H}$ gibt oder eine Menge U von höchstens $f(k)$ Ecken, für die $G-U$ keinen Teilgraphen aus $\mathcal{H}$ hat.

Erdős-Pósa-Eigenschaft

Unser Ziel in diesem Abschnitt ist es, den Satz von Erdős und Pósa zu beweisen, dass die Klasse aller Kreise diese Eigenschaft hat. Wir werden also eine Funktion f finden (etwa $4k \log k$), so dass in einem Graphen stets entweder k disjunkte Kreise existieren oder all seine Kreise durch höchstens $f(k)$ Ecken überdeckbar sind.

Dazu zeigen wir zunächst eine stärkere Aussage für kubische Graphen. Für $k \in \mathbb{N}$ setze

$$s_k := \begin{cases} 4kr_k & \text{falls } k \geqslant 2 \\ 1 & \text{falls } k \leqslant 1 \end{cases} \quad \text{mit} \quad r_k := \log k + \log\log k + 4\,.$$

r_k, s_k

Lemma 1.3.1. *Jeder kubische Multigraph mit mindestens s_k Ecken enthält k disjunkte Kreise, für alle $k \in \mathbb{N}$.*

Beweis. Wir verwenden Induktion nach k. Für $k \leqslant 1$ ist die Behauptung klar. Zum Induktionsschritt sei $k \geqslant 2$, es sei H ein kubischer Multigraph mit $|H| \geqslant s_k$, und es sei C ein kürzester Kreis in H. (0.3.5)

Wir zeigen zunächst, dass $H-C$ eine Unterteilung eines kubischen Multigraphen H' mit $|H'| \geqslant |H| - 2|C|$ enthält. Es sei m die Anzahl der Kanten von H zwischen C und $H-C$. Da H kubisch ist und $d(C) = 2$, ist $m \leqslant |C|$. Wir betrachten nun Partitionen von $V(H)$ in zwei Mengen V_1 und V_2, beginnend mit $V_1 := V(C)$. Hat $H[V_2]$ eine Ecke vom Grad höchstens 1, so schieben wir sie von V_2 nach V_1 und erhalten eine neue Partition $\{V_1, V_2\}$ mit weniger V_1–V_2 - Kanten. Nehmen wir an, wir können n solche Eckenbewegungen ausführen, aber nicht mehr. Danach hat $H[V_2]$ nur noch höchstens $m-n$ Ecken vom Grad < 3, da jede solche Ecke mit einer V_1–V_2 - Kante inzidiert und H nur noch höchstens $m-n$ solche Kanten hat. Und jede Ecke vom Grad < 3 in $H[V_2]$ hat dort den Grad 2, da wir sie sonst nach V_1 schieben könnten. Es sei H' der aus $H[V_2]$ durch Unterdrückung dieser Ecken entstehende kubische Multigraph. Dessen Ordnung beträgt dann, wie erwünscht,

m

n

$$|H'| \geqslant |H| - |C| - n - (m-n) \geqslant |H| - 2|C|\,.$$

Zur Vollendung des Induktionsschrittes zeigen wir jetzt $|H'| \geqslant s_{k-1}$. Da $|C| \leqslant 2\log|H|$ ist nach Korollar 0.3.5 (bzw. wegen $|H| \geqslant s_k$, falls

$|C| = g(H) \leqslant 2$), und da $|H| \geqslant s_k \geqslant 6$ ist, haben wir

$$|H'| \geqslant |H| - 2|C| \geqslant |H| - 4\log|H| \geqslant s_k - 4\log s_k\,.$$

(Bei der letzten Ungleichung benutzen wir, dass für $x \geqslant 6$ die Funktion $x \mapsto x - 4\log x$ monoton wächst.)

Es reicht somit, $s_k - 4\log s_k \geqslant s_{k-1}$ zu zeigen. Dies ist klar für $k = 2$, so dass wir $k \geqslant 3$ annehmen dürfen. Dann ist $r_k \leqslant 4\log k$ (was für $k \geqslant 4$ klar ist; für $k = 3$ muss man rechnen), und es folgt

$$\begin{aligned} s_k - 4\log s_k &= 4(k-1)r_k + 4\log k + 4\log\log k + 16 \\ &\qquad - \bigl(8 + 4\log k + 4\log r_k\bigr) \\ &\geqslant s_{k-1} + 4\log\log k + 8 - 4\log(4\log k) \\ &= s_{k-1}\,. \end{aligned}$$

□

Satz 1.3.2. (Erdős & Pósa 1965)
Es existiert eine Funktion $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass für jedes $k \in \mathbb{N}$ jeder Graph G entweder k disjunkte Kreise enthält oder eine Menge von höchstens $f(k)$ Ecken, die alle seine Kreise trifft.

Beweis. Wir zeigen die Behauptung für $f(k) := s_k + k - 1$. Seien k und G gegeben. Wir dürfen annehmen, dass G einen Kreis enthält, und somit auch einen maximalen Teilgraphen H, in dem jede Ecke den Grad
U 2 oder 3 hat. Es sei U die Menge der Ecken vom Grad 3 in H.

Weiter sei $\mathcal{C}$ die Menge aller Kreise in G, die U vermeiden und H
Z in genau einer Ecke treffen, und es sei $Z \subseteq V(H) \setminus U$ die Menge dieser Ecken. Zu jedem $z \in Z$ wählen wir einen Kreis $C_z \in \mathcal{C}$, der H in z trifft, und setzen $\mathcal{C}' := \{\, C_z \mid z \in Z \,\}$. Aufgrund der Maximalität von H sind die Kreise in $\mathcal{C}'$ disjunkt.

Es sei $\mathcal{D}$ die Menge aller 2-regulären Komponenten von H, die keine Ecke aus Z enthalten. Dann ist auch $\mathcal{C}' \cup \mathcal{D}$ eine Menge disjunkter Kreise. Ist $|\mathcal{C}' \cup \mathcal{D}| \geqslant k$, so sind wir fertig. Anderenfalls können wir zu Z eine
X Ecke aus jedem Kreis in $\mathcal{D}$ hinzufügen und erhalten so eine Menge X von höchstens $k - 1$ Ecken, die alle Kreise in $\mathcal{C}$ und alle 2-regulären Komponenten von H trifft.

Betrachten wir nun einen Kreis in G, der X vermeidet. Dieser Kreis trifft H, wegen der Maximalität von H. Aber er ist keine Komponente von H, er liegt nicht in $\mathcal{C}$, und er enthält keinen H-Weg, der zwei Ecken vom Grad 2 in H verbindet (wiederum wegen der Maximalität von H). Unser Kreis trifft daher U.

Wir haben gezeigt, dass jeder Kreis in G eine Ecke aus $X \cup U$ enthält. Wegen $|X| \leqslant k - 1$ reicht es somit zu zeigen, dass $|U| < s_k$ gilt oder k disjunkte Kreise in H existieren. Dies folgt aber aus Lemma 1.3.1, angewandt auf den aus H durch Unterdrückung der Ecken vom Grad 2 erhaltenen kubischen Graphen. □

Im Kapitel 10 werden wir noch einmal auf die Erdős-Pósa-Eigenschaft treffen. Dort werden wir eine beträchtliche Verallgemeinerung des Satzes 1.3.2 als ein unerwartetes und ganz einfaches Korollar der Theorie der Graphenminoren erhalten.

1.4 Kantendiskunkte Spannbäume und Arborizität

In diesem Abschnitt betrachten wir Packungen und Überdeckungen im Hinblick auf Kanten anstelle von Ecken. Wie viele kantendisjunkte Spannbäume können wir in einem gegebenen Graphen G finden? Und wie wenige Teilbäume von G (die nicht unbedingt kantendisjunkt sein müssen) genügen, um alle Kanten von G zu überdecken?

Zur Motivation des Spannbaum-Packungsproblems nehmen wir einmal an, unser Graph stelle ein Kommunikationsnetz dar. Nennt uns jemand zwei Ecken, so möchten wir schnell in der Lage sein, k kantendisjunkte Wege zwischen diesen beiden Ecken zu finden. Der Satz 2.3.6 (ii) von Menger aus dem nächsten Kapitel wird uns sagen, dass solche Wege existieren, sobald unser Graph k-kantenzusammenhängend ist. Dies ist offensichtlich auch notwendig, was den Satz besonders einleuchtend und attraktiv macht. Doch verrät uns der Satz von Menger nicht, wie man die Wege finden kann! Ja, selbst wenn wir die gesuchten Wege für ein Eckenpaar gefunden haben, nützt uns dies nichts dabei, sie auch für ein weiteres Paar zu finden. Hat unser Graph jedoch k kantendisjunkte Spannbäume, so können wir die gesuchten k Wege jederzeit schnell finden, nachdem wir einmal die Bäume in unserem Computer gespeichert haben: wir suchen einfach in jedem Baum einen Weg.

Wann hat ein Graph G aber k kantendisjunkte Spannbäume? Wenn es sie gibt, muss G sicherlich k-kantenzusammenhängend sein. Die Umkehrung jedoch ist falsch, wie man bereits für $k = 2$ sieht. Es ist sogar nicht einmal klar, ob die Existenz von k kantendisjunkten Spannbäumen überhaupt durch eine Annahme hohen Zusammenhangs allein zu gewährleisten ist. (Siehe jedoch Korollar 1.4.2 unten.)

Betrachten wir daher zunächst eine andere Bedingung, die auch offensichtlich notwendig ist. Ist $P = \{V_1, \dots, V_r\}$ eine beliebige Partition von V, so enthält jeder Spannbaum von G nach Korollar 0.5.3 mindestens $r - 1$ Kanten zwischen verschiedenen Partitionsmengen (warum?). Gibt es k kantendisjunkte Spannbäume in G, so hat G für jede Eckenpartition in r Teile mindestens $k(r - 1)$ Kanten zwischen verschiedenen Partitionsmengen. Solche Kanten nennen wir *Partitionskanten*.

Partitionskanten

Diese offensichtlich notwendige Bedingung ist wiederum auch hinreichend:

Satz 1.4.1. (Tutte 1961; Nash-Williams 1961)
Ein Multigraph enthält genau dann k kantendisjunkte Spannbäume, wenn er zu jeder Partition P seiner Eckenmenge mindestens $k\,(|P|-1)$ Partitionskanten enthält.

Bevor wir Satz 1.4.1 beweisen, wollen wir ihn kurz mit dem Satz von Menger vergleichen. Interessanterweise bedarf es nur einer Erhöhung des Kantenzusammenhangs von k auf $2k$, um statt irgendwelcher k kantendisjunkter Wege zwischen je zwei Ecken die Existenz k kantendisjunkter Spannbäume zu sichern:

[5.4.4] **Korollar 1.4.2.** *Jeder $2k$-kantenzusammenhängende Multigraph enthält k kantendisjunkte Spannbäume.*

Beweis. Ist G ein $2k$-kantenzusammenhängender Multigraph und ist $\{V_1,\dots,V_r\}$ eine Partition von $V(G)$, so führen von jeder Partitionsmenge V_i mindestens $2k$ Kanten zu anderen Partitionsmengen. Somit hat G mindestens $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r} 2k = kr$ Partitionskanten. Die Behauptung folgt mithin aus Satz 1.4.1. □

$G=(V,E)$, k, $\mathcal{F}$, $E[F]$, $\|F\|$

Zum Beweis von Satz 1.4.1 seien ein Multigraph $G=(V,E)$ und ein $k\in\mathbb{N}$ gegeben. Es sei $\mathcal{F}$ die Menge aller k-Tupel $F=(F_1,\dots,F_k)$ kantendisjunkter aufspannender Wälder in G mit der größtmöglichen Gesamtkantenzahl, also so, dass $\|F\| := |E[F]|$ mit $E[F] := E(F_1)\cup\dots\cup E(F_k)$ maximal ist.

Ist $F=(F_1,\dots,F_k)\in\mathcal{F}$ und $e\in E\setminus E[F]$, so enthält F_i+e für jedes $i=1,\dots,k$ einen Kreis: sonst könnten wir F_i in F durch F_i+e ersetzen und erhielten einen Widerspruch zur Maximalität von $\|F\|$. Ist $e'\neq e$ eine Kante dieses Kreises (für ein festes i), und setzen wir $F_i' := F_i+e-e'$ sowie $F_j' := F_j$ für alle $j\neq i$, so ist auch $F' := (F_1',\dots,F_k')\in\mathcal{F}$; wir sagen, F' sei aus F durch *Austausch* der Kante e' gegen die Kante e entstanden. Beachte, dass die e' enthaltende Komponente von F_i bei ihrer Wandlung zu einer Komponente von F_i' ihre Eckenmenge nicht ändert. Zu jedem Weg $x\dots y\subseteq F_i'$ ist also xF_iy ein wohldefinierter Weg in F_i; dies werden wir später verwenden.

Austausch, xF_iy

F^0, $\mathcal{F}^0$

Wir betrachten nun ein festes k-Tupel $F^0=(F_1^0,\dots,F_k^0)\in\mathcal{F}$. Die Menge aller k-Tupel aus $\mathcal{F}$, die wir durch sukzessiven Kantenaustausch aus F^0 herstellen können, sei mit $\mathcal{F}^0$ bezeichnet. Weiter sei

E^0, G^0

$$E^0 := \bigcup_{F\in\mathcal{F}^0} (E\setminus E[F])$$

und $G^0 := (V,E^0)$.

Lemma 1.4.3. *Zu jedem $e^0\in E\setminus E[F^0]$ gibt es eine Eckenmenge $U\subseteq V$, die in jedem F_i^0 zusammenhängend ist ($i=1,\dots,k$) und die Endecken von e^0 enthält.*

Beweis. Wegen $F^0 \in \mathcal{F}^0$ ist $e^0 \in E^0$; es sei C^0 die Komponente von G^0, die e^0 enthält. Wir zeigen die Behauptung für $U := V(C^0)$. C^0 U

Es sei $i \in \{1, \dots, k\}$ gegeben; wir müssen zeigen, dass U in F_i^0 zusammenhängend ist. Dazu beweisen wir zunächst folgendes: i

> *Es sei $F = (F_1, \dots, F_k) \in \mathcal{F}^0$, und $(F_1', \dots, F_k')$ sei aus F durch Austausch einer Kante von F_i entstanden. Sind x, y die Endecken eines Weges in $F_i' \cap C^0$, dann liegt auch xF_iy in C^0.* (1)

Es sei $e = vw$ die neue Kante aus $E(F_i') \setminus E[F]$; dies ist die einzige Kante von F_i', die nicht auch in F_i liegt. Wir nehmen $e \in xF_i'y$ an: sonst wäre $xF_iy = xF_i'y$ und nichts zu zeigen. Es reicht, $vF_iw \subseteq C^0$ zu zeigen: dann ist $(xF_i'y - e) \cup vF_iw$ ein zusammenhängender Teilmultigraph von $F_i \cap C^0$, der x, y und daher auch xF_iy enthält. Ist e' eine beliebige Kante von vF_iw, so könnten wir e' in $F \in \mathcal{F}^0$ gegen e austauschen und ein Element von $\mathcal{F}^0$ erhalten, in dem e' fehlt; es gilt somit $e' \in E^0$. Es folgt $vF_iw \subseteq G^0$, und somit $vF_iw \subseteq C^0$ wegen $v, w \in xF_i'y \subseteq C^0$. Damit ist (1) bewiesen.

Zum Beweis, dass $U = V(C^0)$ in F_i^0 zusammenhängend ist, zeigen wir zu jeder Kante $xy \in C^0$, dass der Weg xF_i^0y existiert und in C^0 liegt. Da C^0 zusammenhängend ist, ist die Vereinigung all dieser Wege dann ein zusammenhängender und aufspannender Teilgraph von $F_i^0[U]$.

Es sei also $e = xy \in C^0$ gegeben. Wegen $e \in E^0$ gibt es ein $s \in \mathbb{N}$ und k-Tupel $F^r = (F_1^r, \dots, F_k^r)$ für $r = 1, \dots, s$, so dass jedes F^r durch Kantenaustausch aus F^{r-1} entsteht, und $e \in E \setminus E[F^s]$ ist. Setzen wir $F := F^s$ in (1), so können wir e als Weg der Länge 1 in $F_i' \cap C^0$ auffassen. Sukzessive Anwendung von (1) auf $F = F^s, \dots, F^0$ ergibt $xF_i^0y \subseteq C^0$ wie gewünscht. □

Beweis von Satz 1.4.1. Nur die Rückrichtung ist zu zeigen. Wir verwenden Induktion nach $|G|$. Für $|G| = 2$ ist die Aussage wahr. Zum Induktionsschritt nehmen wir an, dass G zu jeder Partition P von V mindestens $k(|P| - 1)$ Partitionskanten enthält und konstruieren k kantendisjunkte Spannbäume in G. (0.5.3)

Betrachten wir ein beliebiges k-Tupel $F^0 = (F_1^0, \dots, F_k^0) \in \mathcal{F}$. Ist jedes F_i^0 ein Baum, so sind wir fertig. Anderenfalls gilt nach Korollar 0.5.3 F^0

$$\|F^0\| = \sum_{i=1}^{k} \|F_i^0\| < k(|G| - 1).$$

Nach Voraussetzung – betrachte die Partition von V in lauter einzelne Ecken – gilt andererseits $\|G\| \geqslant k(|G| - 1)$. Es gibt daher eine Kante $e^0 \in E \setminus E[F^0]$. Es sei U die nach Lemma 1.4.3 zu e^0 existierende Eckenmenge, die in jedem F_i^0 zusammenhängend ist und die Endecken e^0 U

von e^0 enthält. Insbesondere ist $|U| \geqslant 2$. Da jede Partition des kontrahierten Multigraphen G/U eine Partition von G mit den gleichen Partitionskanten induziert,[2] enthält auch G/U zu jeder Partition P mindestens $k\,(|P|-1)$ Partitionskanten. Nach Induktionsannahme gibt es in G/U daher k kantendisjunkte Spannbäume $T_1, \dots, T_k$. Ersetzen wir in jedem T_i die aus U kontrahierte Ecke v_U durch den Spannbaum $F_i^0 \cap G[U]$ von $G[U]$, so erhalten wir k kantendisjunkte Spannbäume von G. □

Graphenzerlegung

Bilden die Kantenmengen der Teilgraphen $G_1, \dots, G_k$ eines Graphen G eine Partition von $E(G)$, so sagen wir, dass die G_i den Graphen G *zerlegen*. Unser Spannbaumproblem können wir nun wie folgt umformulieren: in wie *viele zusammenhängende* aufspannende Teilgraphen lässt sich ein gegebener Graph zerlegen? In dieser Neufassung hat unser Problem jetzt ein offensichtliches Dualproblem (vgl. Satz 0.5.1): in wie *wenige kreislose* (aufspannende) Teilgraphen lässt sich ein gegebener Graph zerlegen? Oder zu gegebenem k: welche Graphen sind in höchstens k Wälder zerlegbar?

Auch hier gibt es eine natürliche notwendige Bedingung: für jede Eckenmenge $U \subseteq V(G)$ enthält jeder Wald in G höchstens $|U|-1$ Kanten auf diesen Ecken, d.h. G darf auf U insgesamt höchstens $k\,(|U|-1)$ Kanten haben. Wiederum ist diese offensichtlich notwendige Bedingung auch hinreichend, und interessanterweise lässt sich dies mit dem gleichen Lemma 1.4.3 beweisen wie unser Satz über kantendisjunkte Spannbäume:

Satz 1.4.4. (Nash-Williams 1964)
Ein Multigraph $G = (V, E)$ lässt sich genau dann in höchstens k Wälder zerlegen, wenn $\|G[U]\| \leqslant k\,(|U|-1)$ gilt für jede nicht leere Eckenmenge $U \subseteq V$.

(0.5.3) *Beweis.* Die Vorwärtsrichtung haben wir bereits gesehen. Zur Rückrichtung zeigen wir, dass jedes k-Tupel $F = (F_1, \dots, F_k) \in \mathcal{F}$ eine Zerlegung von G definiert, dass also stets $E[F] = E$ gilt. Anderenfalls sei $e \in E \setminus E[F]$. Nach Lemma 1.4.3 gibt es dazu ein $U \subseteq V$, das in jedem F_i zusammenhängend ist und die Endecken von e enthält. Für dieses U enthält $G[U]$ aus jedem F_i genau $|U|-1$ Kanten, und zusätzlich die Kante e. Es gilt also $\|G[U]\| > k\,(|U|-1)$, entgegen unserer Annahme. □

Arborizität

Die geringste Anzahl von Wäldern, in die sich ein Graph zerlegen lässt, nennt man seine *Arborizität*. Nach Satz 1.4.4 ist dies ein Maß für die größte lokale Dichte des Graphen: ein Graph hat genau dann niedrige Arborizität, wenn er „nirgends dicht“ ist, d.h. wenn er keinen Teilgraphen H mit großem $\varepsilon(H)$ hat.

[2] siehe Kapitel 0.10 zur Kontraktion in Multigraphen

1.5 Überdeckungen durch disjunkte Wege

Betrachten wir noch einmal den Überdeckungssatz 1.1.1 von König für bipartite Graphen G (mit Eckenpartition $\{A, B\}$). Richten wir in G jede Kante von A nach B, so gibt uns der Satz eine Antwort auf die Frage, wieviele disjunkte gerichtete Wege wir benötigen, um die ganze Eckenmenge von G zu überdecken: jeder gerichtete Weg hat die Länge 0 oder 1, und die Anzahl der Wege in einer solchen Überdeckung ist offenbar dann am geringsten, wenn sie möglichst viele Wege der Länge 1, also eine möglichst große Paarung enthält.

In diesem Abschnitt stellen wir diese Frage allgemeiner: wieviele Wege in einem gerichteten Graphen reichen aus, um seine gesamte Eckenmenge disjunkt zu überdecken? Dass wir hier ausnahmsweise gerichtete Graphen behandeln, hat außer der Analogie zum Satz von König noch einen weiteren Grund: der Satz, den wir beweisen werden, ist im ungerichteten Fall zwar auch wahr (Übung), aber wesentlich simpler und weniger folgenreich.

Ein *gerichteter Weg* ist ein gerichteter Graph $P \neq \emptyset$ mit Eckenmenge $\{x_0, \dots, x_k\}$ und Kantenmenge $\{e_0, \dots, e_{k-1}\}$, wobei die x_i alle verschieden sind und e_i jeweils von x_i nach x_{i+1} gerichtet ist. In diesem Abschnitt bedeutet „Weg“ stets „gerichteter Weg“. Die obige Ecke x_k ist die *letzte Ecke* von P, und ist $\mathcal{P}$ eine Menge von Wegen, so bezeichne $\mathrm{ter}(\mathcal{P})$ die Menge der letzten Ecken dieser Wege. Eine Menge disjunkter Wege in einem gerichteten Graphen G mit der Eigenschaft, dass jede Ecke von G auf einem dieser Wege liegt, nennen wir eine *Wegüberdeckung* (der Ecken) von G.

Weg

$\mathrm{ter}(\mathcal{P})$

Wegüberdeckung

Satz 1.5.1. (Gallai & Milgram 1960)
Jeder gerichtete Graph enthält eine Wegüberdeckung $\mathcal{P}$ seiner Ecken und eine unabhängige Eckenmenge $\{ v_P \mid P \in \mathcal{P} \}$ mit $v_P \in P$ für alle $P \in \mathcal{P}$.

Beweis. Offenbar hat jeder gerichtete Graph G eine Wegüberdeckung, etwa durch triviale Wege. Wir zeigen mit Induktion nach $|G|$, dass jede Wegüberdeckung $\mathcal{P} = \{P_1, \dots, P_m\}$, bei der $\mathrm{ter}(\mathcal{P})$ minimal ist, ein unabhängiges Repräsentantensystem $\{ v_P \mid P \in \mathcal{P} \}$ besitzt. Für jedes i bezeichne v_i die letzte Ecke von P_i.

$\mathcal{P}, P_i$

v_i

Ist $\mathrm{ter}(\mathcal{P}) = \{v_1, \dots, v_m\}$ unabhängig, so ist nichts weiter zu zeigen. Nehmen wir also an, dass G eine Kante von v_2 nach v_1 enthält. Dann ist auch $P_2 v_2 v_1$ ein Weg, und so folgt aus der Minimalität von $\mathrm{ter}(\mathcal{P})$, dass v_1 nicht die einzige Ecke von P_1 ist; es sei v die letzte Ecke von $P_1 \mathring{v}_1$. Damit ist $\mathcal{P}' := \{P_1 v, P_2, \dots, P_m\}$ eine Wegüberdeckung von $G' := G - v_1$ (Abb. 1.5.1). Da jedes unabhängige Repräsentantensystem von $\mathcal{P}'$ in G' auch eines von $\mathcal{P}$ in G ist, bleibt nur noch zu prüfen, dass wir auf $\mathcal{P}'$ die Induktionsannahme anwenden dürfen. Dazu müssen wir zeigen, dass $\mathrm{ter}(\mathcal{P}') = \{v, v_2, \dots, v_m\}$ minimal ist unter den Mengen letzter Ecken von Wegüberdeckungen von G'.

v

$\mathcal{P}', G'$

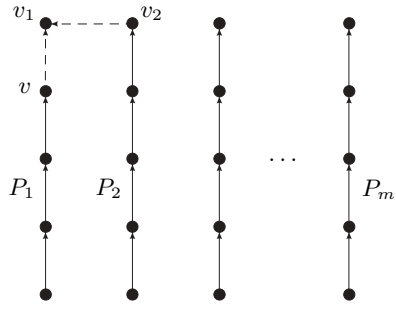


Abb. 1.5.1. Wegüberdeckungen von G und G'

Nehmen wir also an, G' habe eine Wegüberdeckung $\mathcal{P}''$ mit $\operatorname{ter}(\mathcal{P}'') \subsetneqq \operatorname{ter}(\mathcal{P}')$. Endet ein Weg $P \in \mathcal{P}''$ in v, so ersetzen wir P in $\mathcal{P}''$ durch Pvv_1 und erhalten so eine Wegüberdeckung von G, deren Menge letzter Ecken eine echte Teilmenge von $\operatorname{ter}(\mathcal{P})$ ist, im Widerspruch zur Wahl von $\mathcal{P}$. Endet ein Weg $P \in \mathcal{P}''$ in v_2 (aber keiner in v), so ersetzen wir P in $\mathcal{P}''$ durch Pv_2v_1 und erhalten erneut einen Widerspruch zur Minimalität von $\operatorname{ter}(\mathcal{P})$. Es gilt also $\operatorname{ter}(\mathcal{P}'') \subseteq \{v_3, \dots, v_m\}$. Damit bildet aber $\mathcal{P}''$ zusammen mit dem trivialen Weg $\{v_1\}$ eine Wegüberdeckung von G, die der Minimalität von $\operatorname{ter}(\mathcal{P})$ widerspricht. □

Als Korollar zu Satz 1.5.1 erhalten wir ein klassisches Resultat der Ordnungstheorie. Eine Teilmenge A einer Halbordnung $(P, \leqslant)$ ist eine *Kette* in P, wenn je zwei Elemente von A in P vergleichbar sind; A ist eine *Antikette*, wenn die Elemente von A paarweise unvergleichbar sind.

Kette
Antikette

Korollar 1.5.2. (Dilworth 1950)
In jeder endlichen Halbordnung $(P, \leqslant)$ ist die geringste Anzahl von Ketten, deren Vereinigung ganz P ist, gleich der größten Mächtigkeit einer Antikette in P.

Beweis. Ist A eine Antikette maximaler Mächtigkeit in P, so ist P offenbar keine Vereinigung von weniger als $|A|$ Ketten. Dass $|A|$ Ketten ausreichen, folgt aus Satz 1.5.1, angewendet auf den gerichteten Graphen mit Eckenmenge P und Kantenmenge $\{\,(x, y) \mid x < y\,\}$. □

Übungen

1. Zeige, dass ein bipartiter Graph zu jeder Paarung mit weniger als der größtmöglichen Anzahl von Kanten einen Verbesserungsweg enthält. Gilt die entsprechende Aussage auch in nicht bipartiten Graphen? (Ein *Verbesserungsweg* dort sei ein beliebiger Weg, der zwei nicht gepaarte Ecken verbindet und abwechselnd Kanten innerhalb und außerhalb der gegebenen Paarung enthält.)

2. Finde einen möglichst effizienten Algorithmus, der in bipartiten Graphen eine Paarung größter Mächtigkeit findet.

3. Zeige, dass es zwischen zwei unendlichen Mengen A und B eine Bijektion gibt, wenn injektive Abbildungen $A \to B$ und $B \to A$ existieren.

4. Beweise den Heiratssatz mit dem Satz von König.

5. Es seien G und H wie im dritten Beweis des Heiratssatzes definiert. Zeige, dass $d_H(b) \leqslant 1$ gilt für alle $b \in B$, und leite den Heiratssatz daraus her.

6.$^+$ Finde ein Gegenbeispiel zur Aussage des Heiratssatzes für unendliche Graphen.

7. Zeige, dass zwei Partitionen einer endlichen Menge in Teilmengen sämtlich gleicher Mächtigkeit stets ein gemeinsames Repräsentantensystem haben.

8. Es sei A eine endliche Menge mit Teilmengen $A_1, \dots, A_n$, und es seien $d_1, \dots, d_n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass genau dann disjunkte Teilmengen $D_k \subseteq A_k$ mit $|D_k| = d_k$ für alle $k \leqslant n$ existieren, wenn

$$\left| \bigcup_{i \in I} A_i \right| \geqslant \sum_{i \in I} d_i$$

gilt für jede Teilmenge $I \subseteq \{1, \dots, n\}$.

9.$^+$ Beweise das folgende *Lemma von Sperner*: in einer n-elementigen Menge X gibt es höchstens $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ einander paarweise nicht enthaltende Teilmengen.

(Tip: Offenbar reicht es, eine Überdeckung des Teilmengenverbandes von X durch $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ Ketten zu finden.)

10.$^+$ Es sei G ein bipartiter Graph mit Eckenpartition $\{A, B\}$. Es gelte $\delta(G) \geqslant 1$, sowie $d(a) \geqslant d(b)$ für jede Kante ab mit $a \in A$. Zeige, dass G eine Paarung von A enthält.

11.$^-$ Finde einen bipartiten Graphen mit Präferenzlisten, für den keine Paarung maximaler Größe stabil ist und keine stabile Paarung maximale Größe hat. Finde einen nicht-bipartiten Graphen mit Präferenzlisten, für den es keine stabile Paarung gibt.

12.$^-$ Betrachte den Algorithmus aus dem Beweis von Satz 1.1.4. Wie man leicht sieht, wird eine einmal gepaarte Ecke aus B bei künftigen Änderungen der Paarung immer glücklicher. Zeige, dass im Gegensatz dazu jede Ecke aus A immer unglücklicher wird (bei Nichtbeachtung ihrer ungepaarten Zwischenzeiten).

13. Zeige, dass alle stabilen Paarungen eines bipartiten Graphen dieselben Ecken überdecken. (Insbesondere haben sie alle dieselbe Mächtigkeit.)

14.$^+$ Zeige, dass der folgende naheliegende Algorithmus zur Herstellung einer stabilen Paarung in einem bipartiten Graphen nicht nach endlich vielen Schritten enden muss. Beginne mit einer beliebigen Paarung. Ist die aktuelle Paarung nicht maximal, so füge eine Kante hinzu. Ist die aktuelle Paarung maximal aber nicht stabil, so füge eine Kante hinzu, die die Instabilität verursacht (unter Löschung jeglicher alter Paarungskanten an ihren Endecken).

15. Finde eine Menge S für Satz 1.2.3, wenn G ein Wald ist.

16. Ein Graph G heißt (Ecken-) *transitiv*, wenn zu je zwei Ecken v, w ein Automorphismus von G existiert, der v auf w abbildet. Zeige mit Hilfe der Betrachtungen nach dem Beweis von Satz 1.2.3, dass jeder zusammenhängende transitive Graph gerader Ordnung einen 1-Faktor hat.

17. Zeige, dass ein Graph G genau dann k unabhängige Kanten enthält, wenn $q(G-S) \leqslant |S| + |G| - 2k$ gilt für alle Eckenmengen $S \subseteq V(G)$.

18.$^-$ Finde einen kubischen Graphen ohne 1-Faktor.

19. Leite den Heiratssatz aus dem Satz von Tutte her.

20.$^-$ Gilt der Satz von König (1.1.1) auch für nicht paare Graphen? Wenn nicht, hat dann zumindest $\mathcal{H} = \{K^2\}$ die Erdős-Pósa-Eigenschaft?

21. Für kubische Graphen stellt Lemma 1.3.1 eine erhebliche Verschärfung des Satzes von Erdős und Pósa dar. Existiert allgemeiner eine Funktion $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, so dass jeder Graph mit Minimalgrad $\geqslant 3$ und mindestens $g(k)$ Ecken k disjunkte Kreise enthält (für alle $k \in \mathbb{N}$)?

22. Für einen Graphen G bezeichne $\alpha(G)$ die größte Mächtigkeit einer unabhängigen Eckenmenge in G. Zeige, dass die Ecken von G durch höchstens $\alpha(G)$ disjunkte Teilgraphen überdeckbar sind, die jeweils isomorph sind zu einem Kreis, einem K^2, oder einem K^1.

23. Finde den Fehler in dem folgenden kurzen „Beweis“ von Satz 1.4.1. Eine Partition heiße *nicht-trivial*, wenn sie mindestens zwei Klassen hat und nicht jede Klasse nur ein Element enthält. Wir zeigen mit Induktion nach $|V| + |E|$, dass ein Graph $G = (V, E)$ stets k kantendisjunkte Spannbäume hat, wenn jede nicht-triviale Partition von V (in, sagen wir, r Klassen) mindestens $k(r-1)$ Partitionskanten hat. Der Induktionsanfang ist trivial mit $G = K^1$, wenn wir k Exemplare von K^1 als Familie kantendisjunkter Spannbäume von K^1 zulassen. Betrachten wir nun den Induktionsschritt. Hat jede nicht-triviale Partition von V in (sagen wir) r Klassen mehr als $k(r-1)$ Partitionskanten, so löschen wir irgendeine Kante von G und wenden die Induktionsannahme an. Anderenfalls hat V eine nicht-triviale Partition $\{V_1, \dots, V_r\}$ mit genau $k(r-1)$ Partitionskanten. Es sei etwa $|V_1| \geqslant 2$. Hat $G' := G[V_1]$ nun k disjunkte Spannbäume, so kombinieren wir diese mit den k disjunkten Spannbäumen, die G/V_1 nach Induktionsannahme hat. Nehmen wir daher an, G' habe keine k disjunkten Spannbäume. Nach Induktionsannahme hat $V(G')$ dann eine nicht-triviale Partition $\{V'_1, \dots, V'_s\}$ mit weniger als $k(s-1)$ Partitionskanten. Dann ist

aber $\{V_1', \dots, V_s', V_2, \dots, V_r\}$ eine nicht-triviale Eckenpartition von G in $r+s-1$ Klassen mit weniger als $k(r-1)+k(s-1) = k((r+s-1)-1)$ Paritätskanten, ein Widerspruch.

24. Ein Graph G heißt *ausgewogen*, falls $\varepsilon(H) \leqslant \varepsilon(G)$ gilt für jeden Teilgraphen $H \subseteq G$. Charakterisiere – mit Hilfe der ausgewogenen Graphen oder sonstwie – die Graphen G, für die $\varepsilon(H) \geqslant \varepsilon(G)$ gilt für jeden Untergraphen $H \subseteq G$.

25.$^-$ Beweise die ungerichtete Version des Satzes von Gallai und Milgram, ohne diesen zu benutzen.

26. Leite den Heiratssatz aus dem Satz von Gallai und Milgram ab.

27.$^-$ Zeige, dass jede Halbordnung mit mindestens $rs+1$ Elementen entweder eine Antikette der Mächtigkeit $s+1$ oder eine Kette der Mächtigkeit $r+1$ enthält.

28. Beweise die folgende zum Satz von Dilworth duale Aussage: in jeder endlichen Halbordnung $(P, \leqslant)$ ist die geringste Anzahl von Antiketten mit Vereinigung P gleich der größten Mächtigkeit einer Kette in P.

29. Leite den Satz von König aus dem Satz von Dilworth her.

30. Finde eine unendliche Halbordnung, in der jede Antikette endlich ist, die aber keine Vereinigung endlich vieler Ketten ist.

Notizen

Über Paarungen in endlichen Graphen gibt es eine gut lesbare und ausführliche Monographie: L. Lovász & M.D. Plummer, *Matching Theory*, Annals of Discrete Math. **29**, North Holland 1986. Eine weitere sehr umfassende Quelle ist A. Schrijver, *Combinatorial optimization*, Springer 2003. Alle Quellen der Sätze dieses Kapitels finden sich in diesen beiden Büchern.

Wie wir in Kapitel 2 sehen werden, ist der Satz 1.1.1 von König (1931) eigentlich nur die bipartite Version des allgemeineren Satzes von Menger (1927), einem der Grundpfeiler der Graphentheorie insgesamt. Schnell bekannt wurde seinerzeit weder der eine noch der andere dieser Sätze, sondern statt dessen der leicht aus dem Satz von König ableitbare Heiratssatz. Dieser zählt heute zu den am häufigsten angewandten Sätzen der Graphentheorie. Unsere ersten beiden Beweise des Satzes sind Folklore. Der Ansatz des dritten, einen kantenminimalen Teilgraphen zu betrachten, geht auf Rado (1967) zurück; unsere Fassung und ihr Dual, Übung 5, sind von Kriesell.

Zu Hintergrund und Anwendungen von Satz 1.1.4 siehe D. Gusfield & R.W. Irving, *The Stable Marriage Problem: Structure and Algorithms*, MIT Press 1989. Siehe auch A. Tamura, Transformation from arbitrary matchings to stable matchings, *J. Comb. Theory A* **62** (1993), 310–323.

Unser Beweis des Satzes von Tutte geht auf Lovász (1975) zurück. Unser Satz 1.2.3, einschließlich der darauf folgenden informellen Diskussion, ist eine schlanke Version des Struktursatzes von Gallai (1964) und Edmonds (1965)

über Paarungen – insbesondere Paarungen maximaler Mächtigkeit – in beliebigen Graphen. Der gesamte Satz ist ein wenig aufwendig zu formulieren, aber tiefgreifend und interessant; siehe Lovász & Plummer.

Satz 1.3.2 ist von P. Erdős & L Pósa, On independent circuits contained in a graph, *Canad. J. Math.* **17** (1965), 347–352. Unser Beweis stammt im Wesentlichen von M. Simonovits, A new proof and generalization of a theorem of Erdős and Pósa on graphs without $k+1$ independent circuits, *Acta Sci. Hungar* **18** (1967), 191–206. Berechnungen, wie sie in Lemma 1.3.1 vorkommen, sind nicht selten in Beweisen, bei denen man versucht, eine numerische Invariante mit Hilfe einer anderen zu beschränken. Dieses Buch betont diesen Aspekt der Graphentheorie nicht, aber er ist nicht untypisch.

Es gibt auch ein Analogon des Erdős-Pósa Satzes für gerichtete Graphen (mit gerichteten Kreisen), welches lange vermutet worden war aber erst kürzlich bewiesen wurde: von B. Reed, N. Robertson, P.D. Seymour und R. Thomas, Packing directed circuits, *Combinatorica* **16** (1996), 535–554. Sein Beweis ist weitaus schwieriger als der des ungerichteten Falls; Kapitel 10.4, und insbesondere Korollar 10.4.4, gibt einen Eindruck von den verwendeten Techniken.

Satz 1.4.1 wurde unabhängig von Nash-Williams und von Tutte bewiesen; beide Arbeiten finden sich im *J. Lond. Math. Soc.* **36** (1961). Satz 1.4.4 ist von C.St.J.A. Nash-Williams, Decompositions of finite graphs into forests, *J. Lond. Math. Soc.* **39** (1964), 12. Unsere Beweise folgen einer Ausarbeitung von Mader. Beide Sätze lassen sich elegant in der Sprache der Matroide ausdrücken und beweisen; siehe dazu § 18 in B. Bollobás, *Combinatorics*, Cambridge University Press 1986.

Ein interessantes Ecken-Analogon des Korollars 1.4.2 ist die Frage, welcher Zusammenhang die Existenz von k Spannbäumen $T_1, \dots, T_k$ erzwingt, die alle eine vorgegebene Ecke r zur Wurzel haben, so dass für jede Ecke v die k Wege vT_ir kreuzungsfrei sind. Zum Beispiel erhält man im Falle eines Kreises durch Löschen der Kante links bzw. rechts von r zwei solche Spannbäume. A. Itai und A. Zehavi, Three tree-paths, *J. Graph Theory* **13** (1989), 175–187, vermuteten, dass $\kappa \geqslant k$ genügen sollte. Diese Vermutung wurde für $k \leqslant 4$ bewiesen; siehe S. Curran, O. Lee & X. Yu, Chain decompositions and independent trees in 4-connected graphs, *Proc. 14th Ann. ACM SIAM symposium on Discrete algorithms* (Baltimore 2003), 186–191.

Satz 1.5.1 ist von T. Gallai & A.N. Milgram, Verallgemeinerung eines graphentheoretischen Satzes von Rédei, *Acta Sci. Math. (Szeged)* **21** (1960), 181–186.

2 Zusammenhang

Unserer in Kapitel 0.4 gegebenen Definition von k-Zusammenhang mangelt es ein wenig an intuitiver Ausstrahlung. Wir wissen danach nicht besonders genau, in welch vielfältiger Weise ein k-zusammenhängender Graph „zusammenhängt“, sondern lediglich, dass es irgendwie schwer ist, ihn zu trennen: man muss dazu mindestens k Ecken entfernen. Anschaulicher wäre die folgende Definition gewesen, die überdies die obige Trennungseigenschaft impliziert: „ein Graph ist k-zusammenhängend, wenn je zwei seiner Ecken durch mindestens k kreuzungsfreie Wege verbunden sind“.

Es ist eines der klassischen frühen Resultate der Graphentheorie, dass diese beiden Definitionen äquivalent sind, duale Aspekte also der gleichen Eigenschaft. Diesen Satz von Menger (1927) werden wir in Abschnitt 2.3 ausführlich studieren.

Zuvor, in den Abschnitten 2.1 und 2.2, untersuchen wir die Struktur 2-zusammenhängender und 3-zusammenhängender Graphen. Für diese niedrigen Werte von k ist es noch möglich, allgemein zu sagen, wie die k-zusammenhängenden Graphen konstruiert sind.

In den verbleibenden Abschnitten werden wir eine Reihe neuerer Zusammenhangsbegriffe kennenlernen, die sich als kaum weniger bedeutsam erwiesen haben als der klassische: die Anzahl der H-Wege in einem Graphen zu gegebenem Untergraphen H, und disjunkte Wegverbindungen zu gegebenen Eckenpaaren.

2.1 2-zusammenhängende Graphen und Untergraphen

Die einfachsten 2-zusammenhängenden Graphen sind die Kreise. Alle anderen können wir daraus durch Anfügen von Wegen induktiv konstruieren:

[3.2.6] **Proposition 2.1.1.** *Man erhält induktiv genau alle 2-zusammenhängenden Graphen, indem man von einem Kreis ausgehend jeweils zu einem bereits konstruierten Graphen H einen H-Weg hinzufügt (Abb. 2.1.1).*

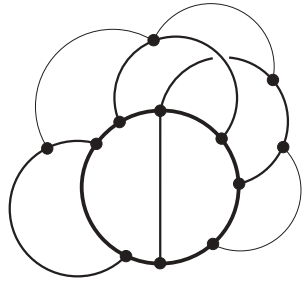


Abb. 2.1.1. Konstruktion 2-zusammenhängender Graphen

Beweis. Alle wie angegeben konstruierten Graphen sind offenbar 2-zusammenhängend. Umgekehrt sei G als 2-zusammenhängend gegeben. Dann enthält G einen Kreis, und somit auch einen maximalen
H Teilgraphen H, der wie angegeben konstruierbar ist. Da jede Kante $xy \in E(G) \setminus E(H)$ mit $x, y \in H$ einen H-Weg definierte, ist H ein Untergraph von G. Ist $H \neq G$, so hat G aufgrund seines Zusammenhangs eine Kante vw mit $v \in G - H$ und $w \in H$. Da G 2-zusammenhängend ist, enthält $G - w$ einen v–H-Weg P. Dann ist wvP ein H-Weg in G, und $H \cup wvP$ ist ein größerer konstruierbarer Teilgraph als H (Widerspruch). □

Wie wir einen beliebigen Graphen in seine maximalen zusammenhängenden Teilgraphen, seine *Komponenten*, zerlegen können, so können wir im nächsten Schritt versuchen, die Komponenten in ihre maximalen 2-zusammenhängenden Teilgraphen zu zerlegen. Diese sind dann natürlich nicht mehr ganz disjunkt, und sie überdecken die Komponente auch nicht immer ganz. Man kann aber den Begriff des „maximalen 2-zusammenhängenden Teilgraphen“ ein wenig abschwächen, so dass die Teilgraphen, die diesem schwächeren Begriff entsprechen, die Komponente ganz überdecken und immer noch beinahe disjunkt sind. Diese „Blöcke“ fügen sich schön in baumartiger Weise aneinander. Der Baum beschreibt dann die Grobstruktur der Komponente, die Blöcke ihre Feinstruktur.

Block Formal ist ein *Block* ein maximaler zusammenhängender Teilgraph, der keine Artikulation enthält.[1] Jeder Block eines Graphen G ist also entweder ein maximaler 2-zusammenhängender Teilgraph, oder eine Brücke, oder eine isolierte Ecke. Umgekehrt ist auch jeder solche Teilgraph ein Block von G. Wegen ihrer Maximalität schneiden sich verschiedene Blöcke von G in höchstens einer Ecke; diese ist dann notwendig eine

[1] ... des Teilgraphen; er kann Artikulationen von G enthalten.

Artikulation von G. Jede Kante von G liegt damit in genau einem Block, und G ist die Vereinigung seiner Blöcke.

Auch Kreise und Minimalschnitte von G (siehe Kapitel 0.9) liegen jeweils ganz in einem Block:

Lemma 2.1.2. *Es sei G ein beliebiger Graph.* [3.6]

(i) *Die Kreise von G sind genau die Kreise seiner Blöcke.*

(ii) *Die Minimalschnitte von G sind genau die minimalen Schnitte seiner Blöcke.*

Beweis. (i) Jeder Kreis in G ist ein zusammenhängender Teilgraph ohne Artikulation und liegt daher in einem maximalen solchen Teilgraphen. Dieser ist nach Definition ein Block von G.

(ii) Der Beweis ergibt sich leicht durch mehrfache Anwendung des folgenden Schlusses. Betrachten wir einen beliebigen Schnitt F in G, eine Kante $xy \in F$, und den xy enthaltenden Block B. Wegen der Maximalität von B aus der Definition eines Blocks enthält G keinen B-Weg. Jeder x–y-Weg in G liegt damit in B, d.h. die in B liegenden Kanten von F trennen x von y sogar in G. □

Da jede Kante in einem eindeutig bestimmten Block liegt, ist das Enthaltensein im gleichen Block eine Äquivalenzrelation auf der Kantenmenge eines Graphen. Diese Äquivalenz lässt sich auch noch auf zwei andere interessante Weisen ausdrücken:

Lemma 2.1.3. *Für unterschiedliche Kanten e, f eines Graphen G sind die folgenden Aussagen äquivalent:* [3.6]

(i) *Die Kanten e, f gehören zu einem gemeinsamen Block von G.*

(ii) *Die Kanten e, f gehören zu einem gemeinsamen Kreis von G.*

(iii) *Die Kanten e, f gehören zu einem gemeinsamen Minimalschnitt von G.*

Beweis. (i)→(ii) Offenbar genügt es zu zeigen, dass in einem 2-zusammenhängenden Graphen zwei Mengen von je zwei Ecken stets durch zwei disjunkte Wege verbunden werden können. Dies folgt leicht induktiv mit Proposition 2.1.1.[2]

(ii)→(iii) Löschen wir die Kanten $e, f \in C$ aus C, so erhalten wir eine Partition von $V(C)$ in zwei zusammenhängende Mengen. Wir erweitern diese zu einer Eckenpartition der C enthaltenden Komponente von G in zwei zusammenhängende Mengen. Die Kanten zwischen diesen Mengen bilden einen Minimalschnitt von G, der e und f enthält.

(iii)→(i) Nach Lemma 2.1.2 (ii) können zwei Kanten nur dann in einem gemeinsamen Minimalschnitt liegen, wenn sie zu demselben Block gehören. □

[2] Siehe Übung 5. Dies ist der Fall $k = 2$ des Satzes von Menger (2.3.1) ist.

In unserem letzten Lemma über Blöcke fomalisieren wir jetzt unser Bild der Baumstruktur, in der die Blöcke sich zusammenfügen. Es sei A die Menge der Artikulationen von G, und $\mathcal{B}$ die Menge seiner Blöcke. Die Enthaltenseinsrelation zwischen den Elementen von A und denen von $\mathcal{B}$ definiert einen bipartiten Graphen auf $A \cup \mathcal{B}$: zu $a \in A$ und $B \in \mathcal{B}$ sei aB genau dann eine Kante, wenn $a \in B$ ist. Diesen Graphen nennt man den *Block-Graphen* von G (Abb. 2.1.2).

Block-Graph

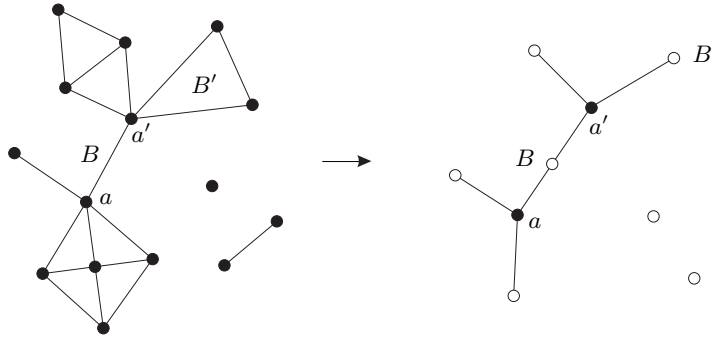


Abb. 2.1.2. Ein Graph und sein Block-Graph

Proposition 2.1.4. *Der Block-Graph eines zusammenhängenden Graphen ist ein Baum.* □

2.2 Die Struktur 3-zusammenhängender Graphen

Im letzten Abschnitt sahen wir, wie jeder zusammenhängende Graph kanonisch in 2-zusammenhängende Teilgraphen (und Brücken) zerfällt, und wie diese Teile baumartig zueinander angeordnet sind. Für 2-zusammenhängende Graphen gibt es eine analoge, wenn auch kompliziertere, kanonische Zerlegung in 3-zusammenhängende Teile (und Kreise), die sich wiederum in einer Art Baumstruktur zum Gesamtgraphen zusammenfügen. Dieser Zerlegungssatz von Tutte ist am einfachsten mit Hilfe sogenannter *Baumzerlegungen* auszudrücken, die wir in Kapitel 10 kennenlernen werden, und so verschieben wir ihn bis dorthin (siehe Übung 20, Kap. 10).

Stattdessen geben wir jetzt eine Methode an, nach der alle 3-zusammenhängenden Graphen schrittweise aus einem K^4 konstruierbar sind. Weiter werden wir einen Struktursatz über den Zyklenraum 3-zusammenhängender Graphen beweisen, der in Kapitel 3.5 noch einmal wichtig werden wird.

In Proposition 2.1.1 sahen wir, wie wir alle 2-zusammenhängenden Graphen schrittweise aus Kreisen konstruieren können. Da die in den Zwischenschritten konstruierten Graphen ebenfalls 2-zusammenhängend waren, gilt auch die Umkehrung: die geschilderte Konstruktionsmethode liefert genau alle 2-zusammenhängenden Graphen. Die Klasse der Kreise als Startgraphen kann dabei nicht verkleinert werden, da Kreise keine 2-zusammenhängenden echten Teilgraphen enthalten.

Wenn wir nun versuchen, auf ähnliche Weise alle 3-zusammenhängenden Graphen zu konstruieren, so werden wir bald merken, dass sowohl die erforderliche Startklasse als auch die erforderlichen Konstruktionsschritte zu kompliziert werden. Sobald wir allerdings für die Konstruktion nicht eine Folge von Teilgraphen suchen sondern von Minoren, so klappt alles wieder wie am Schnürchen:

Lemma 2.2.1. *Ist G 3-zusammenhängend und $|G| > 4$, so hat G eine Kante e mit der Eigenschaft, dass G/e wiederum 3-zusammenhängend ist.* [3.4.3]

Beweis. Angenommen, es gibt keine solche Kante e. Für jede Kante $xy \in G$ enthält dann G/xy eine trennende Menge S von höchstens 2 Ecken. Wegen $\kappa(G) \geqslant 3$ liegt die kontrahierte Ecke v_{xy} (siehe Kapitel 0.7) in S und es gilt $|S| = 2$, d.h. G hat eine Ecke $z \notin \{x, y\}$, so dass $\{v_{xy}, z\}$ den Graphen G/xy trennt. Je zwei durch $\{v_{xy}, z\}$ in G/xy getrennte Ecken sind dann in G durch $T := \{x, y, z\}$ getrennt. Da keine echte Teilmenge von T den Graphen G trennt, hat jede Ecke aus T in jeder Komponente C von $G - T$ einen Nachbarn. xy z C

Wir wählen nun die Kante xy, die Ecke z und die Komponente C so, dass $|C|$ minimal ist. Es sei v ein Nachbar von z in C (Abb. 2.2.1). v

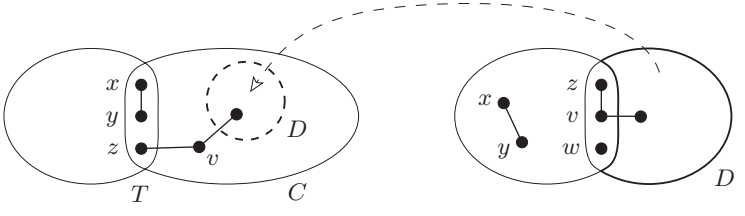


Abb. 2.2.1. Trennende Ecken im Beweis von Lemma 2.2.1

Da nach Annahme auch G/zv nicht 3-zusammenhängend ist, gibt es wiederum eine Ecke w mit der Eigenschaft, dass $\{z, v, w\}$ den Graphen G trennt, und wie oben hat jede Ecke in $\{z, v, w\}$ einen Nachbarn in jeder Komponente von $G - \{z, v, w\}$. w

Da x und y benachbart sind, hat $G - \{z, v, w\}$ eine Komponente D mit $D \cap \{x, y\} = \emptyset$. Jeder Nachbar von v in D ist dann in C (wegen $v \in C$), d.h. $D \cap C \neq \emptyset$ und somit $D \subsetneqq C$ nach Wahl von D. Dies widerspricht der Wahl von xy, z und C. □

Satz 2.2.2. (Tutte 1961)
Ein Graph G ist genau dann 3-zusammenhängend, wenn eine Folge $G_0, \dots, G_n$ von Graphen existiert mit den folgenden zwei Eigenschaften:

(i) *$G_0 = K^4$ und $G_n = G$;*

(ii) *Für jedes $i < n$ enthält G_{i+1} eine Kante xy mit $d(x), d(y) \geqslant 3$ und $G_i = G_{i+1}/xy$.*

Überdies sind solche Graphen $G_0, \dots, G_n$ stets alle 3-zusammenhängend.

Beweis. Dass eine Folge $G_0, \dots, G_n$ mit (i) und (ii) existiert, wenn G 3-zusammenhängend ist, folgt direkt aus Lemma 2.2.1.

xy Umgekehrt sei $G_i = G_{i+1}/xy$ wie in (ii); wir zeigen, dass mit G_i
S auch G_{i+1} 3-zusammenhängend ist. Angenommen nicht; es sei S eine
C_1, C_2 trennende Eckenmenge von G_{i+1} mit $|S| \leqslant 2$, und es seien C_1, C_2 zwei Komponenten von $G_{i+1} - S$. Da x und y benachbart sind, dürfen wir $\{x, y\} \cap V(C_1) = \emptyset$ annehmen (Abb. 2.2.2). Dann enthält C_2 weder beide Ecken x, y noch eine Ecke $v \notin \{x, y\}$: anderenfalls wäre v_{xy} bzw. v in G_i von C_1 durch höchstens 2 Ecken getrennt, mit Widerspruch. Damit enthält C_2 nur eine einzige Ecke: entweder x oder y. Dies widerspricht unserer Annahme von $d(x), d(y) \geqslant 3$. □

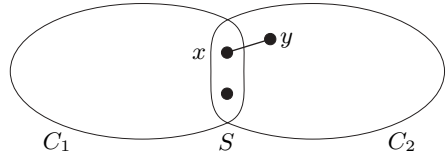


Abb. 2.2.2. Die Lage von xy im Beweis von Satz 2.2.2

Mit Satz 2.2.2 können wir schrittweise alle 3-zusammenhängenden Graphen konstruieren, ohne die Klasse der 3-zusammenhängenden Graphen zu verlassen. Mit K^4 beginnend spalten wir dazu in jedem Schritt eine Ecke v in zwei neue benachbarte Ecken v', v'' auf und verbinden diese beliebig so mit den ehemaligen Nachbarn von v, dass v' und v'' beide mindestens den Grad 3 haben und jeder Nachbar von v zu mindestens einer der beiden neuen Ecken benachbart ist. Dies ist die Kernaussage des sogenannten *Wheel Theorem*[3] von Tutte; mehr dazu in den Notizen.

[3.5.2] **Satz 2.2.3.** (Tutte 1963)
Der Zyklenraum eines 3-zusammenhängenden Graphen wird von seinen nicht trennenden induzierten Kreisen erzeugt.

Rad

[3] Die Graphen der Form $C^n * K^1$ nennt man *Räder*; ein K^4 ist also das kleinste Rad.

Beweis. Wir verwenden Induktion nach der Ordnung des betrachteten Graphen G. In K^4 ist jeder Kreis entweder selbst ein Dreieck oder (kantenmäßig) die symmetrische Differenz zweier Dreiecke. Diese sind sowohl induziert als auch nicht trennend, und somit gilt die Behauptung für $|G| = 4$. (0.9.1)

Zum Induktionsschritt sei $e = xy$ eine (nach Lemma 2.2.1 existierende) Kante von G, für die $G' := G/e$ 3-zusammenhängend ist. Jede Kante $e' \in E(G') \setminus E(G)$ hat dann die Form $e' = uv_e$, und mindestens eine der beiden Kanten ux, uy liegt in G. Wir wählen von diesen beiden Kanten eine, die in G liegt, und identifizieren sie (sprachlich) mit e'. (Wir bezeichnen also mit e' jetzt sowohl die Kante uv_e von G' als auch genau eine der beiden Kanten ux, uy.) Mit dieser Konvention können wir $E(G')$ als Teilmenge von $E(G)$ auffassen und $\mathcal{E}(G')$ als Teilraum von $\mathcal{E}(G)$; insbesondere finden alle Additionen von Kantenmengen im Folgenden in $\mathcal{E}(G)$ statt. $e = xy$, G'

Eine besondere Rolle spielen in diesem Beweis die die Kante e enthaltenden Dreiecke in G, die wir *Grunddreiecke* nennen wollen. Diese Dreiecke uxy sind offenbar (induziert und) nicht trennend, da sonst $\{u, v_e\}$ ein Trenner in G' wäre, im Widerspruch zu $\kappa(G') \geqslant 3$. *Grunddreiecke*

Betrachten wir nun einen induzierten (also sehnenlosen) Kreis C in G, der kein Grunddreieck ist. Gilt $e \in C$, so ist C/e ein Kreis in G'. Ist $e \notin C$, so liegen x und y nicht beide auf C, da e sonst eine Sehne wäre. Ersetzen wir gegebenenfalls x bzw. y durch v_e, so bilden die Ecken von C in ihrer natürlichen Reihenfolge auch in G' einen Kreis, den wir wiederum mit C/e bezeichnen. Für jeden induzierten Kreis C, der kein Grunddreieck ist, bezeichnet C/e damit einen Kreis in G'. Auch im Falle $e \notin C$ ist jedoch die Kantenmenge von C/e, als Teilmenge von $E(G)$ aufgefasst, nicht notwendig gleich $E(C)$. Sie braucht in G sogar noch nicht einmal einen Kreis zu bilden; siehe Abbildung 2.2.3. C/e

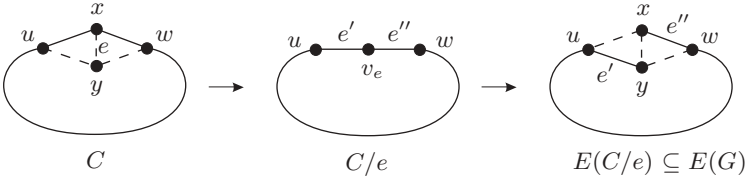


Abb. 2.2.3. Eine der vier Möglichkeiten für $E(C/e)$ im Falle $e \notin C$

Die induzierten und nicht trennenden Kreise in G oder G' nennen wir im Folgenden kurz *gut*. Wir wollen also zeigen, dass jeder Zyklus in G eine Summe guter Kreise ist. Dazu sei $C \in \mathcal{C}(G)$ gegeben; nach Proposition 0.9.1 dürfen wir annehmen, dass C ein induzierter Kreis ist. Weiter dürfen wir annehmen, dass C kein Grunddreieck ist, denn diese *guter Kreis*, C

C' sind ja selbst gut. Nach unserer Vorbetrachtung ist $C' := C/e$ ein Kreis in G'.

Unser Plan ist es, C' nach Induktionsannahme durch gute Kreise in G' zu erzeugen und diese in gute Kreise von G zu verwandeln, die dort dann mit etwas Glück C erzeugen. Ganz so glatt wird es nicht gehen: wie wir bereits sahen, können sich die Kantenmengen von C' und von C ein wenig unterscheiden, und genauso werden die C' erzeugenden guten Kreise aus G' nicht selbst gute Kreise in G sein. Sie werden jedoch guten Kreisen von G ähnlich sein. Diese Ähnlichkeit wollen wir jetzt genauer beschreiben und dann zeigen, dass wir die verbleibenden Unterschiede ignorieren können.

ähnlich Dazu nennen wir zwei Kantenmengen $F, \tilde{F} \in \mathcal{E}(G)$ *ähnlich*, wenn sie sich nur durch Grunddreiecke und möglicherweise in e unterscheiden, d.h. wenn es eine Summe D von Grunddreiecken gibt mit

$$F + \tilde{F} + D \in \{\emptyset, \{e\}\}\,.$$

Offenbar ist Ähnlichkeit eine Äquivalenzrelation.

Anstatt C selbst durch gute Kreise zu erzeugen wird es ausreichen, eine zu C ähnliche Kantenmenge $\tilde{C} \in \mathcal{C}(G)$ zu erzeugen:

Ist C ähnlich zu $\tilde{C} \in \mathcal{C}(G)$ und $\tilde{C}$ eine Summe guter Kreise in G, dann ist auch C eine Summe guter Kreise in G. (1)

Denn ist D eine Summe von Grunddreiecken mit $C + \tilde{C} + D \in \{\emptyset, \{e\}\}$, dann gilt sogar $C + \tilde{C} + D = \emptyset$, da ja $C + \tilde{C} + D$ in $\mathcal{C}(G)$ liegt aber $\{e\}$ nicht. Da D eine Summe guter Kreise ist, gilt dies somit auch für $C = \tilde{C} + D$.

Entsprechend unserem Plan zeigen wir zunächst:

C' ist ähnlich zu C. (2)

Ist $e \in C$, oder liegt weder x noch y auf C, so unterscheiden sich C' und C als Kantenmengen genau in e bzw. gar nicht. Anderenfalls enthält C genau eine der Ecken x, y. Dann ist $v_e \in C'$; es seien u, w die beiden Nachbarn von v_e auf C', sowie $e' = uv_e$ und $e'' = v_e w$ die mit v_e in C' inzidenten Kanten (siehe Abb. 2.2.3). Ist $e' \notin C$, so bezeichne D_u das Grunddreieck uxy; anderenfalls sei $D_u := \emptyset$. Ist $e'' \notin C$, so bezeichne D_w das Grunddreieck wxy; anderenfalls sei $D_w := \emptyset$. Damit gilt $C + C' + D_u + D_w \in \{\emptyset, \{e\}\}$, und (2) ist bewiesen.

Nach Induktionsannahme ist C' eine Summe guter Kreise $C'_1, \ldots, C'_k$ in G'. Aus diesen können wir ähnliche gute Kreise in G gewinnen:

Für jedes $i = 1, \ldots, k$ gibt es in G einen zu C'_i ähnlichen guten Kreis C_i. (3)

Zum Beweis von (3) werden wir gute Kreise C_i in G mit $C_i/e = C'_i$ finden; diese sind dann, wie in (2), jeweils ähnlich zu C'_i. Ist $v_e \notin C'_i$, so gilt dies mit $C_i := C'_i$; es sei daher $v_e \in C'_i$. Es seien u und w die beiden Nachbarn von v_e in C'_i, und P der u–w-Weg in C'_i, der v_e vermeidet (Abb. 2.2.4). Dann gilt $P \subseteq G$. u, w P

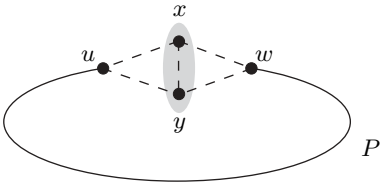


Abb. 2.2.4. Die Suche nach einem guten Kreis C_i mit $C_i/e = C'_i$

Wir nehmen zuerst $\{ux, uy, wx, wy\} \subseteq E(G)$ an und betrachten die Kreise $C_x := uPwxu$ und $C_y := uPwyu$ in G. Beide Kreise sind induziert in G, da C'_i induziert in G' ist, und offenbar gilt $C_x/e = C'_i = C_y/e$. Weiter trennt keiner der beiden Kreise zwei Ecken von $G - (V(P) \cup \{x, y\})$ in G, da C'_i nach Annahme diese Ecken in G' nicht trennt. Ist nun etwa C_x dennoch ein trennender Kreis in G, so besteht eine der Komponenten von $G - C_x$ nur aus der Ecke y; Analoges gilt für C_y mit x. Dies kann jedoch nicht für C_x und C_y gleichzeitig eintreten: dann hätten x und y all ihre Nachbarn in $G - \{x, y\}$ auf P, und da C'_i keine Sehne hat, wären u und w die einzigen solchen Nachbarn. Doch dann trennte $\{u, w\}$ die Menge $\{x, y\}$ vom Rest von G, im Widerspruch zu $\kappa(G) \geqslant 3$. Damit ist mindestens einer der beiden Kreise C_x, C_y gut in G, und diesen wählen wir als C_i. C_x, C_y

Es bleibt oBdA der Fall zu betrachten, dass $ux \notin E(G)$ ist. Wie oben folgt dann aus $\kappa(G) \geqslant 3$, dass entweder $uPwyu$ oder $uPwxyu$ ein guter Kreis in G ist – je nachdem, ob $wy \in E(G)$ ist oder nicht. Damit ist (3) bewiesen.

Wegen (3) ist $\tilde{C} := C_1 + \ldots + C_k$ ähnlich zu $C' = C'_1 + \ldots + C'_k$, und nach (2) ist C' ähnlich zu C. Die Behauptung folgt damit aus (1). □

2.3 Der Satz von Menger

Der folgende Satz von Menger aus dem Jahre 1927 ist einer der klassischen Sätze der Graphentheorie.

Satz 2.3.1. (Menger 1927) [2.5.2] [10.3.8]
Es sei $G = (V, E)$ ein Graph und $A, B \subseteq V$. Die kleinste Mächtigkeit einer A von B in G trennenden Eckenmenge ist gleich der größten Mächtigkeit einer Menge disjunkter A–B-Wege in G.

k

Wir geben drei Beweise. Darin seien jeweils G, A, B wie im Satz gegeben, und $k = k(G, A, B)$ bezeichne die kleinste Mächtigkeit eines A–B-Trenners in G. Offenbar kann G nicht mehr als k disjunkte A–B-Wege enthalten; zu zeigen ist, dass k solche Wege existieren.

Erster Beweis. Wir verwenden Induktion nach $\|G\|$. Hat G keine Kante, so ist $|A \cap B| = k$ und wir haben k triviale A–B-Wege. Hat G eine Kante $e = xy$ aber keine k disjunkten A–B-Wege, so enthält auch G/e keine solchen Wege (wobei wir v_e als Ecke in A bzw. B auffassen, wenn x oder y in A bzw. B liegt). Nach Induktionsannahme enthält G/e dann einen A–B-Trenner Y von weniger als k Ecken; unter diesen ist v_e, da sonst $Y \subseteq V$ ein A–B-Trenner in G wäre. Dann ist $X := (Y \setminus \{v_e\}) \cup \{x, y\}$ ein A–B-Trenner in G aus genau k Ecken.

Wir betrachten nun den Graphen $G - e$. Wegen $x, y \in X$ trennt jeder A–X-Trenner in $G - e$ auch A von B in G und enthält somit mindestens k Ecken. Nach Induktionsannahme enthält $G - e$ daher k disjunkte A–X-Wege. Analog enthält $G - e$ auch k disjunkte X–B-Wege, und da X ein A–B-Trenner ist, treffen diese die A–X-Wege nur in X. Zusammen bilden die beiden Wegesysteme die gesuchten A–B-Wege in G. □

Erweiterung

Es sei $\mathcal{P}$ eine Menge disjunkter A–B-Wege, und $\mathcal{Q}$ eine weitere solche Menge. Wir nennen $\mathcal{Q}$ eine *Erweiterung* von $\mathcal{P}$, wenn die in Wegen von $\mathcal{P}$ enthaltenen Ecken aus A eine echte Teilmenge bilden von der Menge der in Wegen aus $\mathcal{Q}$ enthaltenen Ecken aus A und Entsprechendes für B gilt. Natürlich gilt dann auch $|\mathcal{Q}| \geqslant |\mathcal{P}| + 1$.

Zweiter Beweis. Wir zeigen die folgende stärkere Aussage:

> *Zu jeder Menge $\mathcal{P}$ von weniger als k disjunkten A–B-Wegen gibt es in G eine Erweiterung aus $|\mathcal{P}| + 1$ Wegen.*

Wir beweisen dies für feste G und A mit Induktion nach $|\bigcup \mathcal{P}|$. Dazu betrachten wir einen A–B-Weg R, der die (weniger als k) Ecken aus B vermeidet, die auf einem Weg aus $\mathcal{P}$ liegen. Vermeidet R alle Wege aus $\mathcal{P}$, so ist $\mathcal{P} \cup \{R\}$ eine Erweiterung von $\mathcal{P}$. (Dieser Fall tritt für $\mathcal{P} = \emptyset$ ein, d.h. der Induktionsanfang steht.) Anderenfalls sei x die letzte Ecke von R, die auf irgendeinem Weg $P \in \mathcal{P}$ liegt (Abb. 2.3.1). Es sei

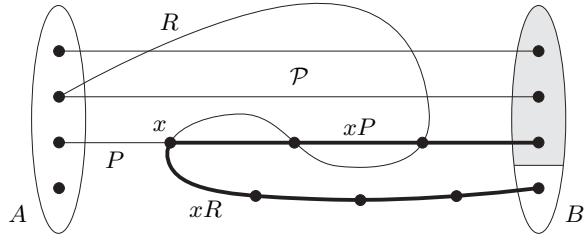


Abb. 2.3.1. Wege im zweiten Beweis des Satzes von Menger

$B' := B \cup V(xP \cup xR)$ und $\mathcal{P}' := \big(\mathcal{P} \setminus \{P\}\big) \cup \{Px\}$. Dann ist $|\mathcal{P}'| = |\mathcal{P}|$ (aber $|\bigcup \mathcal{P}'| < |\bigcup \mathcal{P}|$) und $k(G, A, B') \geqslant k(G, A, B)$, und so gibt es nach Induktionsannahme eine Erweiterung $\mathcal{Q}'$ von $\mathcal{P}'$ aus $|\mathcal{P}'| + 1$ Wegen von A nach B'. In $\mathcal{Q}'$ existiert dann ein Weg Q, der in x endet, und genau ein Weg Q', dessen letzte Ecke y nicht unter den Endecken der Wege aus $\mathcal{P}'$ ist. Gilt $y \notin xP$, so erhalten wir die gewünschte Erweiterung $\mathcal{Q}$ von $\mathcal{P}$ aus $\mathcal{Q}'$, indem wir Q durch xP verlängern und gegebenenfalls (wenn y nicht bereits in B liegt) Q' durch yR verlängern. Anderenfalls ist $y \in \mathring{x}P$, und wir erhalten $\mathcal{Q}$ aus $\mathcal{Q}'$, indem wir Q um xR und Q' um yP verlängern. □

Für den Spezialfall bipartiter Graphen ergibt der Satz von Menger genau den Satz 1.1.1 von König. Unseren Beweis jenes Satzes durch alternierende Wege verallgemeinern wir jetzt zu unserem dritten Beweis des Mengerschen Satzes. Es seien G, A, B wie im Satz 2.3.1, und es sei $\mathcal{P}$ eine Menge disjunkter A–B-Wege in G. Ein A–B-Trenner $X \subseteq V$ heiße *auf* $\mathcal{P}$ gelegen, wenn X aus jedem Weg in $\mathcal{P}$ genau eine Ecke enthält und sonst keine Ecken. Existiert ein solcher Trenner, dann gilt offenbar $k \leqslant |X| = |\mathcal{P}|$, und der Satz von Menger ist bewiesen.

$\mathcal{P}$

auf

Es sei

$$V[\mathcal{P}] := \bigcup \{\, V(P) \mid P \in \mathcal{P} \,\}$$

$$E[\mathcal{P}] := \bigcup \{\, E(P) \mid P \in \mathcal{P} \,\}.$$

Ein Kantenzug $W = x_0 e_0 x_1 e_1 \dots e_{n-1} x_n$ in G mit $e_i \neq e_j$ für $i \neq j$ heißt *alternierend* bezüglich $\mathcal{P}$ (Abb. 2.3.2), wenn x_0 in $A \setminus V[\mathcal{P}]$ liegt und für alle $i < n$ gilt (mit $e_{-1} := e_0$ in (iii)):

W, x_i, e_i

(i) ist $e_i = e \in E[\mathcal{P}]$, so wird e von W rückwärts durchlaufen, d.h. es ist $x_{i+1} \in P\mathring{x}_i$ für ein $P \in \mathcal{P}$;

(ii) ist $x_i = x_j$ mit $i \neq j$, so gilt $x_i \in V[\mathcal{P}]$;

(iii) ist $x_i \in V[\mathcal{P}]$, so gilt $\{e_{i-1}, e_i\} \cap E[\mathcal{P}] \neq \emptyset$.

alternierender Kantenzug

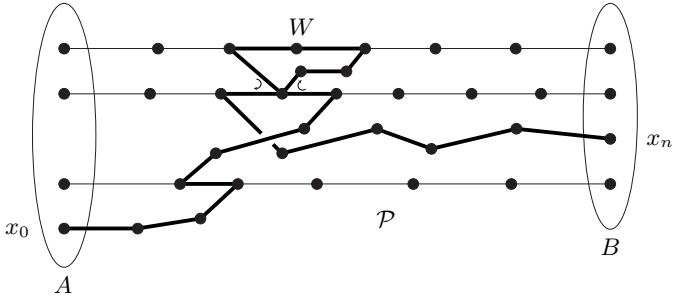


Abb. 2.3.2. Ein alternierender Kantenzug von A nach B

Nach (ii) kommt dann jede Ecke außerhalb von $V[\mathcal{P}]$ höchstens einmal auf W vor. Und da die Kanten von W paarweise verschieden sind, kommt nach (iii) jede Ecke $v \in V[\mathcal{P}]$ höchstens zweimal auf W vor. Ist $v \neq x_n$, so kann dies auf genau zwei Weisen geschehen. Ist etwa $x_i = x_j$ mit $0 < i < j < n$, so gilt

$$\begin{aligned} &\textit{entweder } e_{i-1}, e_j \in E[\mathcal{P}] \text{ und } e_i, e_{j-1} \notin E[\mathcal{P}] \\ &\quad \textit{oder } e_i, e_{j-1} \in E[\mathcal{P}] \text{ und } e_{i-1}, e_j \notin E[\mathcal{P}]\,. \end{aligned}$$

Sofern nicht anders angegeben, bezieht sich „alternierend“ im Folgenden stets auf unser festes Wegesystem $\mathcal{P}$.

Lemma 2.3.2. *Endet ein solcher Kantenzug W in $B \setminus V[\mathcal{P}]$, so gibt es in G eine Erweiterung von $\mathcal{P}$.*

Beweis. Wir dürfen annehmen, dass W nur seine erste Ecke in $A \setminus V[\mathcal{P}]$ hat und nur seine letzte Ecke in $B \setminus V[\mathcal{P}]$. Es sei H der Graph auf $V(G)$, dessen Kantenmenge die symmetrische Differenz von $E[\mathcal{P}]$ mit $\{e_0, \dots, e_{n-1}\}$ ist. In H haben die Endecken der Wege aus $\mathcal{P}$ und von W den Grad 1 (bzw. 0, wenn der Weg trivial ist), und alle anderen Ecken haben den Grad 0 oder 2.

Für jede Ecke $a \in (A \cap V[\mathcal{P}]) \cup \{x_0\}$ ist daher die a enthaltende Komponente von H ein Weg, etwa $P = v_0 \dots v_k$, der in a beginnt und in A oder in B endet. Unter Benutzung der Bedingungen (i) und (iii) oben zeigt man leicht mit Induktion nach $i = 0, \dots, k-1$, dass P jede seiner Kanten $e = v_i v_{i+1}$ auch im Sinne von $\mathcal{P}$ bzw. von W vorwärts durchläuft. (Formal: ist $e \in P'$ mit $P' \in \mathcal{P}$, so gilt $v_i \in P' \mathring{v}_{i+1}$; ist $e = e_j \in W$, so ist $v_i = x_j$ und $v_{i+1} = x_{j+1}$.) Somit ist P ein A–B-Weg.

Analog gibt es zu jedem $b \in (B \cap V[\mathcal{P}]) \cup \{x_n\}$ einen A–B-Weg in H, der in b endet. Die Menge der A–B-Wege in H bilden somit eine Erweiterung von $\mathcal{P}$. □

Lemma 2.3.3. *Endet kein solcher Kantenzug W in $B \setminus V[\mathcal{P}]$, so enthält G einen A–B-Trenner auf $\mathcal{P}$.*

Beweis. Sei

A_1, A_2 $$A_1 := V[\mathcal{P}] \cap A \quad \text{und} \quad A_2 := A \setminus A_1\,,$$

sowie

B_1, B_2 $$B_1 := V[\mathcal{P}] \cap B \quad \text{und} \quad B_2 := B \setminus B_1\,.$$

x_P Für jeden Weg $P \in \mathcal{P}$ sei x_P die letzte Ecke von P, die auf einem alternierenden Kantenzug liegt; existiert keine solche Ecke, so sei x_P die erste Ecke von P. Wir werden zeigen, dass

X $$X := \{\, x_P \mid P \in \mathcal{P} \,\}$$

jeden A–B-Weg in G trifft; dann ist X ein A–B-Trenner auf $\mathcal{P}$.

Angenommen, es gibt einen A–B-Weg Q in $G - X$. Offenbar trifft Q Q
Q das Wegesystem $\mathcal{P}$, da Q sonst ein alternierender Kantenzug ist, der in B_2 endet. Der in Q enthaltene A–$V[\mathcal{P}]$-Weg ist nun entweder ein alternierender Kantenzug, oder er besteht aus der ersten Ecke eines Weges aus $\mathcal{P}$. Damit trifft Q auch die Eckenmenge $V[\mathcal{P}']$ von

$$\mathcal{P}' := \{\, Px_P \mid P \in \mathcal{P} \,\}. \qquad \mathcal{P}'$$

Es sei y die letzte Ecke von Q in $V[\mathcal{P}']$, sagen wir $y \in P \in \mathcal{P}$, und $x := x_P$. y, P, x
Da Q nach Annahme X und damit x vermeidet, ist $y \in P\mathring{x}$. Insbesondere ist $x = x_P$ nicht die erste Ecke von P, d.h. es existiert ein alternierender Kantenzug W von A_2 nach x. Dann ist $W \cup xPyQ$ ist ein Kantenzug von W
A_2 nach B (Abb. 2.3.3). Ist dieser Kantenzug alternierend und endet er in B_2, so haben wir unseren erwünschten Widerspruch.

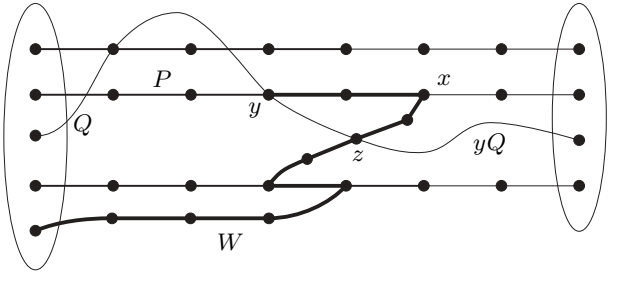


Abb. 2.3.3. Alternierende Kantenzüge im Beweis von Lemma 2.3.3.

Woran könnte es scheitern, dass $W \cup xPyQ$ ein alternierender Kantenzug ist? Zunächst könnte W bereits Kanten des Weges xPy enthalten. Ist etwa x' die erste Ecke von W auf $xP\mathring{y}$, so ist aber $W' := Wx'Py$ x', W'
ein alternierender Kantenzug von A_2 nach y. (Mit Wx' meinen wir das Anfangsstück von W bis zum ersten Auftreten von x'; ab da folgt W' dann P rückwärts bis y.) Auch $W'yQ$ braucht noch nicht alternierend zu sein: es könnte ja $W' \cap \mathring{y}Q \neq \emptyset$ gelten. Nach Definition von $\mathcal{P}'$ und W sowie der Wahl von y auf Q gilt jedoch

$$V(W') \cap V[\mathcal{P}] \subseteq V[\mathcal{P}'] \quad \text{und} \quad V(\mathring{y}Q) \cap V[\mathcal{P}'] = \emptyset.$$

Somit können sich W' und $\mathring{y}Q$ höchstens außerhalb von $\mathcal{P}$ treffen.

Ist in der Tat $W' \cap \mathring{y}Q \neq \emptyset$, so sei z die erste Ecke von W' auf $\mathring{y}Q$ z
und $W'' := W'zQ$. Anderenfalls sei $W'' := W' \cup yQ$. Da $\mathring{y}Q$ die Ecken W''
aus $V[\mathcal{P}']$ vermeidet, ist W'' in beiden Fällen wie W' ein alternierender Kantenzug bezüglich $\mathcal{P}'$. (Im zweiten Fall genügt W'' der Bedingung (iii) in y auch dann, wenn y zweimal auf W' vorkommt: $W'' = W' \cup yQ$ enthält ja ganz W', nicht nur sein Anfangsstück bis zum ersten Auftreten

von y.) Nach Definition von $\mathcal{P}'$ vermeidet W'' daher die Ecken aus $V[\mathcal{P}] \setminus V[\mathcal{P}']$, d.h. W'' ist auch ein alternierender Kantenzug bezüglich $\mathcal{P}$ und endet in B_2. Dies jedoch widerspricht unseren Annahmen. □

Dritter Beweis von Satz 2.3.1. Es sei $\mathcal{P}$ eine Menge möglichst vieler disjunkter A–B-Wege in G. Nach Lemma 2.3.2 endet kein alternierender Kantenzug in $B \setminus V[\mathcal{P}]$. Nach Lemma 2.3.3 enthält G daher einen A–B-Trenner X auf $\mathcal{P}$, und es folgt $k \leqslant |X| = |\mathcal{P}|$ wie gewünscht. □

Fächer Eine Menge von a–B-Wegen ist ein a–B-*Fächer*, wenn die Wege paarweise nur die Ecke a gemeinsam haben.

[8.1.2] **Korollar 2.3.4.** *Ist $B \subseteq V$ und $a \in V \setminus B$, so ist die kleinste Mächtigkeit einer a von B in G trennenden Eckenmenge $X \subseteq V \setminus \{a\}$ gleich der größten Mächtigkeit eines a–B-Fächers in G.*

Beweis. Wende Satz 2.3.1 auf $G - a$ an mit $A := N_G(a)$. □

Korollar 2.3.5. *Es seien a, b zwei verschiedene Ecken von G.*

(i) *Sind a und b nicht benachbart, so ist die kleinste Mächtigkeit einer a von b in G trennenden Eckenmenge $X \subseteq V \setminus \{a, b\}$ gleich der größten Mächtigkeit einer Menge kreuzungsfreier a–b-Wege in G.*

(ii) *Die kleinste Mächtigkeit einer a von b in G trennenden Kantenmenge $X \subseteq E$ ist gleich der größten Mächtigkeit einer Menge kantendisjunkter a–b-Wege in G.*

Beweis. (i) Wende Satz 2.3.1 auf $G - \{a, b\}$ an mit $A := N_G(a)$ und $B := N_G(b)$.

(ii) Wende Satz 2.3.1 auf den Kantengraphen von G an, mit $A := E(a)$ und $B := E(b)$. □

[3.2.7] [5.6.1] [7.4.2] **Satz 2.3.6.** (Globale Version des Satzes von Menger)

(i) *G ist genau dann k-zusammenhängend, wenn G zwischen je zwei Ecken k kreuzungsfreie Wege enthält.*

(ii) *G ist genau dann k-kantenzusammenhängend, wenn G zwischen je zwei Ecken k kantendisjunkte Wege enthält.*

Beweis. (i) Enthält G zwischen je zwei Ecken k kreuzungsfreie Wege, so gilt $|G| > k$, und G ist nicht durch weniger als k Ecken trennbar; G ist also k-zusammenhängend.

Nehmen wir nun umgekehrt an, dass G k-zusammenhängend ist
a, b (und insbesondere mehr als k Ecken hat) aber zwei Ecken a, b enthält, die nicht durch k kreuzungsfreie Wege verbunden sind. Nach Korollar
G' 2.3.5 (i) sind a und b benachbart; es sei $G' := G - ab$. In G' gibt es dann höchstens $k - 2$ kreuzungsfreie a–b-Wege. Nach Korollar 2.3.5 (i)

sind a und b daher in G' durch eine Menge X von höchstens $k-2$ Ecken getrennt. Wegen $|G| > k$ hat G noch eine Ecke $v \notin X \cup \{a, b\}$. Nun trennt X die Ecke v in G' auch von a oder von b – sagen wir, von a. Dann trennt aber $X \cup \{b\}$ die Ecken v und a in G, was wegen $|X \cup \{b\}| \leqslant k-1$ dem k-Zusammenhang von G widerspricht. X v

(ii) folgt direkt aus Korollar 2.3.5 (ii). □

2.4 Der Satz von Mader

Analog zur Fragestellung, die dem Satz von Menger zugrundeliegt, können wir das folgende Problem betrachten: gegeben einen Untergraphen H eines Graphen G, wie viele kreuzungsfreie H-Wege kann G höchstens enthalten?

Dieser kurze Abschnitt soll ohne Beweis einen tiefliegenden Satz von Mader vorstellen, der dieses Problem ganz analog zum Satz von Menger löst. Der Satz besagt, dass eine einfache obere Schranke für die Anzahl solcher Wege, die sich ähnlich ergibt wie die durch trennende Eckenmengen gegebene Schranke beim Satz von Menger, auch stets durch ein geeignetes Wegesystem angenommen wird.

Wie könnte eine solche obere Schranke aussehen? Sind $X \subseteq V(G-H)$ und $F \subseteq E(G-H)$ so, dass jeder H-Weg in G eine Ecke oder Kante aus $X \cup F$ enthält, dann kann G natürlich nicht mehr als $|X \cup F|$ kreuzungsfreie H-Wege enthalten; die kleinste Mächtigkeit einer solchen Menge $X \cup F$ ist also eine obere Schranke für die Anzahl kreuzungsfreier H-Wege in G. (Beachte, dass jeder H-Weg $G-H$ trifft, da H in G induziert ist und die Kanten von H selbst nicht als H-Wege zählen.) X F

Diese triviale obere Schranke für die Anzahl kreuzungsfreier H-Wege lässt sich noch senken. Zunächst folgt aus der Minimalität von $|X \cup F|$, dass keine Kante aus F mit einer Ecke aus X inzidiert: die Kante wäre sonst zur Trennung überflüssig. Es sei $Y := V(G-H) \setminus X$. Weiter bezeichne $\mathcal{C}_F$ die Menge der Komponenten des Graphen (Y, F), und für $C \in \mathcal{C}_F$ sei ∂C die Menge der Ecken von C mit einem Nachbarn in $G - X - C$. Jeder X vermeidende H-Weg enthält nun eine Kante aus F, und daher mindestens zwei Ecken aus ∂C für ein geeignetes $C \in \mathcal{C}_F$ (Abb. 2.4.1). Die Anzahl kreuzungsfreier H-Wege in G ist somit beschränkt durch die Zahl $\mathcal{C}_F$ ∂C

$$M_G(H) := \min \Big(|X| + \sum_{C \in \mathcal{C}_F} \lfloor \tfrac{1}{2} |\partial C| \rfloor \Big), \qquad M_G(H)$$

wobei das Minimum über alle X und F der geschilderten Art genommen wird: $X \subseteq V(G-H)$ und $F \subseteq E(G-H-X)$, so dass jeder H-Weg in G eine Ecke aus X oder eine Kante aus F enthält.

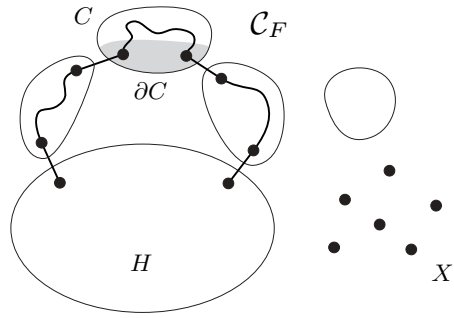


Abb. 2.4.1. Ein H-Weg in $G - X$

Der Satz von Mader besagt nun, dass diese obere Schranke für jedes G und H angenommen wird:

Satz 2.4.1. (Mader 1978)
In einem Graphen G gibt es zu einem Untergraphen $H \subseteq G$ stets $M_G(H)$ kreuzungsfreie H-Wege.

Um ein direktes Analogon zum Satz von Menger zu erhalten, wenden wir den Satz von Mader auf die beiden Spezialfälle an, dass die trennenden Mengen entweder nur Ecken oder nur Kanten enthalten. Für einen
$\kappa_G(H)$ Untergraphen $H \subseteq G$ bezeichne $\kappa_G(H)$ die kleinste Mächtigkeit einer Eckenmenge $X \subseteq V(G - H)$, die jeden H-Weg in G trifft. Analog sei
$\lambda_G(H)$ $\lambda_G(H)$ die kleinste Mächtigkeit einer Kantenmenge $F \subseteq E(G)$, die jeden H-Weg in G trifft.

Korollar 2.4.2. *In einem Graphen G gibt es zu einem Untergraphen $H \subseteq G$ stets mindestens $\frac{1}{2}\kappa_G(H)$ kreuzungsfreie H-Wege und mindestens $\frac{1}{2}\lambda_G(H)$ kantendisjunkte H-Wege.*

k *Beweis.* Zum Beweis der ersten Aussage sei k die größte Mächtigkeit einer Menge kreuzungsfreier H-Wege in G. Nach Satz 2.4.1 gibt es Mengen $X \subseteq V(G - H)$ und $F \subseteq E(G - H - X)$ mit

$$k = |X| + \sum_{C \in \mathcal{C}_F} \left\lfloor \tfrac{1}{2} |\partial C| \right\rfloor ,$$

so dass jeder H-Weg in G eine Ecke aus X oder eine Kante aus F enthält. Für jedes $C \in \mathcal{C}_F$ mit $\partial C \neq \emptyset$ sei $v \in \partial C$ eine Ecke und $Y_C := \partial C \setminus \{v\}$; im Falle $\partial C = \emptyset$ sei $Y_C := \emptyset$. Dann gilt $\left\lfloor \frac{1}{2} |\partial C| \right\rfloor \geqslant \frac{1}{2} |Y_C|$ für alle $C \in \mathcal{C}_F$.
Y Mit $Y := \bigcup_{C \in \mathcal{C}_F} Y_C$ trifft offenbar auch $X \cup Y$ jeden H-Weg. Daher folgt

$$k \geqslant |X| + \sum_{C \in \mathcal{C}_F} \tfrac{1}{2} |Y_C| \geqslant \tfrac{1}{2} |X \cup Y| \geqslant \tfrac{1}{2}\kappa_G(H)$$

wie behauptet.

Die zweite Aussage folgt aus der ersten durch Betrachtung des Kantengraphen von G (Übung 17). □

Es mag vielleicht überraschen, dass auch die Schranken aus Korollar 2.4.2 als generelle Schranken bestmöglich sind: es gibt Beispiele für G und H, so dass G nicht mehr als $\frac{1}{2}\kappa_G(H)$ kreuzungsfreie H-Wege enthält, oder nicht mehr als $\frac{1}{2}\lambda_G(H)$ kantendisjunkte H-Wege (siehe Übungen 18 und 19).

2.5 Wegverbindungen

Es sei G ein Graph und $X \subseteq V(G)$ eine Menge von Ecken. Wir nennen X in G *verbunden*, wenn wir für jede Wahl verschiedener Ecken $s_1, \dots, s_\ell$, $t_1, \dots, t_\ell$ aus X disjunkte Wege $P_1, \dots, P_\ell$ in G finden können, so dass P_i jeweils s_i mit t_i verbindet und keine innere Ecke in X hat. Im Gegensatz zum Satz von Menger fragen wir jetzt also nicht lediglich nach disjunkten Wegen zwischen zwei *Mengen* von Ecken, sondern wir verlangen auch, dass jeder dieser Wege ein vorgegebenes Paar von Endecken verbindet.

verbunden

Der Graph G heißt *k-verbunden*, wenn G mindestens $2k$ Ecken hat und jede Menge von bis zu $2k$ Ecken in G verbunden ist. Letzteres ist äquivalent zu der nur scheinbar schwächeren Forderung, dass für jede Wahl von genau $2k$ Ecken $s_1, \dots, s_k,\ t_1, \dots, t_k$ disjunkte Wege $P_i = s_i \dots t_i$ existieren. (Beweis?) In der Praxis ist dies einfacher zu beweisen, da wir uns nicht um mögliche innere Ecken in X sorgen müssen.

k-verbunden

Offensichtlich ist jeder k-verbundene Graph auch k-zusammenhängend. Die Umkehrung hingegen scheint weit von der Wahrheit entfernt zu sein: k-Verbundenheit ist offenbar eine weitaus stärkere Eigenschaft als k-Zusammenhang. Wir werden jedoch beweisen, dass wir k-Verbundenheit erzwingen können durch die Annahme, unser Graph sei $f(k)$-zusammenhängend für eine geeignete Funktion $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Zuerst geben wir einen hübschen und einfachen Beweis dafür, dass eine solche Funktion f überhaupt existiert. Im Rest des Abschnitts werden wir dann zeigen, dass wir f sogar linear wählen können.

Die grundlegende Idee des einfachen Beweises ist folgende. Wenn wir zeigen können, dass G eine Unterteilung K eines großen vollständigen Graphen enthält, dann können wir zunächst mit dem Satz von Menger die Ecken aus X disjunkt mit Verzweigungsecken von K verbinden. Diese können wir dann in der gewünschten Paarung innerhalb von K kurzschließen – was allerdings voraussetzt, dass unsere ersten Wege nicht zu viele der unterteilten Kanten von K treffen, bevor sie die Verzweigungsecken erreichen.

Dass solch ein K existiert, ist ein Lemma, welches eigentlich besser ins Kapitel 6 passt. (Dort werden wir in der Tat eine stärkere Version beweisen, zu der wir aber Satz 2.5.3 brauchen.) Anstatt hohen Zusammen-

hang anzunehmen, reicht es, dass G genügend hohen Durchschnittsgrad hat (vgl. Satz 0.4.3):

Lemma 2.5.1. *Es existiert eine Funktion $h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft, dass jeder Graph mit Durchschnittsgrad mindestens $h(r)$ einen TK^r als Teilgraphen enthält.*

(0.2.2) (0.3.1)

Beweis. Für $r \leqslant 2$ leistet $h(r) = 1$ das Gewünschte; im Folgenden sei $r \geqslant 3$. Wir zeigen mit Induktion nach $m = r, \dots, \binom{r}{2}$, dass jeder Graph G mit Durchschnittsgrad $d(G) \geqslant 2^m$ einen TX mit $|X| = r$ und $\|X\| = m$ enthält; für $m = \binom{r}{2}$ impliziert dies unsere Behauptung mit $h(r) = 2^{\binom{r}{2}}$.

Ist $m = r$, so enthält G nach den Propositionen 0.2.2 und 0.3.1 einen Kreis der Länge mindestens $\varepsilon(G) + 1 \geqslant 2^{r-1} + 1 \geqslant r + 1$. Die Behauptung gilt dann mit $X = C^r$.

Es sei nun $r < m \leqslant \binom{r}{2}$, und die Behauptung sei wahr für kleinere m. Es sei G mit $d(G) \geqslant 2^m$ gegeben, also $\varepsilon(G) \geqslant 2^{m-1}$. Da G eine Komponente C mit $\varepsilon(C) \geqslant \varepsilon(G)$ enthält, dürfen wir G als zusammenhängend annehmen. Wir betrachten eine in G zusammenhängende Eckenmenge
U $U \subseteq V(G)$; dieses U sei maximal gewählt mit $\varepsilon(G/U) \geqslant 2^{m-1}$. (Solch eine Menge U existiert, da G selbst die Form G/U hat mit $|U| = 1$.) Da G nach Annahme zusammenhängend ist, gilt $N(U) \neq \emptyset$.

H Es sei $H := G[N(U)]$. Hätte H eine Ecke v vom Grad $d_H(v) < 2^{m-1}$, so wäre für $U' := U \cup \{v\}$ auch $\varepsilon(G/U') \geqslant 2^{m-1}$ (im Widerspruch zur Maximalität von U): beachte, dass bei der Kontraktion der Kante vv_U in G/U außer ihr selbst nur $d_H(v)$ Kanten von H verlorengehen, insgesamt also höchstens 2^{m-1} Kanten und genau eine Ecke. Also gilt $d(H) \geqslant \delta(H) \geqslant 2^{m-1}$. Nach Induktionsannahme enthält H einen TY mit $|Y| = r$ und $\|Y\| = m - 1$. Es seien x, y zwei in Y nicht benachbarte Verzweigungsecken dieses TY. Wegen $x, y \in V(H) = N(U)$ enthält G einen x–y-Weg, dessen Inneres ganz in U liegt. Zusammen mit dem TY aus H bildet dieser Weg einen TX mit $|X| = |Y| = r$ und $\|X\| = m$. □

Satz 2.5.2. (Jung 1970; Larman & Mani 1970)
Es existiert eine Funktion $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft, dass für alle $k \in \mathbb{N}$ jeder $f(k)$-zusammenhängende Graph k-verbunden ist.

(2.3.1)

Beweis. Wir zeigen die Behauptung für $f(k) = h(3k) + 2k$, wobei h eine
G Funktion sei wie in Lemma 2.5.1. Es sei G ein $f(k)$-zusammenhängender
K Graph. Dann gilt $d(G) \geqslant \delta(G) \geqslant \kappa(G) \geqslant h(3k)$; es sei K ein TK^{3k} in G
U gemäß Lemma 2.5.1, und U die Menge der Verzweigungsecken von K.

s_i, t_i Zum Beweis, dass G k-verbunden ist, seien $s_1, \dots, s_k,\ t_1, \dots, t_k$ paarweise verschiedene Ecken von G. Nach Definition von $f(k)$ ist $\kappa(G) \geqslant 2k$. Nach dem Satz von Menger (2.3.1) enthält G daher disjunkte
P_i, Q_i Wege $P_1, \dots, P_k, Q_1, \dots, Q_k$, wobei P_i in s_i beginnt, Q_i in t_i beginnt, und alle P_i und Q_i in U enden aber keine inneren Ecken in U haben.

Die Wege seien so gewählt, dass die Gesamtzahl ihrer Kanten außerhalb von $E(K)$ minimal ist; die Menge all dieser Wege sei mit $\mathcal{P}$ bezeichnet. $\mathcal{P}$

Es seien $u_1, \dots, u_k$ die Ecken in U, die nicht Endecke eines Weges aus $\mathcal{P}$ sind. Für jedes $i = 1, \dots, k$ sei L_i der U-Weg in K (also die unterteilte Kante des K^{3k}) von u_i zur Endecke von P_i in U, und v_i die erste Ecke von L_i auf einem Weg $P \in \mathcal{P}$. Nach Definition von $\mathcal{P}$ hat P nicht mehr Kanten außerhalb von $E(K)$ als $Pv_iL_iu_i$, d.h. es gilt $v_iP = v_iL_i$ und demnach $P = P_i$ (Abb. 2.5.1). Bezeichnet entsprechend M_i den U-Weg in K von u_i zur Endecke von Q_i in U und w_i die erste Ecke von M_i auf einem Weg in $\mathcal{P}$, so ist dieser Weg notwendig Q_i. Die Wege $s_iP_iv_iL_iu_iM_iw_iQ_it_i$ sind dann disjunkt für verschiedene i, und G ist als k-verbunden erwiesen. □

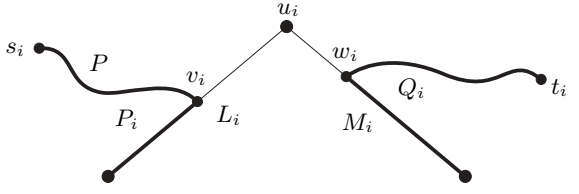


Abb. 2.5.1. Konstruktion eines s_i–t_i-Weges über u_i

Der Beweis des Satzes 2.5.2 liefert uns lediglich eine exponentielle obere Schranke für die Funktion $f(k)$. Da $2\varepsilon(G) \geqslant \delta(G) \geqslant \kappa(G)$ ist, impliziert das folgende Resultat die lineare Schranke $f(k) = 16k$:

Satz 2.5.3. (Thomas & Wollan 2005) [6.2.1]
Es sei G ein Graph und $k \in \mathbb{N}$. Wenn G $2k$-zusammenhängend ist und $\varepsilon(G) \geqslant 8k$, dann ist G k-verbunden.

Wir beginnen unseren Beweis des Satzes 2.5.3 mit einem Lemma.

Lemma 2.5.4. *Wenn $\delta(G) \geqslant 8k$ ist und $|G| \leqslant 16k$, dann hat G einen k-verbundenen Teilgraphen.*

Beweis. Wenn G selbst k-verbunden ist, ist nichts zu zeigen. Also nehmen wir an, dies sei nicht der Fall. Dann können wir eine Menge X X
von $2k$ Ecken $s_1, \dots, s_k, t_1, \dots, t_k$ finden, die in G nicht durch disjunkte Wege $P_i = s_i \dots t_i$ ohne innere Ecken in X verbunden werden können. Es sei $\mathcal{P}$ eine größtmögliche Menge solcher Wege, die jedoch alle höchstens $\mathcal{P}$
die Länge 7 haben. Gibt es mehrere solcher Mengen $\mathcal{P}$, so wählen wir eine, für die $|\bigcup \mathcal{P}|$ minimal ist. Wir nehmen an, dass $\mathcal{P}$ keinen Weg von s_1 nach t_1 enthält. Es sei J der Teilgraph von G, der von X und allen s_1, t_1
Ecken auf den Wegen aus $\mathcal{P}$ induziert wird, und es sei $H := G - J$. J, H

Jede Ecke $v \in H$ hat auf jedem $P_i \in \mathcal{P}$ höchstens drei Nachbarn: hätte sie mehr, so könnten wir den Teilweg uP_iw zwischen dem ersten

und dem letzten Nachbarn von v auf P_i durch den Weg uvw ersetzen und dadurch $|\bigcup \mathcal{P}|$ senken, was unserer Wahl von $\mathcal{P}$ widerspräche. Zusätzlich gilt aufgrund der Maximalität von $\mathcal{P}$, dass v im Falle von $s_i, t_i \notin \bigcup \mathcal{P}$ nicht zu beiden Ecken s_i und t_i benachbart sein kann. Für $|\mathcal{P}| =: h$ hat v damit höchstens $3h + (2k - 2h)/2 \leqslant 3k$ Nachbarn in J. Da nach Voraussetzung $\delta(G) \geqslant 8k$ ist und $|G| \leqslant 16k$, sowie $|X| = 2k$, folgt

$$\delta(H) \geqslant 5k \quad \text{und} \quad |H| \leqslant 14k\,. \tag{1}$$

Als nächstes zeigen wir, dass H unzusammenhängend ist. Da jeder der Wege aus $\mathcal{P}$ höchstens 8 Ecken hat, gilt $|J - \{s_1, t_1\}| \leqslant 8(k-1)$. Daher hat sowohl s_1 als auch t_1 Nachbarn in H. Es sei $S \subseteq V(H)$ die Menge der Ecken mit Abstand höchstens 2 (gemessen in H) von einem Nachbarn von s_1 in H, und $T \subseteq V(H)$ die entsprechende Menge für t_1. Da $G - \bigcup \mathcal{P}$ keinen s_1–t_1-Weg der Länge höchstens 7 enthält, gilt $S \cap T = \emptyset$, und es existiert keine S–T-Kante in H. Um zu beweisen, dass H unzusammenhängend ist, reicht es also, $V(H) = S \cup T$ zu zeigen. Wähle einen Nachbarn $s \in S$ von s_1 und einen Nachbarn $t \in T$ von t_1. Dann sind für jede Ecke $v \in H - (S \cup T)$ die drei Mengen $N_H(s)$, $N_H(t)$ und $N_H(v)$ disjunkt und enthalten jeweils mindestens $5k$ Ecken. Das widerspricht (1).

H ist also unzusammenhängend; es sei C die kleinste Komponente von H. Aus (1) folgt

$$2\delta(C) \geqslant 2\delta(H) \geqslant 7k + 3k \geqslant \tfrac{1}{2}\,|H| + 3k \geqslant |C| + 3k\,. \tag{2}$$

Wir zeigen jetzt, dass C k-verbunden ist. Da $\delta(C) \geqslant 5k$ ist, gilt $|C| \geqslant 2k$. Es sei Y eine Menge von höchstens $2k$ Ecken aus C. Aus (2) folgt, dass je zwei Ecken aus Y mindestens $3k$ gemeinsame Nachbarn haben, von denen mindestens k außerhalb von Y liegen. Daher können wir alle gewünschten $\ell \leqslant k$ Eckenpaare aus Y induktiv durch Wege der Länge 2 verbinden, deren innere Ecke außerhalb von Y liegt. □

Bevor wir nun den Beweis des Satzes 2.5.3 angehen, betrachten wir zuvor seine grundlegenden Ideen. Um zu zeigen, dass G k-verbunden ist, müssen wir eine beliebige Menge X von bis zu $2k$ Ecken betrachten und zeigen, dass X in G verbunden ist. Idealerweise würden wir gerne mit Lemma 2.5.4 irgendwo in G einen verbundenen Teilgraphen L finden, sowie mit unserer Annahme von $\kappa(G) \geqslant 2k$ und dem Satz von Menger eine Menge von $|X|$ disjunkten X–L-Wegen. Dann könnte X entlang dieser Wege und innerhalb von L verbunden werden, und der Beweis wäre fertig.

Leider können wir nicht damit rechnen, einen Teilgraphen H mit $\delta(H) \geqslant 8k$ und $|H| \leqslant 16k$ zu finden (in welchem L nach Lemma 2.5.4 gefunden werden könnte); vgl. Korollar 9.2.3. Es ist jedoch nicht allzu

schwierig, einen Minor $H \preccurlyeq G$ zu finden, der einen solchen Teilgraphen H' hat (vgl. Übung 22, Kap. 6) – sogar so, dass die Ecken von X in unterschiedlichen Verzweigungsmengen von H liegen. Wir können X dann als Teilmenge von $V(H)$ auffassen, und Lemma 2.5.4 liefert uns einen verbundenen Teilgraphen L von $H' \subseteq H$. Das Problem dabei ist nur, dass H nicht mehr $2k$-zusammenhängend sein muss: unsere Annahme von $\kappa(G) \geqslant 2k$ stellt nicht sicher, dass wir X auch in H durch $|X|$ disjunkte Wege mit L verbinden können.

An dieser Stelle kommt nun der raffinierte Teil des Beweises: die Annahme von $\kappa \geqslant 2k$ wird zu einer schwächeren Annahme gelockert, welche sich auf H überträgt. Diese schwächere Annahme besagt, dass *falls* wir X von einem anderen Teilgraphen durch weniger als $|X|$ Ecken trennen können, dieser andere Teil „leicht“ sein muss: grob gesprochen darf sein eigener ε-Wert $8k$ nicht überschreiten. Wenn wir dann X nicht durch $|X|$ disjunkte Wege mit L verbinden können, hat H eine solche Teilung $\{A, B\}$, mit $X \subseteq A$ und $L \subseteq B$. Wenn wir diese Teilung von minimaler Ordnung wählen, können wir $A \cap B$ in $H[B]$ nach dem Satz von Menger mittels $|A \cap B|$ disjunkter Wege mit L verbinden. Dann aber können wir unseren Beweis in $H[A]$ fortführen – dessen ε-Wert mindestens so groß wie zuvor ist, da der B-Teil von H „leicht“ war. Wir können sogar durch zusätzliche Kanten $A \cap B$ zu einem vollständigen Teilgraphen von $H[A]$ machen: sollten wir nämlich je diese neuen Kanten für Verbindungswege in $H[A]$ benutzen, so könnten wir sie durch Wege durch B und L ersetzen. Damit stellen wir sicher, dass wir in $H[A]$ nicht plötzlich unzulässige kleine Trenner bekommen – solche, die einen „schweren“ Teil von X abspalten. Insgesamt gelten dann unsere beiden induktiven Annahmen – dass $\varepsilon \geqslant 8k$ ist, und dass kleine Trenner nur leichte Teile von X abspalten können – auch für $H[A]$, und unser Induktionsbeweis ist vollständig.

Zu $k \in \mathbb{N}$, einem Graphen G, und $A, B, X \subseteq V(G)$ nennen wir das geordnete Paar (A, B) eine *X-Teilung* von G, wenn $\{A, B\}$ eine echte Teilung von G der Ordnung höchstens $|X|$ ist und $X \subseteq A$ gilt. Eine X-Teilung (A, B) ist *klein*, wenn $|A \cap B| < |X|$ gilt, und *verbunden*, falls $A \cap B$ in $G[B]$ verbunden ist.

X-Teilung
klein
verbunden

Wir nennen eine Menge $U \subseteq V(G)$ *leicht* in G, wenn $\|U\|^+ \leqslant 8k\,|U|$ gilt, wobei $\|U\|^+$ die Anzahl der Kanten von G bezeichnet, die mindestens eine Endecke in U haben. Eine Eckenmenge heißt *schwer*, wenn sie nicht leicht ist.

$\| \ \|^+$
leicht
schwer

Beweis von Satz 2.5.3. Für festes $k \in \mathbb{N}$ beweisen wir folgendes:

k

> *Es sei $G = (V, E)$ ein Graph und $X \subseteq V$ eine Menge von höchstens $2k$ Ecken. Wenn $V \setminus X$ schwer ist und für jede kleine X-Teilung (A, B) die Menge $B \setminus A$ leicht ist, dann ist X in G verbunden.* $(*)$

$G = (V, E)$
X

Zum Beweis unseres Satzes aus $(*)$ nehmen wir an, dass $\kappa(G) \geqslant 2k$ ist und $\varepsilon(G) \geqslant 8k$. Es sei X eine Menge von genau $2k$ Ecken. Dann hat G keine kleine X-Teilung, und $V \setminus X$ ist schwer, da

$$\|V \setminus X\|^+ \geqslant \|G\| - \binom{2k}{2} \geqslant 8k\,|V| - \binom{2k}{2} > 8k\,|V \setminus X|$$

gilt. Nach $(*)$ ist X in G verbunden, was nach unserer Vorüberlegung zur Definition der k-Verbundenheit zu zeigen reicht.

Wir beweisen $(*)$ mit Induktion nach $|G|$, und für jeden Wert von $|G|$ mit Induktion nach $\|V \setminus X\|^+$. Ist $|G| = 1$, dann ist X in G verbunden. Für den Induktionsschritt seien nun G und X wie in $(*)$ gegeben.

Zuerst beweisen wir folgendes:

OBdA hat G keine verbundene X-Teilung. (1)

(A, B) Zum Beweis von (1) nehmen wir an, dass G eine verbundene X-Teilung (A, B) hat. Wir wählen diese so, dass A minimal ist, und setzen
S $S := A \cap B$.

Zuerst betrachten wir den Fall $|S| = |X|$. Gibt es $|X|$ disjunkte X–S-Wege in $G[A]$, so ist X in G verbunden, da (A, B) verbunden ist. Damit wäre der Beweis von $(*)$ fertig. Anderenfalls hat $G[A]$ nach dem Satz von Menger (2.3.1) eine kleine X-Teilung (A', B') mit $B' \supseteq S$. Wählen wir diese mit $|A' \cap B'|$ minimal, so können wir nach Menger $A' \cap B'$ mit S in $G[B']$ durch $|A' \cap B'|$ disjunkte Wege verbinden. Aber dann ist $(A', B' \cup B)$ eine verbundene X-Teilung von G, was unserer Wahl von (A, B) widerspricht.

G' Es gilt also $|S| < |X|$. Es sei G' der Graph, den wir aus $G[A]$ erhalten, wenn wir $G'[S]$ durch Hinzufügen möglicherweise fehlender Kanten auf S vollständig machen. Da (A, B) nun eine kleine X-Teilung ist, folgt nach Voraussetzung in $(*)$, dass $B \setminus A$ in G leicht ist. Somit entsteht G' aus G durch Löschen von $|B \setminus A|$ Ecken außerhalb von X und höchstens $8k\,|B \setminus A|$ Kanten, und möglicherweise haben wir sogar noch ein paar Kanten auf S hinzufügt. Da $V \setminus X$ in G schwer ist, folgt:

$$A \setminus X \text{ ist schwer in } G'.$$

Um die Induktionsannahme auf G' anwenden zu können, zeigen wir als nächstes, dass für jede kleine X-Teilung (A', B') von G' die Menge $B' \setminus A'$ in G' leicht ist. Wir nehmen an, dies sei nicht der Fall und
(A', B') wählen ein Gegenbeispiel (A', B'), bei dem B' minimal ist. Da $G'[S]$ vollständig ist, ist $S \subseteq A'$ oder $S \subseteq B'$.

Ist $S \subseteq A'$, so gilt $B' \cap B \subseteq S \subseteq A'$; damit ist $(A' \cup B, B')$ eine kleine X-Teilung von G. Weiter folgt

$$B' \setminus (A' \cup B) = B' \setminus A',$$

und keine Kante von $G' - E$ auf S ist mit dieser Menge inzident (Abb. 2.5.2). Unsere Annahme, dass diese Menge in G' schwer ist (nach Wahl von (A', B')), impliziert daher, dass sie auch in G schwer ist. Da $(A' \cup B, B')$ eine kleine X-Teilung von G ist, widerspricht dies unseren Annahmen in $(*)$.

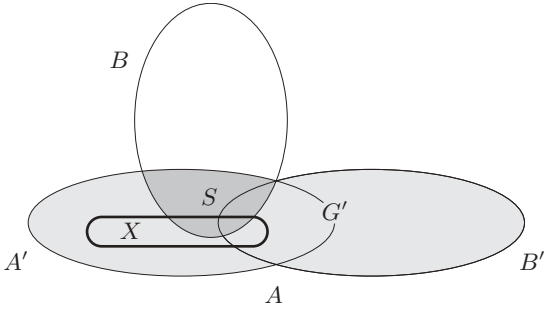


Abb. 2.5.2. Ist $S \subseteq A'$, so ist $(A' \cup B, B')$ eine X-Teilung von G.

Somit gilt $S \subseteq B'$. Aufgrund unserer Wahl von (A', B'), erfüllt der Graph $G'' := G'[B']$ die Voraussetzungen in $(*)$ für $X'' := A' \cap B'$: $B' \setminus X'' = B' \setminus A'$ ist schwer, und wegen der Minimalität von B' ist für jede kleine X''-Teilung (A'', B'') von G'' die Menge $B'' \setminus A''$ leicht, da ja $(A' \cup A'', B'')$ eine kleine X-Teilung von G' ist und $B'' \setminus A'' = B'' \setminus (A' \cup A'')$.

Nach Induktionsannahme ist damit X'' in G'' verbunden. Dann ist X'' aber auch in $G[B' \cup B]$ verbunden: da S in $G[B]$ verbunden war, können wir Kanten, die wir bei der Bildung von G' auf S hinzugefügt hatten, einfach durch disjunkte Wege durch B ersetzen (Abb. 2.5.3). Damit ist aber $(A', B' \cup B)$ eine verbundene X-Teilung von G, die die Minimalität von A in der Wahl von (A, B) verletzt.

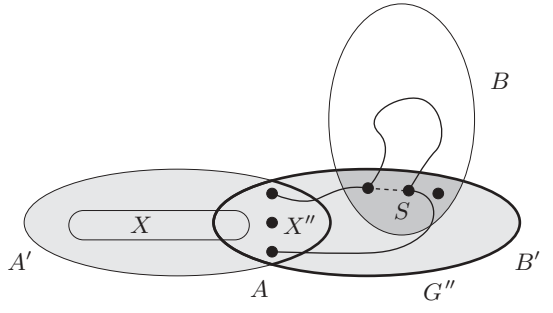


Abb. 2.5.3. Wenn $S \subseteq B'$ gilt, dann ist $(A', B' \cup B)$ in G verbunden.

Wir haben also gezeigt, dass G' die Voraussetzungen von $(*)$ in Bezug auf X erfüllt. Da $\{A, B\}$ eine echte Teilung ist, hat G' weniger

Ecken als G. Nach Induktionsannahme ist X daher in G' verbunden. Indem wir wie zuvor Kanten von $G' - E$ auf S durch Wege in B ersetzen, können wir jede Verbindung von X in G' in eine Verbindung von X in G umwandeln, womit $(*)$ bewiesen wäre. Dies vollendet den Beweis von (1).

Unser nächstes Ziel ist, zu zeigen, dass wir aufgrund unserer Induktionsannahme annehmen dürfen, dass G nicht nur großen Durchschnittsgrad hat, sondern sogar großen Minimalgrad. Für unseren Beweis, dass X in G verbunden ist, seien $s_1, \dots, s_\ell, t_1, \dots, t_\ell$ die unterschiedlichen Ecken aus X, die wir durch disjunkte Wege $P_i = s_i \dots t_i$ verbinden wollen. Da diese Wege keine inneren Ecken in X haben dürfen, können wir auf X alle in G fehlenden Kanten hinzufügen, außer Kanten der Form $s_i t_i$; die Existenz solch neuer Kanten beeinflusst ja weder die Voraussetzung noch die Folgerung in $(*)$.

$G[X]$

Nach dieser kleinen Modifikation von G können wir nun folgendes beweisen:

OBdA haben benachbarte Ecken u und v, die nicht beide in X liegen, stets mindestens $8k-1$ gemeinsame Nachbarn. (2)

$e = uv$
n
G'
V'

Um (2) zu zeigen, sei $e = uv$ eine solche Kante, und n bezeichne die Anzahl der gemeinsamen Nachbarn von u und v. Es sei $G' := G/e$ der durch Kontraktion von e gewonnene Graph. Da u und v nicht beide in X liegen, können wir X als Teilmenge von $V' := V(G')$ auffassen: ist $X \cap \{u, v\} \neq \emptyset$, so ersetzen wir u bzw. v in X durch die kontrahierte Ecke v_e. Wir möchten nun folgendes zeigen: ist $n < 8k-1$, im Gegensatz zu (2), so erfüllt G' die Voraussetzungen von $(*)$. Dann ist nach Induktionsannahme X in G' verbunden, und die gewünschten Wege $P_1, \dots, P_\ell$ existieren in G'. Falls einer davon die Ecke v_e enthält, können wir diese durch u oder v oder uv ersetzen und erhalten einen Weg in G. Damit ist dann $(*)$ bewiesen.

Nehmen wir also $n < 8k-1$ an. Um zu zeigen, dass G' die Voraussetzungen von $(*)$ bezüglich X erfüllt, beweisen wir zunächst, dass $V' \setminus X$ schwer ist. Da $V \setminus X$ schwer ist und $|V' \setminus X| = |V \setminus X| - 1$, genügt es zu zeigen, dass durch die Kontraktion von e höchstens $8k$ mit einer Ecke außerhalb von X inzidente Kanten verloren gingen. Liegen u und v beide außerhalb von X, so gingen bei der Kontraktion von e nur $n+1$ Kanten verloren: eine Kante für jeden gemeinsamen Nachbarn von u und v, sowie e selbst. Liegt jedoch etwa u in X, dann gilt $v \notin X$, und wir haben alle X–v-Kanten xv von G ebenfalls verloren: während xv zu $\|V \setminus X\|^+$ beigetragen hatte, liegt hingegen für $x \neq u$ die Kante xv_e in $G'[X]$ und trägt nicht zu $\|V' \setminus X\|^+$ bei. Ist x nicht auch zu u benachbart, so ist dies ein zusätzlicher Verlust. (Im Falle $xu \in E$ hatten wir diesen Verlust bereits unter „gemeinsame Nachbarn“ verbucht.) Nach unserer Kantenanreicherung von $G[X]$ ist aber höchstens ein $x \in X \setminus \{u\}$

nicht zu u benachbart. Insgesamt haben wir also höchstens $n+2$ Kanten verloren. Nach unserer Annahme von $n < 8k-1$ sind dies höchstens $8k$ Kanten, d.h. $V' \setminus X$ ist in der Tat schwer.

Es bleibt noch zu zeigen, dass für jede kleine X-Teilung (A', B') von G' die Menge $B' \setminus A'$ leicht ist. Es sei (A', B') ein Gegenbeispiel mit minimalem B'. Wie im Beweis von (1) erfüllt $G'[B']$ dann die Voraussetzungen von $(*)$ in Bezug auf $X' := A' \cap B'$, und nach Induktionsannahme ist X' in $G'[B']$ verbunden. Es seien A und B die Mengen, die wir aus A' und B' erhalten, wenn wir v_e (wo relevant) durch beide Ecken u und v ersetzen. Wir dürfen $u, v \in B$ annehmen, denn sonst ist (A, B) eine kleine X-Teilung von G, für die $B \setminus A$ schwer ist, was unseren Annahmen in $(*)$ widerspricht. Wir werden zeigen, dass $X'' := A \cap B$ in $G[B]$ verbunden ist; dann ist (A, B) eine verbundene X-Teilung von G, was (1) widerspricht.

(A', B')

X'

X''

Ist $v_e \notin X'$, so gilt $u, v \in B \setminus A$. Dann ist X'' in $G[B]$ verbunden, weil X' in $G'[B']$ verbunden ist: falls v_e auf einem der Verbindungswege für X' liegt, ersetzen wir es einfach wie oben durch u oder v oder uv.

Nehmen wir nun $v_e \in X'$ an. Unser Ziel ist es zu zeigen, dass $G[B]$ die Voraussetzungen von $(*)$ in Bezug auf X'' erfüllt: dann ist X'' nach Induktionsannahme in $G[B]$ verbunden. Wir wissen, dass $B \setminus X'' = B' \setminus A'$ in G schwer ist, da es aufgrund der Wahl von (A', B') in G' schwer ist. Ist (A'', B'') eine kleine X''-Teilung von $G[B]$, so ist $(A \cup A'', B'')$ eine kleine X-Teilung von G. Damit ist $B'' \setminus A'' = B'' \setminus (A \cup A'')$ leicht, nach der Annahme in $(*)$. Somit ist X'' in $G[B]$ verbunden, und der Beweis von (2) ist vollendet.

Mit Induktion durch Kantenkontraktion haben wir eben gezeigt, dass die Ecken in $V \setminus X$ oBdA großen Grad haben. Mit Induktion durch Löschen einer Kante wollen wir nun zeigen, dass diese Grade aber nicht alle sehr groß sein können. Da $(*)$ im Falle $V = X$ gilt, dürfen wir $V \setminus X \neq \emptyset$ annehmen; es bezeichne d^* den kleinsten Grad in G einer Ecke aus $V \setminus X$. Wir werden zeigen, dass

d^*

$$8k \leqslant d^* \leqslant 16k - 1\,. \tag{3}$$

Die untere Schranke in (3) folgt aus (2), wenn wir annehmen, dass G keine isolierten Ecken außerhalb von X hat (was wir offensichtlich mit Induktion annehmen können). Um die obere Schranke herzuleiten, schauen wir einmal, was passiert, wenn wir eine Kante e löschen, deren Endecken u, v nicht beide in X liegen. Falls $G - e$ die Voraussetzung in $(*)$ bezüglich X erfüllt, dann ist X nach Induktion in $G - e$ verbunden, und somit auch in G. Falls nicht, dann ist entweder $V \setminus X$ leicht in $G - e$, oder $G - e$ hat eine kleine X-Teilung (A, B), so dass $B \setminus A$ schwer ist. Ist letzteres der Fall, so muss e eine $(A \setminus B)$–$(B \setminus A)$-Kante sein: andernfalls wäre (A, B) auch eine kleine X-Teilung von G, und $B \setminus A$ wäre auch in G schwer, was unseren Annahmen in $(*)$ widerspräche. Ist

$e = uv$

aber e eine solche Kante, dann liegen alle gemeinsamen Nachbarn von u und v in $A \cap B$, d.h. es gibt weniger als $|X| \leqslant 2k$ solche Nachbarn. Dies widerspricht (2).

Also muss $V \setminus X$ leicht in $G - e$ sein. Für G folgt dann

$$\|V \setminus X\|^+ \leqslant 8k\,|V \setminus X| + 1\,. \tag{4}$$

$f(x)$

Um zu zeigen, dass dies die gewünschte obere Schranke für d^* liefert, schätzen wir die Anzahl $f(x)$ von Kanten ab, die eine Ecke $x \in X$ nach $V \setminus X$ schickt. Es muss mindestens eine solche Kante xy existieren, da sonst $(X, V \setminus \{x\})$ eine kleine X-Teilung von G wäre, die den Annahmen in $(*)$ widerspricht. Nach (2) haben x und y mindestens $8k - 1$ gemeinsame Nachbarn, von denen höchstens $2k - 1$ in X liegen. Somit gilt $f(x) \geqslant 6k$. Wegen

$$2\,\|V \setminus X\|^+ \;=\; \sum_{v \in V \setminus X} d_G(v) + \sum_{x \in X} f(x)$$

würde aus $d^* \geqslant 16k$ folgen, dass

$$2\,(8k\,|V \setminus X| + 1) \underset{(4)}{\geqslant} 2\,\|V \setminus X\|^+ \geqslant 16k\,|V \setminus X| + 6k\,|X|$$

gilt, was zum Widerspruch $2 \geqslant 6k\,|X|$ führt. Dies vollendet den Beweis von (3).

Um unseren Beweis von $(*)$ fertigzustellen, wählen wir eine Ecke $v_0 \in V \setminus X$ vom Grad d^* und betrachten den in G von v_0 und seinen Nachbarn induzierten Untergraphen H. Nach (2) gilt $\delta(H) \geqslant 8k$, und nach (3) und der Wahl von v_0 wissen wir, dass $|H| \leqslant 16k$ ist. Nach Lemma 2.5.4 hat H dann einen k-verbundenen Teilgraphen; dessen Eckenmenge bezeichnen wir mit L. Nach Definition von „k-verbunden“ gilt $|L| \geqslant 2k \geqslant |X|$. Falls es $|X|$ disjunkte X–L-Wege in G gibt, so ist X wie gewünscht in G verbunden. Falls nicht, so hat G eine kleine X-Teilung (A, B) mit $L \subseteq B$. Wählen wir (A, B) von minimaler Ordnung, so enthält $G[B]$ nach dem Satz 2.3.1 von Menger $|A \cap B|$ disjunkte $(A \cap B)$–L-Wege. Dann aber ist (A, B) eine verbundene X-Teilung, was (1) widerspricht. □

Übungen

1.$^-$ Es seien G ein Graph, $X \subseteq V(G)$, und $a, b \in G - X$ zwei durch X in G getrennte Ecken. Zeige, dass X genau dann ein minimaler a–b-Trenner in G ist, wenn jede Ecke aus X sowohl in der Komponente C_a von $G - X$, die a enthält, als auch in der Komponente C_b von $G - X$, die b enthält, einen Nachbarn hat.

2. (Fortsetzung der vorigen Übung)

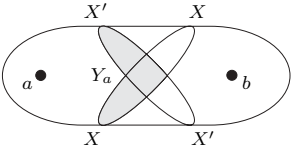
   Es sei $X' \subseteq V(G) \setminus \{a, b\}$ ein weiter a–b-Trenner. Entsprechend seien C'_a und C'_b definiert. Zeige, dass auch

   $$Y_a := (X \cap C'_a) \cup (X \cap X') \cup (X' \cap C_a)$$

   und

   $$Y_b := (X \cap C'_b) \cup (X \cap X') \cup (X' \cap C_b)$$

   die Ecken a und b trennen (siehe Abbildung).



3. (Fortsetzung der vorigen Übung)

   Sind Y_a und Y_b minimale a–b-Trenner in G, wenn X und X' es sind? Sind $|Y_a|$ und $|Y_b|$ minimal für a–b-Trenner aus $V(G) \setminus \{a, b\}$, wenn $|X|$ und $|X'|$ es sind?

4. Es seien G ein Graph und $X, X' \subseteq V(G)$ zwei minimale G trennende Eckenmengen. Die Menge X treffe mindestens zwei Komponenten von $G - X'$. Zeige, dass X' alle Komponenten von $G - X$ trifft, und dass X alle Komponenten von $G - X'$ trifft.

5.$^-$ Leite den Fall $k = 2$ des Satzes 2.3.1 von Menger aus Proposition 2.1.1 her.

6.$^-$ Beweise die elementaren Aussagen über Blöcke am Anfang von Abschnitt 2.1.

7. Zeige, dass der Block-Graph eines zusammenhängenden Graphen stets ein Baum ist.

8. Zeige, dass für jede Kante e eines 2-zusammenhängenden Graphen $G \neq K^3$ entweder $G - e$ oder G/e wiederum 2-zusammenhängend ist. Leite hieraus eine konstruktive Charakterisierung der 2-zusammenhängenden Graphen analog zu Satz 2.2.2 ab.

9.$^-$ Zeige, dass für einen 3-zusammenhängenden Graphen G und eine Kante $xy \in G$ genau dann G/xy wieder 3-zusammenhängend ist, wenn $G - \{x, y\}$ 2-zusammenhängend ist.

10. (i)$^-$ Zeige, dass jeder kubische 3-kantenzusammenhängende Graph auch 3-zusammenhängend ist.

    (ii) Zeige, dass ein Graph genau dann kubisch und 3-zusammenhängend ist, wenn man ihn iterativ aus einem K^4 durch die folgende Operation konstruieren kann: die Unterteilung zweier Kanten durch je eine Ecke und Verbinden der beiden neuen Ecken durch eine neue Kante.

11.$^+$ Zeige, dass jeder transitive Graph G mit $\kappa(G) = 2$ ein Kreis ist.

12. Finde den Fehler im folgenden „einfachen Beweis“ des Satzes von Menger (2.3.1). Es sei X ein A–B-Trenner aus möglichst wenigen Ecken. Bezeichne mit G_A den Untergraphen von G, der durch X und all die Komponenten von $G - X$ induziert wird, die A treffen; entsprechend sei G_B definiert. Da jeder A–B-Weg X trifft, enthält G_A keinen A–X-Trenner aus weniger als $|X|$ Ecken. Mit Induktion nach $|G|$ enthält G_A daher $|X|$ disjunkte Wege von A nach X, und G_B enthält entsprechende X–B-Wege. Zusammen bilden diese Wege das gesuchte Wegesystem zwischen A und B.

13. Beweise den Satz von Menger wie folgt mit Induktion nach $\|G\|$. Zu einer Kante $e = xy$ betrachte einen kleinsten A–B-Trenner S in $G - e$. Zeige, dass falls die Induktionsannahme nicht unmittelbar eine Lösung für G impliziert, $S \cup \{x\}$ und $S \cup \{y\}$ kleinste A–B-Trenner in G sind. Zeige dann weiter, dass wenn keiner dieser beiden Trenner als X in der vorigen Übung einen korrekten Beweis ergibt, nur noch ein einfacher Restfall zu betrachten bleibt.

14. Führe den Beweis von Korollar 2.3.5 (ii) genau durch.

15. Zeige, dass für $k \geqslant 2$ jeder k-zusammenhängende Graph mit mindestens $2k$ Ecken einen Kreis der Länge mindestens $2k$ enthält.

16. Zeige, dass in einem k-zusammenhängenden Graphen ($k \geqslant 2$) je k Ecken auf einem gemeinsamen Kreis liegen.

17. Leite die Kantenversion von Korollar 2.4.2 aus seiner Eckenversion her.

    (Tip: Betrachte die H-Wege in dem Graphen, der aus der disjunkten Vereinigung von H und $L(G)$ durch Einfügen aller Kanten he entsteht, für die h eine Ecke von H und e eine in G mit h inzidente Kante aus $E(G) \setminus E(H)$ ist.)

18.$^-$ In der disjunkten Vereinigung eines Graphen $H = \overline{K^{2m+1}}$ mit k Exemplaren des K^{2m+1} verbinde $V(H)$ mit jedem der K^{2m+1} bijektiv durch $2m+1$ Kanten. Zeige, dass der entstandene Graph G höchstens $km = \frac{1}{2}\kappa_G(H)$ kreuzungsfreie H-Wege enthält.

19. Finde einen bipartiten Graphen G mit Partitionsmengen A und B, der für $H := G[A]$ nur $\frac{1}{2}\lambda_G(H)$ kantendisjunkte H-Wege enthält.

20.$^+$ Leite den 1-Faktor-Satz von Tutte (1.2.1) aus dem Satz von Mader ab.

    (Tip: Füge zu jeder Ecke $v \in G$ eine neue Ecke v' hinzu und verbinde sie mit v. Zeige, dass für ein geeignetes H die 1-Faktoren in G genau den hinreichend großen Mengen kreuzungsfreier H-Wege in dem erweiterten Graphen entsprechen.)

21.$^-$ Zeige, dass k-verbundene Graphen $(2k-1)$-zusammenhängend sind. Sind sie sogar $2k$-zusammenhängend?

22. Finde zu jedem $k \in \mathbb{N}$ ein möglichst großes $\ell = \ell(k)$, so dass nicht jeder ℓ-zusammenhängende Graph k-verbunden ist.

23. In einem k-verbundenen Graphen G seien $s_1, \dots, s_k, t_1, \dots, t_k$ nicht notwendigerweise verschiedene Ecken mit $s_i \neq t_i$ für jedes i. Zeige, dass G kreuzungsfreie Wege $P_i = s_i \dots t_i$ enthält $(i = 1, \dots, k)$.

24. Zeige mit Satz 2.5.3, dass die Funktion h aus Lemma 2.5.1 als $h(r) = cr^2$ gewählt werden kann, wobei $c \in \mathbb{N}$ eine geeignete Konstante ist.

Notizen

Obwohl Zusammenhangsprobleme zu den natürlichsten und auch anwendungsreichsten Fragestellungen der Graphentheorie gehören, gibt es bislang keine einschlägige Monographie darüber. Die umfassendste Quelle bietet vielleicht A. Schrijver, *Combinatorial optimization*, Springer 2003, zusammen mit einer Reihe von Übersichtsartikeln von A. Frank, die sich auf seiner Homepage finden. Einige Gebiete werden behandelt in B. Bollobás, *Extremal Graph Theory*, Academic Press 1978, bei R. Halin, *Graphentheorie*, Wissenschaftliche Buchgesellschaft 1980, und in A. Franks Kapitel des *Handbook of Combinatorics* (R.L. Graham, M. Grötschel & L. Lovász, Hrsg.), North-Holland 1995. Einen Überblick speziell über Resultate und Techniken zu minimal n-zusammenhängenden Graphen gibt W. Mader, On vertices of degree n in minimally n-connected graphs and digraphs, in (D. Miklos, V.T. Sós und T. Szőnyi, Hrsg.) *Paul Erdős is 80*, Band 2, Proc. Colloq. Math. Soc. János Bolyai, Budapest 1996.

Unser Beweis des Satzes von Tutte (2.2.3) stammt von C. Thomassen, Planarity and duality of finite and infinite graphs, *J. Comb. Theory B* **29** (1980), 244–271. In dieser Arbeit finden sich auch Lemma 2.2.1 und sein Beweis. Das *Wheel Theorem* von Tutte (1961) unterscheidet sich von unserem Satz 2.2.2 wie folgt. Einerseits ist als Reduktionsschritt alternativ zu (ii) auch die Löschung einer Kante erlaubt. Von zu kontrahierenden Kanten wird jedoch zusätzlich gefordert, dass sie in keinem Dreieck liegen dürfen. Als Startmenge für die Konstruktion aller 3-zusammenhängenden Graphen braucht man daher alle Räder, nicht nur K^4.

Ein im Text nicht angesprochener Ansatz, die Struktur der k-zusammenhängenden Graphen auch für $k > 3$ besser zu verstehen, ist das Studium *minimal k-zusammenhängender* Graphen: k-zusammenhängender Graphen, die bei jeder Löschung einer Kante ihren k-Zusammenhang verlieren. Wie bei allen k-zusammenhängenden Graphen betragen auch bei den minimalen alle Eckengrade mindestens k. Ein klassischer Satz von Halin (1969) besagt, dass jeder minimal k-zusammenhängende Graph jedoch tatsächlich eine Ecke des Grades k enthält; dies ist besonders wertvoll in Induktionsbeweisen. Halins Satz bildet den Ausgangspunkt einer Reihe tiefer Untersuchungen von Mader, die in den erwähnten Büchern von Bollobás und Halin dargestellt sind, insbesondere jedoch in dem genannten Übersichtsartikel von Mader.

Unser erster Beweis des Satzes von Menger stammt aus Halins Buch. Der zweite ist von T. Böhme, F. Göring und J. Harant, Menger's theorem, *J. Graph Theory* **37** (2001), 35–36. Der dritte Beweis ist von T. Grünwald (später Gallai), Ein neuer Beweis eines Mengerschen Satzes, *J. Lond. Math. Soc.* **13** (1938), 188–192. Aufgrund seines konstruktiv-algorithmischen Charakters ist

der dritte Beweis der einzige, der ins Unendliche übertragbar ist; siehe dazu die englische Ausgabe dieses Buchs (ab der dritten Auflage). Ein vierter Beweis ist in Übung **13** skizziert. In Kapitel 5 wird sich noch ein fünfter Beweis als Anwendung eines Satzes über Netzwerkflüsse ergeben (Übung **3** dort). Die globale Version des Satzes von Menger (2.3.6) wurde so zuerst von Whitney (1932) formuliert und bewiesen.

Der Satz von Mader (2.4.1) ist aus W. Mader, Über die Maximalzahl kreuzungsfreier H-Wege, *Arch. Math.* **31** (1978), 387–402; einen kurzen Beweis fand A. Schrijver, *A short proof of Mader's $\mathcal{S}$-paths theorem*, *J. Comb. Theory B* **82** (2001), 319–321. Der Satz lässt sich auffassen als gemeinsame Verallgemeinerung des Satzes von Menger und des 1-Faktor-Satzes 1.2.1 von Tutte (Übung **20**).

Satz 2.5.3 ist von R. Thomas und P. Wollan, An improved linear bound for graph linkages, *Eur. J. Comb.* **26** (2005), 309–324. Mit Hilfe einer stärkeren Fassung von Lemma 2.5.4 zeigen die Autoren, dass $2k$-zusammenhängende Graphen bereits k-verbunden sind, wenn sie $\varepsilon \geqslant 5k$ erfüllen. Für Graphen mit genügend großer Taillenweite kann man auf die Bedingung an ε vollständig verzichten: wie von W. Mader, Topological subgraphs in graphs of large girth, *Combinatorica* **18** (1998), 405–412, gezeigt wurde, sind diese Graphen k-verbunden, sobald sie $2k$-zusammenhängend sind, was bestmöglich ist. (Mader nimmt für die Taillenweite eine untere Schranke an, die von k abhängt, aber dies ist unnötig; siehe D. Kühn & D. Osthus, Topological minors in graphs of large girth, *J. Comb. Theory B* **86** (2002), 364–380.) Es gibt sogar für jedes $s \in \mathbb{N}$ ein k_s mit der Eigenschaft, dass G bereits k-verbunden ist, falls $G \not\supseteq K_{s,s}$ gilt und $\kappa(G) \geqslant 2k \geqslant k_s$; siehe D. Kühn & D. Osthus, Complete minors in $K_{s,s}$-free graphs, *Combinatorica* **25** (2005) 49–64.

3 Graphen in der Ebene

Wenn wir einen Graphen auf einem Blatt Papier zeichnen, so versuchen wir natürlich, dies so übersichtlich wie möglich zu tun. Ein naheliegender Ansatz, das von den vielen Linien verursachte Wirrwar zu begrenzen, besteht darin, Kreuzungen möglichst zu vermeiden. Beispielsweise könnten wir danach fragen, ob wir einen Graphen so zeichnen können, dass verschiedene Kanten einander überhaupt nicht treffen – außer natürlich in gemeinsamen Endecken.

Graphen, die bereits in diesem Sinne kreuzungsfrei gezeichnet sind, heißen *eben*; abstrakte Graphen, die man so zeichnen *kann*, heißen *plättbar*. In diesem Kapitel untersuchen wir sowohl ebene als auch plättbare Graphen, sowie ihre Beziehung zueinander: die Frage danach, wie man einen plättbaren Graphen auf grundlegend unterschiedliche Weisen zeichnen kann.

In Abschnitt 3.1 stellen wir zunächst ein paar einfache topologische Grundtatsachen zusammen, die wir nicht beweisen. Diese wenigen Tatsachen bilden eine vollständige Basis dafür, die graphentheoretischen Sätze in den Folgeabschnitten präzise aber dann ohne technische Umstände zu beweisen. In Abschnitt 3.2 machen wir uns ein erstes Bild von den strukturellen Eigenschaften ebener Graphen. In Abschnitt 3.3 untersuchen wir, wie sich zwei Zeichnungen desselben Graphen wesentlich unterscheiden können. Das zentrale Resultat dort ist der Satz von Whitney (1932), dass 3-zusammenhängende plättbare Graphen in einem natürlichen topologischen Sinn nur eine Zeichnung haben. Die nächsten zwei Abschnitte sind den Beweisen der klassischen Planaritätskriterien gewidmet: Bedingungen, die uns verraten, wann ein abstrakter Graph plättbar ist. Wir beenden das Kapitel mit einem Abschnitt über Dualität ebener Graphen, ein Begriff mit Verbindungen zu algebraischen Eigenschaften von Graphen, aber auch zu Färbungen und Flüssen.

Traditionell formalisiert man den Begriff der Zeichnung eines Graphen in der Ebene dadurch, dass man seine Ecken auf Punkte der euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$ abbildet, und seine Kanten auf Kurven, die einander nur in gemeinsamen Endecken schneiden dürfen. Statt allgemeiner Kurven werden wir zwar als Bilder von Kanten nur stückweise geradlinige Kurven zulassen, sogenannte Polygonzüge; es ist jedoch nicht schwer zu zeigen, dass jeder im allgemeinen Sinn in der Ebene darstellbare Graph auch eine Darstellung in diesem eingeschränkten Sinne hat.

3.1 Topologische Voraussetzungen

In diesem Abschnitt sind die für den weiteren Verlauf des Kapitels nötigen topologischen Grundlagen zusammengestellt. Da deren Beweise keine Graphentheorie enthalten, geben wir sie hier nicht wieder; unser Ziel ist vielmehr, gerade diejenigen topologischen Fakten zusammenzustellen, die wir für präzise Beweise immer wieder brauchen werden aber eben nicht beweisen wollen. Später werden dann – der Leser möge dies kritisch überprüfen – alle Beweise ausschließlich aus den Definitionen und den hier wiedergegebenen Tatsachen folgen. Natürlich werden wir uns dabei von geometrischen Vorstellungen leiten lassen – doch werden wir uns nicht auf diese stützen!

Eine *Strecke* in der euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$ ist eine Punktmenge der Form $\{\, p + \lambda(q-p) \mid 0 \leqslant \lambda \leqslant 1 \,\}$, wobei p und q verschiedene Punkte der Ebene seien, die *Endpunkte* der Strecke. Ein *Polygon* ist eine Vereinigung endliche vieler Strecken im $\mathbb{R}^2$, die homöomorph ist zum Einheitskreis S^1, der Menge aller Punkte des $\mathbb{R}^2$ mit Abstand 1 vom Ursprung. (Teilmengen eines gegebenen topologischen Raumes seien grundsätzlich mit der Unterraumtopologie ausgestattet.) Eine zum Einheitsintervall $[0,1]$ homöomorphe Vereinigung P endlich vieler Strecken ist ein *Polygonzug*. Die Bilder von 0 und 1 unter einem solchen Homöomorphismus sind die *Endpunkte* des Polygonzuges P; dieser verläuft *zwischen* seinen Endpunkten und *verbindet* sie. Die anderen Punkte von P sind seine *inneren* Punkte; ihre Menge bezeichnen wir mit $\mathring{P}$. Als stetige Bilder von $[0,1]$ sind Polygonzüge, sowie endliche Vereinigungen davon, kompakt und daher abgeschlossen; ihr Komplement in $\mathbb{R}^2$ ist somit offen.

Polygon

Polygonzug

$\mathring{P}$, $\mathring{e}$

Es sei $O \subseteq \mathbb{R}^2$ offen. Durch einen Polygonzug in O verbunden zu sein definiert eine Äquivalenzrelation auf O. Die zugehörigen Äquivalenzklassen sind wieder offen; wir nennen sie die *Gebiete* von O. Eine abgeschlossene Menge $X \subseteq \mathbb{R}^2$ *trennt* ein Gebiet O' von O, wenn $O' \setminus X$ mehr als ein Gebiet hat.

Gebiet

trennt

Der *Rand* einer Menge $X \subseteq \mathbb{R}^2$ ist die Menge Y aller Punkte $y \in \mathbb{R}^2$, für die jede Umgebung von y sowohl X als auch $\mathbb{R}^2 \setminus X$ trifft. Ist X offen, so liegt sein Rand ganz in $\mathbb{R}^2 \setminus X$ (warum?).

Rand

Zwei Eigenschaften des Randes werden wir wiederholt benutzen. Die erste ist diese: ist X die Vereinigung endlich vieler Strecken und Punkte (z.B. ein ebener Graph, s.u.), f ein Gebiet von $\mathbb{R}^2 \setminus X$, und liegt $x \in X$ auf dem Rand von f, dann existiert eine Strecke zwischen x und einem Punkt in f, deren Inneres in f liegt. Das Gebiet f ist also von den Punkten seines Randes „direkt zugänglich“. Folglich sind je zwei Punkte des Randes von f durch einen Polygonzug verbindbar, dessen Inneres ganz in f liegt.

Die zweite wichtige Eigenschaft des Randes ist die folgende: ist $O \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und $\varphi\colon [0,1] \to P \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Homöomorphismus mit $\varphi(0) \in O$ und $\varphi(1) \notin O$, dann trifft P den Rand von O, und zwar mindestens im Punkt $\varphi(y)$ mit $y := \sup\{\, x \mid \varphi([0,x]) \subseteq O \,\}$. Da O offen ist, liegt $\varphi(y)$ als Randpunkt selbst nicht in O; wir nennen $\varphi(y)$ den *ersten Punkt* von P in $\mathbb{R}^2 \setminus O$.

[3.2.2] [3.2.5] [3.2.6] [3.2.7] [3.3.1] [3.5.1] [3.6.1] [4.1.2]

Satz 3.1.1. (Jordanscher Kurvensatz für Polygone)
Ist $P \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Polygon, so hat $\mathbb{R}^2 \setminus P$ genau zwei Gebiete. Jedes der beiden Gebiete hat als Rand ganz P.

Das folgende Lemma erhält man als Anwendung von Satz 3.1.1.

[3.2.6] [3.2.7] [3.2.8]

Lemma 3.1.2. *Es seien P_1, P_2, P_3 drei Polygonzüge, mit den gleichen Endpunkten aber sonst disjunkt.*

(i) *$\mathbb{R}^2 \setminus (P_1 \cup P_2 \cup P_3)$ hat genau drei Gebiete, mit Rändern $P_1 \cup P_2$, $P_2 \cup P_3$ und $P_1 \cup P_3$.*

(ii) *Ist P ein Polygonzug zwischen einem Punkt in $\mathring{P}_1$ und einem Punkt in $\mathring{P}_3$, dessen Inneres in dem Gebiet von $\mathbb{R}^2 \setminus (P_1 \cup P_3)$ liegt, das $\mathring{P}_2$ enthält, dann ist $\mathring{P} \cap \mathring{P}_2 \neq \emptyset$.*

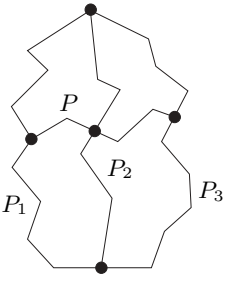


Abb. 3.1.1. Die Polygonzüge in Lemma 3.1.2 (ii)

Das folgende Lemma besagt im Wesentlichen, dass ein einzelner Polygonzug die Ebene *nicht* in zwei oder mehr Gebiete trennt; es bildet damit eine Art Gegenstück zum Jordanschen Kurvensatz. Etwas allgemeiner betrachten wir einen Polygonzug, der zwei disjunkte ebene Graphen (siehe Abschnitt 3.2) verbindet:

[3.2.2] [3.2.4]

Lemma 3.1.3. *Sind zwei disjunkte Mengen $X_1, X_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ jeweils die Vereinigung endlich vieler Punkte und Polygonzüge, und ist P ein Polygonzug zwischen einem Punkt in X_1 und einem Punkt in X_2, dessen Inneres ganz in einem Gebiet O von $\mathbb{R}^2 \setminus (X_1 \cup X_2)$ liegt, so ist $O \setminus P$ ein Gebiet von $\mathbb{R}^2 \setminus (X_1 \cup P \cup X_2)$.*

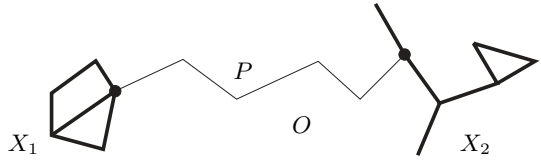


Abb. 3.1.2. Lemma 3.1.3: P trennt O nicht

Die nun folgenden Begriffe und Tatsachen brauchen wir nur an einer Stelle, bei der Betrachtung von Äquivalenzen ebener Graphen in Abschnitt 3.3.

S^n

Mit S^n bezeichnen wir wie üblich die n-dimensionale Einheitssphäre, die Menge aller Punkte des euklidischen Raums $\mathbb{R}^{n+1}$ mit Abstand 1 vom Ursprung. Die um den „Nordpol“ $(0,0,1)$ verminderte 2-dimensionale Einheitssphäre ist homöomorph zur euklidischen Ebene;

π

es sei $\pi\colon S^2 \setminus \{(0,0,1)\} \to \mathbb{R}^2$ ein fest gewählter Homöomorphismus, etwa die sogenannte stereographische Projektion. Ist $P \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Polygon und

Kreise, Gebiete auf S^2

O das beschränkte Gebiet von $\mathbb{R}^2 \setminus P$, so nennen wir $C := \pi^{-1}(P)$ einen *Kreis auf* S^2, und die Mengen $\pi^{-1}(O)$ und $S^2 \setminus \pi^{-1}(P \cup O)$ die *Gebiete* von $S^2 \setminus C$.

Unser letztes Hilfsmittel ist der Satz von Jordan und Schoenflies, in einer leicht auf unsere geplante Anwendung (im Beweis von Satz 3.3.1) zugeschnittenen Fassung:

[3.3.1]

Satz 3.1.4. *Ist $\varphi\colon C_1 \to C_2$ ein Homöomorphismus zwischen zwei Kreisen auf S^2, und ist O_1 ein Gebiet von $S^2 \setminus C_1$ und O_2 ein Gebiet von $S^2 \setminus C_2$, so ist φ zu einem Homöomorphismus $C_1 \cup O_1 \to C_2 \cup O_2$ fortsetzbar.*

3.2 Ebene Graphen

ebener Graph

Ein *ebener Graph* ist ein Paar (V, E) endlicher Mengen mit den folgenden Eigenschaften (die Elemente von V heißen wieder *Ecken*, die Elemente von E *Kanten*):

(i) $V \subseteq \mathbb{R}^2$;

(ii) jede Kante ist ein Polygonzug zwischen zwei Ecken;

(iii) verschiedene Kanten haben verschiedene Mengen von Endpunkten;

(iv) das Innere einer Kante enthält nie eine Ecke oder einen Punkt einer anderen Kante.

Ein ebener Graph (V, E) definiert in natürlicher Weise einen Graphen G auf V. Solange klar ist, was wir meinen, werden wir der Kürze halber die Bezeichnung G dieses (abstrakten) Graphen auch für den ebenen Graphen (V, E) oder die Punktmenge $V \cup \bigcup E$ verwenden; Entsprechendes gilt für abstrakte und ebene Kanten, sowie für Teilgraphen etc.[1]

Für jeden ebenen Graphen G ist $\mathbb{R}^2 \setminus G$ offen; die Gebiete von $\mathbb{R}^2 \setminus G$ nennen wir kurz die *Gebiete von* G. Da G beschränkt ist (d.h. in einer hinreichend großen Kreisscheibe D liegt), ist genau eines seiner Gebiete unbeschränkt (nämlich das $\mathbb{R}^2 \setminus D$ enthaltende Gebiet); dieses Gebiet ist das *Außengebiet* von G, die anderen Gebiete sind seine *Innengebiete*. Die Menge der Gebiete von G bezeichnen wir mit $F(G)$, den Rand eines Gebietes f mit $G[f]$.

Gebiete von G

$F(G)$

$G[f]$

Die Gebiete ebener Graphen und ihrer Teilgraphen verhalten sich zueinander wie folgt:

Lemma 3.2.1. *Ist $f \in F(G)$ und $H \subseteq G$ ein Teilgraph, so gilt:*

(i) *f ist in einem Gebiet f' von H enthalten.*

(ii) *Ist $G[f] \subseteq H$, so gilt $f' = f$.*

Beweis. (i) folgt direkt aus der Definition von „Gebiet“.

(ii) Nach der zweiten in Abschnitt 3.1 notierten Eigenschaft des Randes trifft jeder Polygonzug von f nach $f' \setminus f$ den Rand von f. □

Nach Definition ist der Rand eines Gebietes f von G stets eine Teilmenge der Punktmenge G. Als erstes substanzielles Lemma beweisen wir jetzt formal die scheinbar offensichtliche Tatsache, dass diese Teilmenge mit jedem inneren Punkt einer Kante auch den Rest dieser Kante enthält, also die Punktmenge eines Teilgraphen H von G ist. Der Beweis liefert ein paar weitere „offensichtliche“ Tatsachen gleich mit, die wir wie folgt notieren:

Lemma 3.2.2. *Es sei G ein ebener Graph und e eine Kante von G.* [3.5.1] [3.5.2]

(i) *Für jedes Gebiet f von G gilt entweder $e \subseteq G[f]$ oder $\mathring{e} \cap G[f] = \emptyset$.*

(ii) *Die Kante e liegt auf dem Rand mindestens eines und höchstens zweier Gebiete von G.*

(iii) *Liegt e auf einem Kreis $C \subseteq G$, so liegt e auf dem Rand genau zweier Gebiete von G, und diese sind in verschiedenen Gebieten von C enthalten. Liegt e auf keinem Kreis, so liegt e auf dem Rand nur eines Gebietes.*

[1] Als Hilfestellung werden wir Differenzen von Punktmengen mit $\setminus$ bezeichnen, Differenzen von Graphen aber wie bisher mit $-$.

(3.1.1)
(3.1.3)

Beweis. Wir beweisen alle drei Aussagen zusammen. Dazu zeigen wir zunächst, dass ein spezieller Punkt x_0 aus $\mathring{e}$ auf dem Rand genau eines oder genau zweier Gebiete von G liegt, und zwar genau dann auf dem Rand zweier Gebiete, wenn e auf einem Kreis liegt. Wir zeigen dann weiter, dass auch jeder andere Punkt aus $\mathring{e}$ auf dem Rand genau dieser ein oder zwei Gebiete liegt. Da jede Umgebung eines Endpunktes von e auch Umgebung eines inneren Punktes von e ist, liegen die Endpunkte von e dann auch auf dem Rand dieser Gebiete.

D_x

Da $G \setminus \mathring{e}$ kompakt ist, gibt es zu jedem Punkt $x \in \mathring{e}$ eine offene Kreisscheibe D_x mit x als Mittelpunkt, die von G nur die (ein oder zwei) Strecken trifft, die x enthalten.

x_0
S

Wir wählen zunächst irgendeinen inneren Punkt x_0 aus einer Strecke $S \subseteq e$. Dann ist $D_{x_0} \cap G = D_{x_0} \cap S$, d.h. $D_{x_0} \setminus G$ ist die Vereinigung zweier offener Halbscheiben. Da die Halbscheiben G nicht treffen, liegt jede von ihnen in einem Gebiet von G. Diese Gebiete seien mit f_1 und

f_1, f_2

f_2 bezeichnet; sie sind die einzigen Gebiete von G, auf deren Rand x_0 liegt, und möglicherweise ist $f_1 = f_2$ (Abb. 3.2.1).

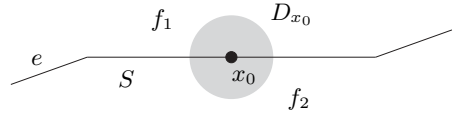


Abb. 3.2.1. Gebiete f_1, f_2 von G im Beweis von Lemma 3.2.2

Liegt e auf einem Kreis $C \subseteq G$, so trifft D_{x_0} nach Satz 3.1.1 beide Gebiete von C. Da nach Lemma 3.2.1 jedes Gebiet von G Teilmenge eines Gebiets von C ist, sind f_1 und f_2 damit in verschiedenen Gebieten von C enthalten und insbesondere selbst verschieden. Liegt e auf keinem Kreis, so ist e eine Brücke, verbindet also zwei disjunkte Punktmengen X_1, X_2 wie in Lemma 3.1.3, mit $X_1 \cup X_2 = G \setminus \mathring{e}$. Offenbar ist $f_1 \cup \mathring{e} \cup f_2$ Teilmenge eines Gebietes f von $G - e$ (warum?), und nach Lemma 3.1.3 ist $f \setminus \mathring{e}$ ein (einziges) Gebiet von G. Aus $f_1, f_2 \subseteq f \setminus \mathring{e}$ folgt aber $f_1 = f \setminus \mathring{e} = f_2$, da ja f_1 und f_2 selbst Gebiete von G sind.

x_1

Betrachten wir nun einen beliebigen weiteren Punkt $x_1 \in \mathring{e}$. Es sei

P

P der in e enthaltene Polygonzug von x_0 nach x_1. P ist kompakt und daher von endlich vielen der Scheiben D_x mit $x \in P$ überdeckt. Wir

$D_0, \dots, D_n$

numerieren diese Scheiben als $D_0, \dots, D_n$ in der natürlichen Reihenfolge ihrer Mittelpunkte auf P; durch Hinzufügung von D_{x_0} oder D_{x_1} (falls nötig) dürfen wir annehmen, dass $D_0 = D_{x_0}$ ist und $D_n = D_{x_1}$. Wie

y

man leicht mit Induktion nach n sieht, ist jeder Punkt $y \in D_n \setminus e$ durch einen Polygonzug innerhalb von $(D_0 \cup \ldots \cup D_n) \setminus e$ mit einem Punkt

z

$z \in D_0 \setminus e$ verbindbar (Abb. 3.2.2); y und z sind dann äquivalent in $\mathbb{R}^2 \setminus G$. Damit liegt aber jeder Punkt aus $D_n \setminus e$ in f_1 oder in f_2, d.h. x_1 kann nicht auf dem Rand eines anderen Gebietes von G liegen. Da beide Halbscheiben von $D_0 \setminus e$ auf diese Weise von $D_n \setminus e$ aus erreichbar

sind (tausche die Rollen von D_0 und D_n), liegt x_1 andererseits auf dem Rand sowohl von f_1 als auch von f_2. □

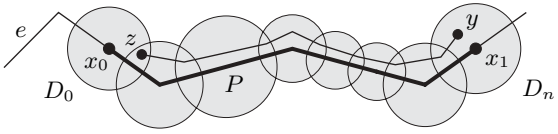


Abb. 3.2.2. Ein Polygonzug von y nach D_0 nahe bei P

Aus Lemma 3.2.2 (i) folgt, dass jedes Gebiet eines ebenen Graphen durch einen Teilgraphen berandet ist:

Korollar 3.2.3. *Für jedes Gebiet f von G ist $G[f]$ die Punktmenge eines Teilgraphen von G.* □

Wir werden die Bezeichnung $G[f]$ im Folgenden auch für diesen Teilgraphen verwenden. Nach Lemma 3.2.1 (ii) ist f auch ein Gebiet des Graphen $G[f]$; diese Tatsache werden wir im Folgenden häufig implizit verwenden. $G[f]$

Lemma 3.2.4. *Ein ebener Wald hat genau ein Gebiet.* [3.6.1]

Beweis mit Lemma 3.1.3 und Induktion nach der Kantenzahl. □ (3.1.3)

Abgesehen von einer einzigen Ausnahme haben verschiedene Gebiete eines ebenen Graphen nie den gleichen Rand:

Lemma 3.2.5. *Hat ein ebener Graph verschiedene Gebiete mit dem gleichen Rand, so ist der Graph ein Kreis.* [3.3.1]

Beweis. Es sei G ein ebener Graph, und $H \subseteq G$ der Rand zwei verschiedener Gebiete f_1, f_2 von G. Da f_1 und f_2 auch Gebiete von H sind, folgt aus Lemma 3.2.4, dass H einen Kreis C enthält: sonst wäre $f_1 = f_2$. Nach Lemma 3.2.2 (iii) sind f_1 und f_2 in verschiedenen Gebieten von C enthalten. Da f_1 und f_2 beide ganz H zum Rand haben, folgt hieraus $H = C$: jede weitere Ecke oder Kante von H läge in einem der Gebiete von C und damit nicht auf dem Rand des anderen. Damit sind f_1 und f_2 verschiedene Gebiete von C. Da C nach Satz 3.1.1 nur zwei Gebiete hat, folgt $f_1 \cup C \cup f_2 = \mathbb{R}^2$ und somit $G = C$. □ (3.1.1)

[3.3.1]
[3.4.3]
[3.5.1]
[3.5.2]

Proposition 3.2.6. *In einem 2-zusammenhängenden ebenen Graphen ist jedes Gebiet durch einen Kreis berandet.*

(2.1.1) (3.1.1) (3.1.2)

Beweis. Es sei f ein Gebiet eines 2-zusammenhängenden ebenen Graphen G. Wir zeigen mit Induktion nach $|G|$, dass $G[f]$ ein Kreis ist. Ist G selbst ein Kreis, so gilt dies nach Satz 3.1.1; wir nehmen daher an, dass G kein Kreis ist.

Nach Proposition 2.1.1 ist G die Vereinigung eines ebenen 2-zusammenhängenden Teilgraphen $H \subseteq G$ mit einem ebenen H-Weg P. Das Innere von P liegt in einem Gebiet f' von H, welches nach Induktionsannahme durch einen Kreis $C \subseteq H$ berandet ist.

Ist f auch ein Gebiet von H, so sind wir nach Induktionsannahme fertig. Anderenfalls trifft nach Lemma 3.2.1 (ii) der Rand von f das Innere von P; damit ist dann $f \subseteq f'$ und $G[f] \subseteq C \cup P$. Nach Lemma 3.2.1 (ii) ist f dann auch ein Gebiet von $C \cup P$ und somit nach Lemma 3.1.2 (i) von einem Kreis berandet. □

Ist ein ebener Graph sogar 3-zusammenhängend, so können wir die Gebietsränder unter seinen Kreisen rein kombinatorisch beschreiben, d.h. ohne Bezug auf topologische Begriffe wie Rand und Ebene:

[3.3.2] [3.5.2]

Proposition 3.2.7. *Die Gebietsränder eines 3-zusammenhängenden ebenen Graphen sind genau seine nicht trennenden induzierten Kreise.*

(2.3.6) (3.1.1) (3.1.2)

Beweis. Es sei G ein 3-zusammenhängender ebener Graph, und $C \subseteq G$. Ist C ein nicht trennender induzierter Kreis, so können nach dem Jordanschen Kurvensatz nicht beide Gebiete von C Punkte von $G \setminus C$ enthalten. Somit ist C ein Gebietsrand von G.

C, f

Nehmen wir nun umgekehrt an, dass C ein Gebiet f von G berandet. Nach Proposition 3.2.6 ist C dann ein Kreis. Hat C eine Sehne $e = xy$, so sind die Komponenten von $C - \{x, y\}$ durch einen C-Weg in G verbunden, denn G ist ja 3-zusammenhängend. Dieser Weg und die Kante e verlaufen beide durch das andere Gebiet von C (nicht durch f), jedoch ohne einander zu treffen. Dies widerspricht Lemma 3.1.2 (ii).

Es bleibt zu zeigen, dass C keine zwei Ecken $x, y \in G - C$ trennt. Nach dem Satz von Menger (2.3.6) sind x und y in G durch drei kreuzungsfreie Wege verbunden. In einem Gebiet der Vereinigung dieser Wege liegt f, doch ist dieses Gebiet nach Lemma 3.1.2 (i) durch lediglich zwei der Wege berandet. Der dritte Weg vermeidet daher f und seinen Rand C. □

maximal eben

Ein ebener Graph G heißt *maximal eben*, wenn wir ihn nicht durch Hinzufügung einer neuen (ebenen) Kante zu einem ebenen Graphen $G' \supsetneq G$ mit $V(G') = V(G)$ erweitern können. G heißt *ebener Dreiecksgraph*, wenn jedes seiner Gebiete durch einen K^3 berandet ist.

ebener Dreiecksgraph

Proposition 3.2.8. *Ein ebener Graph der Ordnung $\geqslant 3$ ist genau dann maximal eben, wenn er ein ebener Dreiecksgraph ist.* [3.4.1] [4.4.2]

Beweis. Es sei G ein ebener Graph der Ordnung $\geqslant 3$. Ist jedes Gebiet von G durch ein Dreieck berandet, so ist G maximal eben. Denn jede zusätzliche Kante e hätte ihr Inneres in einem Gebiet von G und ihre Endpunkte auf dem Rand dieses Gebietes. Da dieser Rand als Dreieck ein vollständiger Graph ist, sind diese Endpunkte bereits in G benachbarte Ecken, d.h. $G \cup e$ genügt nicht der Bedingung (iii) aus der Definition ebener Graphen. (3.1.2)

Umgekehrt sei nun G maximal eben und $f \in F(G)$ ein Gebiet; es sei $H := G[f]$. Wegen der Maximalität von G als ebener Graph ist $G[H]$ vollständig: zu nicht benachbarten Ecken $x, y \in H$ gäbe es einen Polygonzug P zwischen x und y mit $\mathring{P} \subseteq f$, und wir könnten P als neue Kante zu G hinzunehmen. Wir haben somit $G[H] = K^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$, wissen aber noch nicht, welche Kanten von $G[H]$ auch in H liegen. f H n

Zeigen wir zunächst, dass H einen Kreis enthält. Enthält H keinen Kreis, so gilt einerseits $G \setminus H \neq \emptyset$: wegen $G \supseteq K^n$ falls $n \geqslant 3$, und wegen $|G| \geqslant 3$ sonst. Andererseits gilt nach Lemma 3.2.4 dann aber auch $f \cup H = \mathbb{R}^2$ (da f auch ein Gebiet von $G[f] = H$ ist), ein Widerspruch.

Da H einen Kreis enthält, reicht es, $n \leqslant 3$ zu zeigen: daraus folgt dann $H = K^3$ wie behauptet. Nehmen wir also $n \geqslant 4$ an; es sei $C = v_1v_2v_3v_4v_1$ ein Kreis in $G[H]$ $(= K^n)$. Wegen $C \subseteq G$ liegt f in einem Gebiet f_C von C; es sei f'_C das andere Gebiet von C. Da v_1 und v_3 auf dem Rand von f liegen, sind diese beiden Ecken dann durch einen Polygonzug verbindbar, dessen Inneres in f_C liegt und G vermeidet. Nach Lemma 3.1.2 (ii) verläuft die ebene Kante v_2v_4 von $G[H]$ daher nicht durch f_C sondern durch f'_C (Abb. 3.2.3). Analog verläuft wegen $v_2, v_4 \in G[f]$ auch die Kante v_1v_3 durch f'_C. Da die ebenen Kanten v_1v_3 und v_2v_4 disjunkt sind, ergibt dies einen Widerspruch zu Lemma 3.1.2 (ii). □ C, v_i f_C, f'_C

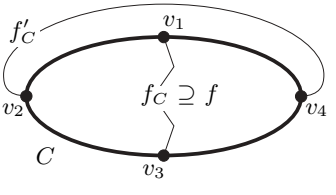


Abb. 3.2.3. Die Kante v_2v_4 von G verläuft durch das Gebiet f'_C

Satz 3.2.9. (Eulersche Polyederformel für die Ebene)
Ist G ein zusammenhängender ebener Graph mit $n \geqslant 1$ Ecken, m Kanten und ℓ Gebieten, so gilt

$$n - m + \ell = 2\,.$$

(0.5.1)
(0.5.3)

Beweis. Zu gegebenem n wenden wir Induktion nach m an. Für $m \leqslant n-1$ ist G ein Baum und $m = n-1$ (warum?); die Behauptung folgt dann aus Lemma 3.2.4.

e
G'
f_1, f_2
f_e

Es sei also $m \geqslant n$. Dann hat G eine Kante e, die auf einem Kreis in G liegt; es sei $G' := G - e$. Nach Lemma 3.2.2 (iii) liegt e auf dem Rand genau zweier Gebiete f_1, f_2 von G, und da je zwei Punkte von $\mathring{e}$ in $\mathbb{R}^2 \setminus G'$ äquivalent sind, liegt $\mathring{e}$ in einem Gebiet f_e von G'. Wir zeigen

$$F(G) \setminus \{f_1, f_2\} = F(G') \setminus \{f_e\}\,; \tag{$*$}$$

damit hat G' dann zahlenmäßig sowohl genau ein Gebiet als auch eine Kante weniger als G, und die Behauptung des Satzes folgt aus der Induktionsannahme für G'.

Zum Beweis von $(*)$ sei zunächst $f \in F(G) \setminus \{f_1, f_2\}$ gegeben. Nach Lemma 3.2.2 (i) gilt $G[f] \subseteq G \setminus \mathring{e} = G'$, und daher $f \in F(G')$ nach Lemma 3.2.1 (ii). Da offenbar $f \neq f_e$ ist, folgt die erste Inklusion in $(*)$.

Umgekehrt sei nun ein Gebiet $f' \in F(G') \setminus \{f_e\}$ gegeben. Offenbar gilt $f' \neq f_1, f_2$ und $f' \cap \mathring{e} = \emptyset$. Je zwei Punkte aus f' liegen somit in $\mathbb{R}^2 \setminus G$ und sind dort äquivalent. Dann hat G ein Gebiet $f \supseteq f'$, welches nach Lemma 3.2.1 (i) seinerseits in einem Gebiet f'' von G' enthalten ist. Es folgt $f' \subseteq f \subseteq f''$, und damit $f' = f = f''$. □

[3.4.1]
[4.1.2]
[6.3.5]

Korollar 3.2.10. *Ein ebener Graph mit $n \geqslant 3$ Ecken hat höchstens $3n-6$ Kanten. Jeder ebene Dreiecksgraph mit n Ecken hat $3n-6$ Kanten.*

Beweis. Nach Proposition 3.2.8 reicht es, die zweite Aussage zu beweisen. In einem ebenen Dreiecksgraphen G ist jedes Gebiet von genau drei Kanten berandet, und jede Kante liegt auf dem Rand genau zweier Gebiete (Lemma 3.2.2). Der bipartite Graph auf $E(G) \cup F(G)$ mit der Kantenmenge $\{\, ef \mid e \subseteq G[f] \,\}$ hat somit genau $2\,|E(G)| = 3\,|F(G)|$ Kanten. Setzen wir entsprechend dieser Identität in der Eulerformel $2m/3$ für ℓ ein, so erhalten wir $m = 3n-6$. □

Die Eulersche Polyederformel zeigt häufig, dass gewisse Graphen nicht als ebene Graphen auftreten können: ein K^5 etwa hat $10 > 3 \cdot 5 - 6$ Kanten und kann somit nach Korollar 3.2.10 kein ebener Graph sein.

Ähnlich folgt, dass ein ebener Graph G nicht isomorph zu $K_{3,3}$ sein kann. Da nämlich $K_{3,3}$ 2-zusammenhängend ist aber kein Dreieck enthält, wäre sonst jedes Gebiet von G durch einen Kreis der Länge $\geqslant 4$ berandet (Proposition 3.2.6). Wie im Beweis von Korollar 3.2.10 wäre damit $2m \geqslant 4\ell$, was bei Einsetzung in die Polyederformel $m \leqslant 2n-4$ ergibt; ein $K_{3,3}$ hat jedoch $9 > 2 \cdot 6 - 4$ Kanten.

Mit K^5 und $K_{3,3}$ können natürlich auch deren Unterteilungen nicht als ebene Graphen auftreten. Damit gilt:

Korollar 3.2.11. *Kein ebener Graph enthält einen K^5 oder $K_{3,3}$ als topologischen Minor.* □ [3.4.5] [3.4.6]

In Abschnitt 3.4 werden wir sehen, dass diese unscheinbare und beiläufig anmutende Eigenschaft ebener Graphen diese von allen anderen Graphen unterscheidet: der dort bewiesene Satz von Kuratowski besagt, dass wir einen Graphen genau dann in der Ebene zeichnen können, wenn er weder K^5 noch $K_{3,3}$ als topologischen Minor enthält.

3.3 Zeichnungen

Einbettung in die Ebene

Eine *Einbettung in die Ebene* eines (abstrakten) Graphen G ist ein Isomorphismus zwischen G und einem ebenen Graphen H. Den ebenen Graphen H selbst nennen wir dann eine *Zeichnung* von G; wir werden die Ecken und Kanten von G und von H jedoch bezeichnungsmäßig nicht immer streng auseinanderhalten. In diesem Abschnitt untersuchen wir, wie sich zwei Einbettungen in die Ebene desselben Graphen unterscheiden können.

Zeichnung

Wie sollten wir die Ähnlichkeit zweier Einbettungen $\rho\colon G \to H$ und $\rho'\colon G \to H'$ eines plättbaren Graphen G messen? Eine naheliegende Weise, dies zu tun, liegt in einer Betrachtung des Isomorphismus $\sigma := \rho' \circ \rho^{-1}$ zwischen H und H'. Nach Definition eines Graphenisomorphismus[2] überträgt σ alle Merkmale der abstrakten Graphen H und H'. Doch können wir fragen, welche topologischen Merkmale der Lage von H in der Ebene zusätzlich durch σ erhalten werden. Wird σ beispielsweise einfach von einer Rotation der Ebene induziert, so werden wir ρ und ρ' kaum als wesentlich verschieden auffassen; erhält σ jedoch nicht einmal die Eigenschaft von Kreisen, ein Gebiet zu beranden, vermutlich schon.

σ

Betrachten wir also einen beliebigen („abstrakten“) Isomorphismus $\sigma\colon V \to V'$ zwischen zwei ebenen Graphen $H = (V, E)$ und $H' = (V', E')$, sagen wir mit Gebietsmengen $F(H) =: F$ und $F(H') =: F'$. Unser Ziel ist, zu messen, inwieweit σ auch Eigenschaften von H und H' als ebene Graphen erhält. Im Folgenden werden wir dafür drei Kriterien von abnehmender Stärke diskutieren. Wir werden jedoch beweisen, dass die drei Kriterien für die meisten Graphen übereinstimmen. Angewandt auf den oben betrachteten Isomorphismus $\sigma = \rho' \circ \rho^{-1}$ werden alle drei Kriterien besagen, dass es im Wesentlichen nur eine Art gibt, einen 3-zusammenhängenden Graphen zu zeichnen.

$H;\ V, E, F$
$H'; V', E', F'$

Unser erstes Kriterium ist vielleicht das natürlichste. Anschaulich möchten wir σ „topologisch“ nennen, wenn es induziert wird durch einen Homöomorphismus der Ebene auf sich selbst. Um den Außengebieten von H und H' keine Sonderrolle zukommen zu lassen, gehen wir einen

[2] ... und des Wortes „abstrakt“

π

topologischer Isomorphismus

Umweg über unseren in Abschnitt 3.1 fest gewählten Homöomorphismus $\pi\colon S^2 \setminus \{(0,0,1)\} \to \mathbb{R}^2$: wir nennen σ einen *topologischen Isomorphismus* der ebenen Graphen H und H', wenn es einen Homöomorphismus $\varphi\colon S^2 \to S^2$ gibt, so dass $\psi := \pi \circ \varphi \circ \pi^{-1}$ auf $V \cup E$ gerade σ induziert. (Formal: auf V soll ψ mit σ übereinstimmen, und jede ebene Kante $e \in H$ soll ψ auf die ebene Kante $\sigma(e) \in H'$ abbilden. Sofern φ nicht zufällig den Punkt $(0,0,1)$ fest lässt, wird ψ an der Stelle $\pi(\varphi^{-1}(0,0,1))$ undefiniert sein.)

Bis auf topologische Isomorphie sind Innen- und Außengebiete damit in der Tat nicht mehr zu unterscheiden: wählen wir φ als eine Rotation von S^2, die das π^{-1}-Bild eines Punktes aus einem Innengebiet von H auf den Nordpol $(0,0,1)$ von S^2 abbildet, so bildet ψ den Rest dieses Gebietes auf das Außengebiet von $\psi(H)$ ab.[3]

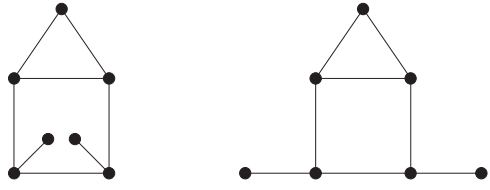


Abb. 3.3.1. Zwei topologisch nicht isomorphe Zeichnungen des gleichen Graphen

Ist σ ein topologischer Isomorphismus wie oben, so bildet ψ die Gebiete von H auf die Gebiete von H' ab[4] (Beweis?). Damit induziert σ, das ja bereits Ecken auf Ecken und Kanten auf Kanten abbildet, auch eine Bijektion $\sigma\colon F \to F'$. Die erweiterte Bijektion erhält überdies die Inzidenz der Gebiete mit ihren Rändern: für jedes Gebiet f von H ist $\sigma(H[f])$ der Rand von $\sigma(f)$ in H'.

kombinatorischer Isomorphismus

Diese Eigenschaft eines topologischen Isomorphismus erheben wir zur Definition unseres zweiten Kriteriums dafür, wie gut ein abstrakter Isomorphismus zwischen ebenen Graphen ihre Lage in der Ebene widerspiegelt: wir nennen σ einen *kombinatorischen Isomorphismus* der ebenen Graphen H und H', wenn es sich zu einer Bijektion $\sigma\colon V \cup E \cup F \to V' \cup E' \cup F'$ fortsetzen lässt, die nicht nur die Inzidenzen von Ecken mit Kanten sondern auch die Inzidenzen von Ecken und Kanten mit Gebieten respektiert. (Formal: eine Ecke oder Kante x von H soll genau dann auf dem Rand eines Gebietes f liegen, wenn $\sigma(x)$ auf dem Rand des Gebietes $\sigma(f)$ liegt.)

---

[3] Damit die Kanten von $\psi(H)$ wieder Polygonzüge werden, muss man φ jedoch im Allgemeinen ein wenig nachbessern.

[4] abgesehen möglicherweise von einem fehlenden Punkt jeweils dort, wo S^2 den Nordpol hat

Abb. 3.3.2. H und H' sind kombinatorisch isomorph, aber nicht topologisch – warum nicht?

Ist σ ein kombinatorischer Isomorphismus der ebenen Graphen H und H', so bildet σ insbesondere die Gebietsränder von H und H' aufeinander ab. Dies gibt Anlass zu unserem dritten Ähnlichkeitskriterium zweier Zeichnungen eines Graphen: wir nennen σ einen *graphentheoretischen Isomorphismus* der ebenen Graphen H und H', wenn folgendes gilt:

graphentheoretischer Isomorphismus

$$\big\{\, \sigma(H[f]) : f \in F \,\big\} = \big\{\, H'[f'] : f' \in F' \,\big\}.$$

Mit anderen Worten, wir verfolgen jetzt nicht mehr, *welches* Gebiet von einem gegebenem Teilgraphen berandet wird, sondern fragen nur noch, ob ein solches Gebiet existiert: solange σ diejenigen Teilgraphen aufeinander abbildet, die überhaupt als Gebietsränder auftreten, erfüllt es die obige Definition.

Dieses dritte Ähnlichkeitskriterium mag etwas weniger natürlich erscheinen als die beiden ersten. Sein Vorteil ist jedoch, dass es einerseits formal am schwächsten und daher am leichtesten nachzuweisen ist, sich andererseits jedoch zur kombinatorischen Isomorphie (und meist auch zur topologischen Isomorphie) als äquivalent erweisen wird.

Wie bereits bemerkt, ist jeder topologische Isomorphismus zweier ebener Graphen auch kombinatorisch, und jeder kombinatorische Isomorphismus auch graphentheoretisch. Mit einer kleinen Einschränkung gilt auch die Umkehrung:

Satz 3.3.1.

(i) *Jeder graphentheoretische Isomorphismus zwischen zwei ebenen Graphen ist kombinatorisch; seine Fortsetzung zu einer Gebietsbijektion ist genau dann eindeutig bestimmt, wenn der Graph kein Kreis ist.*

(ii) *Jeder kombinatorische Isomorphismus zwischen zwei 2-zusammenhängenden ebenen Graphen ist topologisch.*

(3.1.1) (3.1.4) (3.2.5) (3.2.6)

Beweis. Es seien $H = (V, E)$ und $H' = (V', E')$ zwei ebene Graphen, $F(H) =: F$ und $F(H') =: F'$, und $\sigma\colon V \cup E \to V' \cup E'$ ein Isomorphismus der zugrundeliegenden abstrakten Graphen.

(i) Ist H ein Kreis, so folgt die Aussage aus dem Jordanschen Kurvensatz. Im Folgenden sei nun H kein Kreis. Es sei $\mathcal{D}$ die Menge aller

Gebietsränder in H und $\mathcal{D}'$ die Menge aller Gebietsränder in H'. Ist σ ein graphentheoretischer Isomorphismus, so ist die Abbildung $D \mapsto \sigma(D)$ eine Bijektion zwischen $\mathcal{D}$ und $\mathcal{D}'$. Nach Lemma 3.2.5 ist die Abbildung $f \mapsto H[f]$ eine Bijektion zwischen F und $\mathcal{D}$; Entsprechendes gilt für F' und $\mathcal{D}'$. Die Hintereinanderausführung dieser drei Bijektionen ist eine Bijektion zwischen F und F', und diese Bijektion wählen wir als $\sigma\colon F \to F'$. Nach Konstruktion erhält diese Fortsetzung von σ auf $V \cup E \cup F$ Inzidenzen (und ist mit dieser Eigenschaft eindeutig bestimmt); damit ist σ als kombinatorischer Isomorphismus erwiesen.

σ

(ii) Angenommen, H sei 2-zusammenhängend und σ ein kombinatorischer Isomorphismus. Wir haben einen Homöomorphismus $\varphi\colon S^2 \to S^2$ zu konstruieren, der für jede Ecke oder ebene Kante $x \in H$ gerade $\pi^{-1}(x)$ auf $\pi^{-1}(\sigma(x))$ abbildet. Da σ ein kombinatorischer Isomorphismus ist,

$\tilde{\sigma}$

ist $\tilde{\sigma}\colon \pi^{-1} \circ \sigma \circ \pi$ eine inzidenzerhaltende Bijektion der Ecken, Kanten und Gebiete[5] von $\tilde{H} := \pi^{-1}(H)$ auf die Ecken, Kanten und Gebiete von $\tilde{H}' := \pi^{-1}(H')$.

$\tilde{H}, \tilde{H}'$

$$\begin{array}{ccc} S^2 \supseteq \tilde{H} & \xrightarrow{\tilde{\sigma}} & \tilde{H}' \subseteq S^2 \\ \pi\downarrow & & \downarrow\pi \\ \mathbb{R}^2 \supseteq H & \xrightarrow[\sigma]{} & H' \subseteq \mathbb{R}^2 \end{array}$$

Abb. 3.3.3. Die Definition von $\tilde{\sigma}$ über σ

Wir konstruieren φ in drei Schritten. Zunächst definieren wir φ auf der Menge der Ecken von $\tilde{H}$, als $\varphi(x) := \tilde{\sigma}(x)$ für alle $x \in V(\tilde{H})$. Dies ist trivialerweise ein Homöomorphismus von $V(\tilde{H})$ nach $V(\tilde{H}')$.

Im zweiten Schritt setzen wir φ jetzt zu einem Homöomorphismus zwischen $\tilde{H}$ und $\tilde{H}'$ fort, der auf $V(\tilde{H}) \cup E(\tilde{H})$ gerade $\tilde{\sigma}$ induziert. Dies tun wir Kante für Kante: jede Kante xy von $\tilde{H}$ ist homöomorph zur Kante $\tilde{\sigma}(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$ von $\tilde{H}'$, und zwar vermöge eines Homöomorphismus, der x auf $\varphi(x)$ und y auf $\varphi(y)$ abbildet. Die Vereinigung all dieser Homöomorphismen – einer für jede Kante von $\tilde{H}$ – ist dann in der Tat ein Homöomorphismus zwischen $\tilde{H}$ und $\tilde{H}'$, unsere gesuchte Fortsetzung von φ auf $\tilde{H}$: lediglich die Stetigkeit an den Klebestellen, den Ecken, ist zu überprüfen, und die folgt aus unserer Annahme, dass sowohl den beiden Graphen als auch den einzelnen Kanten jeweils die Unterraumtopologie des $\mathbb{R}^3$ zugrundeliegt.

[5] Als Ecken, Kanten und Gebiete von $\tilde{H}$ und $\tilde{H}'$ bezeichnen wir die Bilder unter π^{-1} der Ecken, Kanten und Gebiete von H bzw. H' – mit der offensichtlichen Ergänzung eines Gebietes $\pi^{-1}(f)$ um den Punkt $(0,0,1)$, wenn f Außengebiet ist. Entsprechend sind $V(\tilde{H})$, $E(\tilde{H})$, $F(\tilde{H})$ usw. definiert; Inzidenzen seien wie durch H und H' induziert.

Im dritten Schritt setzen wir nun den Homöomorphismus $\varphi\colon \tilde{H} \to \tilde{H}'$ auf ganz S^2 fort. Dies tun wir analog zum zweiten Schritt, Gebiet für Gebiet. Nach Proposition 3.2.6 sind die Ränder aller Gebiete von $\tilde{H}$ und von $\tilde{H}'$ Kreise. Ist nun f ein Gebiet von $\tilde{H}$ und C sein Rand, so ist $\tilde{\sigma}(C) := \bigcup\{\, \tilde{\sigma}(e) \mid e \in E(C) \,\}$ der Rand des Gebietes $\tilde{\sigma}(f)$ von $\tilde{H}'$. Nach Satz 3.1.4 können wir den bereits definierten Homöomorphismus $\varphi\colon C \to \tilde{\sigma}(C)$ zu einem Homöomorphismus von $C \cup f$ nach $\tilde{\sigma}(C) \cup \tilde{\sigma}(f)$ fortsetzen. Wir definieren dann $\varphi\colon S^2 \to S^2$ als die Vereinigung all dieser Homöomorphismen, einem für jedes Gebiet f von $\tilde{H}$. Wie oben zeigt man leicht, dass φ in der Tat ein Homöomorphismus ist. □

Kehren wir nun zu unserem ursprünglichen Ziel zurück, der Definition von Äquivalenz für Einbettungen in die Ebene. Wir nennen zwei Einbettungen ρ, ρ' eines Graphen G in die Ebene *topologisch* bzw. *kombinatorisch äquivalent*, wenn $\rho' \circ \rho^{-1}$ ein topologischer bzw. kombinatorischer Isomorphismus zwischen $\rho(G)$ und $\rho'(G)$ ist. Ist G 2-zusammenhängend, und fallen die beiden Isomorphiebegriffe somit nach Satz 3.3.1 zusammen, so sprechen wir einfach von *äquivalenten* Einbettungen. Man prüft leicht nach, dass dies in der Tat für jeden Graphen eine Äquivalenzrelation auf der Menge seiner Einbettungen in die Ebene ist.

äquivalente Einbettungen

Beachte, dass auch zwei Zeichnungen von G aus nicht äquivalenten Einbettungen durchaus topologisch isomorph sein können (Übung): zur Äquivalenz zweier Einbettungen ist nicht nur verlangt, dass irgendein (kombinatorischer bzw. topologischer) Isomorphismus zwischen ihren Bildern existieren soll, sondern dass der „kanonische“ Isomorphismus $\rho' \circ \rho^{-1}$ kombinatorisch bzw. topologisch ist.

Selbst in diesem starken Sinne haben 3-zusammenhängende Graphen bis auf Äquivalenz nur eine Einbettung:

Satz 3.3.2. (Whitney 1932)
Je zwei Einbettungen eines 3-zusammenhängenden Graphen in die Ebene sind äquivalent.

Beweis. Es sei G ein 3-zusammenhängender Graph mit Einbettungen $\rho\colon G \to H$ und $\rho'\colon G \to H'$ in die Ebene. Nach Satz 3.3.1 reicht es zu zeigen, dass $\rho' \circ \rho^{-1}$ ein graphentheoretischer Isomorphismus zwischen H und H' ist, d.h. dass für jeden Teilgraphen $C \subseteq G$ genau dann $\rho(C)$ ein Gebiet von H berandet, wenn $\rho'(C)$ ein Gebiet von H' berandet. Dies jedoch folgt sofort aus Proposition 3.2.7. (3.2.7) □

3.4 Plättbarkeit: der Satz von Kuratowski

plättbar

maximal plättbar

Ein Graph G heißt *plättbar*, wenn er in die Ebene einbettbar ist, also isomorph ist zu einem ebenen Graphen. G heißt *maximal plättbar*, wenn G plättbar ist, aber $G+e$ für jede neue Kante e nicht mehr plättbar ist. Jede Zeichnung eines maximal plättbaren Graphen G ist offenbar maximal eben: wir können keine bisher nicht benachbarten Ecken durch einen zusätzlichen Polygonzug verbinden, der alle anderen ebenen Kanten und Ecken vermeidet.

Interessanterweise gilt auch die Umkehrung, d.h. ein ebener Graph ist nie nur deshalb maximal eben, weil er zufällig schlecht gezeichnet ist:

Proposition 3.4.1.

(i) *Jeder maximal ebene Graph ist maximal plättbar.*

(ii) *Ein plättbarer Graph mit $n \geqslant 3$ Ecken ist genau dann maximal plättbar, wenn er $3n-6$ Kanten hat.*

(3.2.8) (3.2.10)

Beweis mit Proposition 3.2.8 und Korollar 3.2.10. □

Welche Graphen sind plättbar? Wie wir bereits in Korollar 3.2.11 sahen, kann kein plättbarer Graph einen K^5 oder $K_{3,3}$ als topologischen Minor enthalten. In diesem Abschnitt beweisen wir den erstaunlichen Satz von Kuratowski, dass auch die Umkehrung gilt: enthält ein Graph keinen TK^5 oder $TK_{3,3}$, so ist er plättbar – im 3-zusammenhängenden Fall sogar mit einer Zeichnung, in der jedes Innengebiet konvex ist (Übung).

Statt topologischer Minoren kann man aufgrund des folgenden Lemmas auch gewöhnliche Minoren betrachten:

Lemma 3.4.2. *Ein Graph enthält genau dann einen K^5 oder $K_{3,3}$ als Minor, wenn er einen K^5 oder $K_{3,3}$ als topologischen Minor enthält.*

(0.7.2)

Beweis. Aufgrund von Proposition 0.7.2 reicht es zu zeigen, dass jeder Graph G mit einem K^5-Minor auch einen $K_{3,3}$ als Minor oder einen K^5 als topologischen Minor enthält. Es gelte also $G \succcurlyeq K^5$, und $K \subseteq G$ sei ein minimaler Teilgraph, der ein MK^5 ist. Jede Verzweigungsmenge von K induziert dann einen Baum in K, und zwischen je zwei Verzweigungsmengen hat K genau eine Kante. Fügen wir zu einem von einer Verzweigungsmenge V_x induzierten Baum die vier von dieser zu den anderen Verzweigungsmengen führenden Kanten hinzu, so erhalten wir wieder einen Baum, T_x. Wegen der Minimalität von K ist T_x ein Baum mit genau vier Blättern. Ist jeder solche Baum T_x ein $TK_{1,4}$, so ist K ein TK^5 und wir sind fertig. Ist einer der T_x kein $TK_{1,4}$, so enthält er genau zwei Ecken des Grades 3. Kontrahieren wir V_x auf diese beiden Ecken und jede andere Verzweigungsmenge auf eine Ecke, so enthält der entstandene 6-eckige Graph einen $K_{3,3}$ (Abb. 3.4.1). Damit gilt $G \succcurlyeq K_{3,3}$, wie gewünscht. □

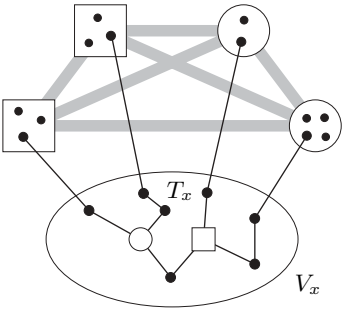


Abb. 3.4.1. Jeder MK^5 enthält einen TK^5 oder $MK_{3,3}$

Wir beweisen den Satz von Kuratowski zunächst für 3-zusammenhängende Graphen:

Lemma 3.4.3. *Ist ein Graph G 3-zusammenhängend, und enthält G weder einen K^5 noch einen $K_{3,3}$ als Minor, so ist G plättbar.*

Beweis. Wir wenden Induktion nach $|G|$ an. Für $|G| = 4$ ist $G = K^4$ und die Aussage richtig. Es sei nun $|G| > 4$, und die Aussage sei wahr für kleinere Graphen. Nach Lemma 2.2.1 hat G eine Kante xy mit der Eigenschaft, dass G/xy wieder 3-zusammenhängend ist. Auch G/xy enthält dann weder einen K^5 noch einen $K_{3,3}$ als Minor. Nach Induktionsannahme ist G/xy plättbar; es sei $\tilde{G}$ eine Zeichnung von G/xy. Weiter sei f das Gebiet von $\tilde{G} - v_{xy}$, das den Punkt v_{xy} enthält, und C der Rand von f. Wir setzen $X := N_G(x) \setminus \{y\}$ und $Y := N_G(y) \setminus \{x\}$; wegen $v_{xy} \in f$ gilt $X \cup Y \subseteq V(C)$.

(2.2.1) (3.2.6) xy $\tilde{G}$ f, C X, Y

Da $\tilde{G}$ 3-zusammenhängend ist, ist $\tilde{G} - v_{xy}$ 2-zusammenhängend. Nach Proposition 3.2.6 ist C somit ein Kreis; es seien $x_1, \dots, x_k$ die Ecken aus X in natürlicher Reihenfolge entlang C, und $P_i = x_i \dots x_{i+1}$ ihre Verbindungswege auf C in dieser Reihenfolge (mit $x_{k+1} := x_1$). Wir setzen

$x_1, \dots, x_k$ P_i

$$\tilde{G}' := \tilde{G} - \{\, v_{xy}v \mid v \in Y \setminus X \,\}. \qquad \tilde{G}'$$

Offenbar können wir $\tilde{G}'$ auch als Zeichnung von $G - y$ deuten, in der x durch den Punkt von v_{xy} dargestellt ist (Abb. 3.4.2). Unser Ziel ist es, auch y in dieser Zeichnung unterzubringen und sie so zu einer Zeichung von ganz G zu ergänzen.

Dazu zeigen wir zunächst, dass es ein i gibt mit $Y \subseteq V(P_i)$. Angenommen nicht. Hat y einen Nachbarn y' im Innern eines P_i, dann hat es einen weiteren Nachbarn y'' in $C - P_i$, und y', y'' werden in C von $x' := x_i$ und $x'' := x_{i+1}$ getrennt. Ist andererseits $Y \subseteq X$ und $|Y \cap X| \leqslant 2$, dann hat y genau zwei Nachbarn y', y'' auf C (aber nicht im gleichen P_i), die wiederum von zwei Ecken $x', x'' \in X$ in C getrennt werden. In beiden Fällen sind x, y', y'' und y, x', x'' die Verzweigungsecken eines $TK_{3,3}$ in G, ein Widerspruch. Es bleibt der Fall, dass y und

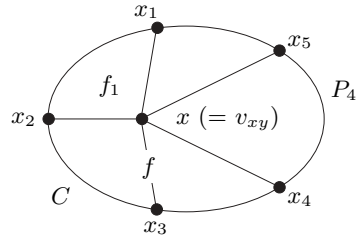


Abb. 3.4.2. $\tilde{G}'$ als Zeichnung von $G - y$: die Ecke x ist durch den Punkt v_{xy} dargestellt

x drei gemeinsame Nachbarn auf C haben. Mit diesen bilden sie dann einen TK^5 in G, ebenfalls ein Widerspruch.

Es sei jetzt i mit $Y \subseteq P_i$ fest gewählt. Die Punktmenge $C \setminus P_i$ ist
C_i in einem der beiden Gebiete des Kreises $C_i := xx_iP_ix_{i+1}x$ enthalten; das
f_i *andere* Gebiet von C_i bezeichnen wir mit f_i. Da f_i Punkte aus f enthält (etwa nahe bei x) aber keine Punkte aus C, gilt $f_i \subseteq f$. Da die ebenen Kanten xx_j mit $j \notin \{i, i+1\}$ jeweils C_i nur in x treffen aber in $C \setminus P_i$ enden, enthält f_i dann auch keinen Punkt einer solchen Kante. Es gilt also $f_i \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus \tilde{G}'$, d.h. f_i ist in einem Gebiet von $\tilde{G}'$ enthalten (und dann gleich diesem Gebiet, was wir aber nicht benötigen). Wir können nun wie geplant $\tilde{G}'$ zu einer Zeichnung von G ergänzen, indem wir y und die mit y inzidenten Kanten in f_i einbetten. □

Es ist nicht schwer, Lemma 3.4.3 induktiv auf Graphen G mit $\kappa(G) \leqslant 2$ zu erweitern, und damit zu einem vollständigen Beweis des Satzes von Kuratowski: man nimmt an, dass G (ohne K^5- oder $K_{3,3}$-Minor) durch höchstens zwei Ecken trennbar ist und kombiniert nach Induktionsannahme existierende Zeichnungen der Teile zu einer Zeichnung von ganz G (Übung). Die genaue Durchführung dieses (Standard-) Ansatzes erfordert jedoch eine ganze Reihe elementartopologischer Argumente, die den folgenden kombinatorischeren Weg als interessante Alternative erscheinen lassen.

[6.3.1] **Lemma 3.4.4.** *Es sei $\mathcal{X}$ eine Menge 3-zusammenhängender Graphen. Weiter sei G ein Graph, sowie $\{V_1, V_2\}$ eine echte Teilung von G der Ordnung $\kappa(G) \leqslant 2$. Ist G kantenmaximal ohne topologischen Minor in $\mathcal{X}$, dann sind auch $G_1 := G[V_1]$ und $G_2 := G[V_2]$ kantenmaximal ohne topologischen Minor in $\mathcal{X}$, und es gilt $G_1 \cap G_2 = K^2$.*

S *Beweis.* Wir halten zunächst fest, dass jede Ecke $v \in S := V_1 \cap V_2$ in jeder Komponente von $G_i - S$ einen Nachbarn hat, $i = 1, 2$: anderenfalls würde G durch $S \setminus \{v\}$ getrennt werden, im Widerspruch zu $|S| = \kappa(G)$.

Im Folgenden werden wir viermal fast das gleiche Argument verwenden. Wir werden zunächst jeweils eine neue Kante e zu G hinzufügen.

Wegen der Maximalität von G liegt e dann in einem $TX \subseteq G + e$ mit $X \in \mathcal{X}$. Aufgrund der Wahl von e werden V_1 und V_2 in $G + e$ entweder weiterhin durch S getrennt sein (im Falle $|S| = 2$), oder aber durch S und e zusammen (im Falle $|S| \leqslant 1$). Da zwei Verzweigungsecken eines TX mit $\kappa(X) \geqslant 3$ aber weder durch zwei (andere) Ecken noch durch eine Kante und höchstens eine Ecke trennbar sind, können nicht sowohl $V_1 \setminus V_2$ als auch $V_2 \setminus V_1$ eine Verzweigungsecke unseres TX enthalten. Diese werden daher stets alle im gleichen V_i liegen – sagen wir, in V_1. Unser TX trifft dann V_2 höchstens in einem einer Kante von X entsprechenden Weg P.

Ist $S = \emptyset$, so erhalten wir sofort einen Widerspruch, indem wir e mit einer Endecke in V_1 und der anderen in V_2 wählen, da keine Kante eines TX mit $\kappa(X) \geqslant 3$ ihre Endecken trennt. Besteht S aus einer einzigen Ecke v, so wählen wir als Endecken von e einen Nachbarn v_1 von v in $V_1 \setminus S$ und einen Nachbarn v_2 von v in $V_2 \setminus S$. Wegen $e \in TX$ existiert dann P wie oben, mit $v, e \in P$ (Abb. 3.4.3). Ersetzen wir vPv_1 durch die Kante vv_1, so erhalten wir einen TX in $G_1 \subseteq G$, mit Widerspruch.

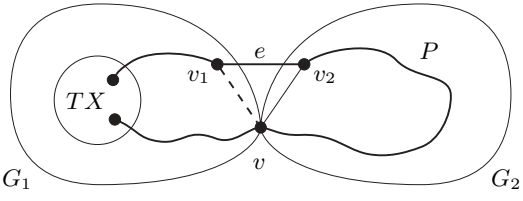


Abb. 3.4.3. Mit $G + e$ enthält auch G_1 oder G_2 einen TX

Es gilt also $|S| = 2$, sagen wir $S = \{x, y\}$. Ist $xy \notin G$, so wählen wir $e := xy$ und ersetzen e in dem entstehenden TX durch einen x–y-Weg durch G_2; dies ergibt einen TX in G mit Widerspruch. Somit ist $xy \in G$, also $G[S] = K^2$ wie behauptet.

Es bleibt zu zeigen, dass G_1 und G_2 kantenmaximal ohne topologischen Minor in $\mathcal{X}$ sind. Fügen wir also zu G_1 eine neue Kante e' hinzu. (G_2 behandelt man analog.) Indem wir gegebenenfalls xPy durch die Kante xy ersetzen, erhalten wir einen TX entweder in $G_1 + e'$ (womit die Kantenmaximalität von G_1 erwiesen wäre) oder in G_2 (mit Widerspruch wegen $G_2 \subseteq G$). □

Lemma 3.4.5. *Ist $|G| \geqslant 4$ und G kantenmaximal mit $TK^5, TK_{3,3} \not\subseteq G$, so ist G 3-zusammenhängend.*

Beweis. Wir verwenden Induktion nach $|G|$. Für $|G| = 4$ ist $G = K^4$ und die Behauptung wahr. Es sei nun $|G| > 4$, und G kantenmaximal ohne TK^5 und $TK_{3,3}$. Ist $\kappa(G) \leqslant 2$, so wählen wir $G_1, G_2 \subseteq G$ wie in Lemma 3.4.4. Für $\mathcal{X} := \{K^5, K_{3,3}\}$ besagt das Lemma, dass $G_1 \cap G_2$ ein K^2 ist, sagen wir mit Ecken x, y, und dass auch G_1 und G_2 kantenmaximal ohne TK^5 und $TK_{3,3}$ sind. Damit sind G_1 und G_2 entweder ein Dreieck

oder nach Induktionsannahme 3-zusammenhängend. Da sie K^5 und $K_{3,3}$ auch nicht als Minor enthalten (Lemma 3.4.2), sind sie in beiden Fällen plättbar (Lemma 3.4.3).

f_i, z_i Für $i = 1, 2$ wähle jeweils eine Zeichnung von G_i, sowie darin ein Gebiet f_i mit $xy \in G_i[f_i]$ und eine Ecke $z_i \in G_i[f_i] - \{x, y\}$. Es sei $K \subseteq G + z_1z_2$ ein TK^5 oder $TK_{3,3}$; die Menge der Verzweigungsecken K, V von K sei mit V bezeichnet.

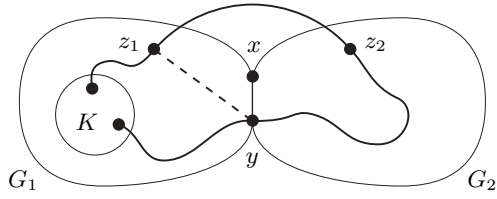


Abb. 3.4.4. Ein TK^5 oder $TK_{3,3}$ in $G + z_1z_2$

Liegen alle Ecken aus V im gleichen G_i, so enthält wiederum auch $G_i + xz_i$ oder $G_i + yz_i$ (oder G_i selbst, falls z_i bereits zu x bzw. zu y benachbart ist) einen TK^5 oder $TK_{3,3}$ (Abb. 3.4.4); dies widerspricht Korollar 3.2.11, da diese Graphen nach Wahl von z_i plättbar sind. Also gilt weder $V \subseteq V(G_1)$ noch $V \subseteq V(G_2)$. Da $G + z_1z_2$ nicht vier kreuzungsfreie Wege zwischen $G_1 - G_2$ und $G_2 - G_1$ enthält, können $G_1 - G_2$ und $G_2 - G_1$ nicht beide eine Verzweigungsecke eines TK^5 oder je zwei Verzweigungsecken eines $TK_{3,3}$ in $G + z_1z_2$ enthalten. Damit ist also K ein $TK_{3,3}$, und oBdA $|V \setminus V(G_1)| = 1$. Dann ist ein $TK_{3,3}$ aber auch in dem Graphen enthalten, der aus G_1 durch Hinzufügen einer neuen Ecke v und der Kanten vx, vy, und vz_1 entsteht. Dieser Graph ist nach Wahl von z_1 jedoch plättbar, ein Widerspruch zu Korollar 3.2.11. □

[3.5.1] [10.4.3] **Satz 3.4.6.** (Kuratowski 1930; Wagner 1937)
Die folgenden Aussagen sind äquivalent für Graphen G:

(i) *G ist plättbar;*

(ii) *G enthält weder einen K^5 noch einen $K_{3,3}$ als Minor;*

(iii) *G enthält weder einen K^5 noch einen $K_{3,3}$ als topologischen Minor.*

(3.2.11) *Beweis.* Kombiniere Korollar 3.2.11 mit den Lemmas 3.4.2, 3.4.3 und 3.4.5. □

Korollar 3.4.7. *Jeder maximal plättbare Graph mit mindestens vier Ecken ist 3-zusammenhängend.*

Beweis mit Lemma 3.4.5 und Satz 3.4.6. □

3.5 Algebraische Plättbarkeitskriterien

Eines der augenfälligsten Merkmale eines ebenen Graphen G liegt vielleicht in der Menge jener Kreise, die ein Gebiet beranden. Ist G 2-zusammenhängend, so überdecken diese Kreise ganz G und bilden bereits in diesem Sinne eine „große“ Menge. Die Menge dieser Kreise ist sogar noch in einem stärkeren Sinne groß: wie man leicht sieht (s.u.), ist jeder Kreis in G die Summe geeigneter Gebietsränder, d.h. diese erzeugen den gesamten Zyklenraum. Andererseits überdecken die Gebietsränder G nur „dünn“: jede Kante von G liegt auf höchstens zweien dieser Kreise.

Unser erstes Ziel in diesem Abschnitt ist es, zu zeigen, dass die Existenz einer solchen großen aber doch dünnen Menge von Kreisen nicht nur ein auffälliges Merkmal plättbarer Graphen ist sondern diese bereits charakterisiert.

Eine Teilmenge $\mathcal{F}$ des Kantenraums eines Graphen heiße *schlicht*, wenn jede Kante des Graphen in höchstens zwei Mengen aus $\mathcal{F}$ liegt. Der Schnittraum $\mathcal{C}^*(G)$ eines Graphen $G = (V, E)$ beispielsweise hat stets eine schlichte Basis: nach Proposition 0.9.3 wird er erzeugt von den Schnitten der Form $E(v)$, und eine Kante $xy \in G$ liegt nur für $v = x$ und für $v = y$ in $E(v)$. *schlicht*

Satz 3.5.1. (MacLane 1937) [3.6.3]
Ein Graph ist genau dann plättbar, wenn sein Zyklenraum eine schlichte Basis besitzt.

Beweis. Der Satz ist trivial für Graphen der Ordnung $\leqslant 2$; wir betrachten daher einen Graphen G der Ordnung $\geqslant 3$. Ist $\kappa(G) \leqslant 1$, so ist G die Vereinigung zweier echter Untergraphen G_1, G_2 mit $|G_1 \cap G_2| \leqslant 1$. Dann ist $\mathcal{C}(G)$ die direkte Summe von $\mathcal{C}(G_1)$ und $\mathcal{C}(G_2)$, hat also genau dann eine schlichte Basis, wenn $\mathcal{C}(G_1)$ und $\mathcal{C}(G_2)$ eine haben. (Warum?) Weiter ist G genau dann plättbar, wenn G_1 und G_2 es sind. (Dies folgt unmittelbar aus dem Satz von Kuratowski, aber auch durch einfache elementartopologische Betrachtungen.) Die Behauptung für G folgt damit induktiv aus der für G_1 und G_2. (0.9.2) (0.9.6) (3.1.1) (3.2.2) (3.2.6) (3.4.6)

Es sei nun G 2-zusammenhängend. Wir nehmen zuerst an, dass G plättbar ist und wählen eine Zeichnung. Nach Proposition 3.2.6 sind die Gebietsränder von G Kreise, liegen also in $\mathcal{C}(G)$. Wir zeigen, dass die Gebietsränder alle Kreise in G erzeugen; damit hat $\mathcal{C}(G)$ dann nach Lemma 3.2.2 eine schlichte Basis. Sei also $C \subseteq G$ ein beliebiger Kreis, und f sein Innengebiet. Nach Lemma 3.2.2 liegt jede Kante e mit $\mathring{e} \subseteq f$ auf dem Rand genau zweier in f enthaltener Gebiete von G, und jede Kante von C auf dem Rand genau eines solchen Gebiets. Die Summe in $\mathcal{C}(G)$ all dieser Gebietsränder ist somit gerade C.

Umgekehrt sei nun $\{C_1, \dots, C_k\}$ eine schlichte Basis von $\mathcal{C}(G)$. Dann besitzt für jede Kante $e \in G$ auch $\mathcal{C}(G - e)$ eine schlichte Basis: liegt e in nur einem Basiszyklus C_i, etwa in C_1, so ist $\{C_2, \dots, C_k\}$ eine

solche; liegt e in zweien, etwa in C_1 und C_2, so ist $\{C_1 + C_2, C_3, \ldots, C_k\}$ eine schlichte Basis von $\mathcal{C}(G-e)$. (Die genannten Basen sind Teilmengen von $\mathcal{C}(G-e)$ nach Proposition 0.9.2.) Ist nun G nicht plättbar, und existiert somit nach dem Satz von Kuratowski ein TK^5 oder $TK_{3,3}$ als Teilgraph in G, so hat damit auch dieser eine schlichte Basis. Dann hat aber auch K^5 oder $K_{3,3}$ selbst eine schlichte Basis; wir werden dies, für beide Fälle getrennt, zum Widerspruch führen.

Wir betrachten zunächst K^5. Nach Satz 0.9.6 ist $\dim \mathcal{C}(K^5) = 6$; es sei $\mathcal{B} = \{C_1, \ldots, C_6\}$ eine schlichte Basis und $C_0 := C_1 + \ldots + C_6$. Da $\mathcal{B}$ linear unabhängig ist, ist keiner der Zyklen $C_0, \ldots, C_6$ leer, und so enthält jeder von ihnen mindestens drei Kanten (vgl. Proposition 0.9.2). Da jede Kante aus C_0 in nur einem der Zyklen $C_1, \ldots, C_6$ liegt, ist mit $\mathcal{B}$ auch die Menge $\{C_0, \ldots, C_6\}$ schlicht. Dafür jedoch hat K^5 nicht genug Kanten, d.h. wir erhalten den Widerspruch

$$21 = 7 \cdot 3 \leqslant |C_0| + \ldots + |C_6| \leqslant 2\,\|K^5\| = 20\,.$$

Für $K_{3,3}$ gilt nach Satz 0.9.6 $\dim \mathcal{C}(K_{3,3}) = 4$; es sei $\mathcal{B} = \{C_1, \ldots, C_4\}$ eine schlichte Basis und $C_0 := C_1 + \ldots + C_4$. Wegen $g(K_{3,3}) = 4$ enthält jedes C_i mindestens vier Kanten, und wir erhalten den Widerspruch

$$20 = 5 \cdot 4 \leqslant |C_0| + \ldots + |C_4| \leqslant 2\,\|K_{3,3}\| = 18\,.$$

□

Mit Hilfe von Satz 2.2.3 ist es möglich, aus dem scheinbar so abstrakt-algebraischen Plättbarkeitskriterium von MacLane ein rein graphentheoretisches Kriterium zurückzugewinnen, zumindest für 3-zusammenhängende Graphen:

Satz 3.5.2. (Kelmans 1978)
Ein 3-zusammenhängender Graph ist genau dann plättbar, wenn jede Kante auf höchstens zwei (äquivalent: genau zwei) nicht trennenden induzierten Kreisen liegt.

(2.2.3) (3.2.2) (3.2.6) (3.2.7)

Beweis. Die Vorwärtsrichtung folgt aus den Propositionen 3.2.7 und 3.2.2 (und Proposition 3.2.6 für „genau zwei“). Die Rückrichtung folgt aus Satz 2.2.3 und Satz 3.5.1. □

3.6 Plättbarkeit und Dualität

In diesem Abschnitt beweisen wir mit Hilfe von Satz 3.5.1 ein weiteres Plättbarkeitskriterium, das auf einem Begriff der Dualität ebener Graphen beruht und eng verwandt ist mit der in Kapitel 0.9 bereits kurz behandelten Beziehung zwischen Zyklenraum und Schnittraum eines Graphen.

ebener Multigraph

Ein *ebener Multigraph* ist ein Paar $G = (V, E)$ endlicher Mengen mit den folgenden Eigenschaften (die Elemente von V heißen wieder *Ecken*, die Elemente von E *Kanten*):

(i) $V \subseteq \mathbb{R}^2$;

(ii) jede Kante ist ein Polygonzug zwischen zwei Ecken oder ein Polygon, das genau eine Ecke (seine *Endecke*) enthält;

(iii) das Innere einer jeden Kante enthält weder eine Ecke noch einen Punkt einer anderen Kante.

Wir verwenden für ebene Graphen definierte Begriffe sinngemäß auch für ebene Multigraphen; beachte dabei, dass jetzt auch Schlingen und Doppelkanten als Kreise gelten.

Betrachten wir einmal den ebenen Multigraphen G aus Abbildung 3.6.1. Setzen wir in jedes Gebiet von G eine neue Ecke, so können wir die neuen Ecken wie folgt zu einem neuen ebenen Multigraphen G^* verbinden: für jede Kante e von G verbinden wir die neuen Ecken in den beiden Gebieten, auf deren Rand e liegt, durch eine neue Kante e^*; liegt e auf dem Rand nur eines Gebiets, so legen wir an dessen neue Ecke eine Schlinge e^* durch e. Der so entstandene ebene Multigraph G^* ist im folgenden Sinne dual zu G: konstruieren wir aus G^* seinerseits auf die angegebene Weise einen dritten ebenen Multigraphen G^{**}, so ist G^{**} topologisch isomorph zu unserem ursprünglichen Graphen G.

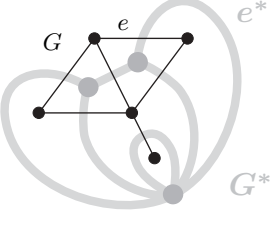


Abb. 3.6.1. Ein ebener Graph und sein Dual

topologisch dual

Zur Präzisierung dieser Idee seien $G = (V, E)$ und (V^*, E^*) zwei beliebige ebene Multigraphen, sowie $F(G) =: F$ und $F((V^*, E^*)) =: F^*$. Wir nennen (V^*, E^*) *topologisch dual* – oder ein *topologisches Dual* – zu

Dual G^*

G und schreiben $(V^*, E^*) =: G^*$, wenn Bijektionen

$$\begin{array}{lll} F \to V^* & E \to E^* & V \to F^* \\ f \mapsto v^*(f) & e \mapsto e^* & v \mapsto f^*(v) \end{array}$$

existieren mit den folgenden Eigenschaften:

(i) $v^*(f) \in f$ für alle $f \in F$;

(ii) $|e^* \cap G| = |\mathring{e}^* \cap \mathring{e}| = |e \cap G^*| = 1$ für alle $e \in E$, und der Punkt aus $\mathring{e}^* \cap \mathring{e}$ liegt bei beiden Kanten im Inneren eines geraden Teilstücks;

(iii) $v \in f^*(v)$ für alle $v \in V$.

Jeder zusammenhängende ebene Multigraph hat ein topologisches Dual: wählen wir gemäß (i) aus jedem Gebiet f von G einen Punkt $v^*(f)$ als Ecke von G^*, so lassen sich die neuen Ecken wie in (ii) durch kreuzungsfreie Polygonzüge verbinden, und wegen des Zusammenhangs von G existiert dann auch eine (iii) erfüllende Bijektion $V \to F^*$ (Übung 28).

Sind G_1^* und G_2^* zwei Duale von G, so gilt offenbar $G_1^* \simeq G_2^*$; man kann sogar zeigen, dass die natürliche Bijektion $v_1^*(f) \mapsto v_2^*(f)$ ein topologischer Isomorphismus zwischen G_1^* und G_2^* ist. Wir dürfen in diesem Sinne also von *dem* Dual G^* von G sprechen.

Schließlich ist G seinerseits dual zu G^*: verwenden wir die Umkehrabbildungen der drei Bijektionen aus der Definition von G^*, setzen also $v^*(f^*(v)) := v$ und $f^*(v^*(f)) := f$ für $f^*(v) \in F^*$ und $v^*(f) \in V^*$, so werden die Bedingungen (i) und (iii) für G^* gerade zu (iii) und (i) für G, und sind somit erfüllt; die Bedingung (ii) ist ohnehin symmetrisch in G und G^*. Da Duale offensichtlich zusammenhängend sind (Übung 27), folgt damit auch, dass die Bedingung des Zusammenhangs an G für die Existenz eines Duals nicht nur hinreichend sondern auch notwendig ist.

Dualität bei ebenen Multigraphen ist nicht zuletzt deshalb so interessant, weil sie eine Beziehung herstellt zwischen jeweils ganz natürlichen aber verschiedenartigen Kantenmengen. Aus Kapitel 0.9 wissen wir, dass die Kreise und die Minimalschnitte eines Graphen zueinander in Beziehung stehen: sie sind jeweils die minimalen nicht-leeren Elemente der von ihnen erzeugten Unterräume $\mathcal{C}$ und $\mathcal{C}^*$ des Kantenraums, und diese sind zueinander orthogonal.

Betrachten wir jedoch einmal die folgende Aufgabe. Können wir die Kanten eines Graphen G so auf eine andere Eckenmenge verteilen, dass eine Menge von Kanten in dem entstehenden Graphen G' genau dann ein Minimalschnitt ist, wenn sie in G einen Kreis bildete? Es erscheint kaum als möglich, dies für alle Kreise von G gleichzeitig zu erreichen.

Und doch ist es für eine nicht unbedeutende Klasse von Graphen möglich – sogar so, dass auch G' wieder in dieser Klasse liegt, und dass wir G aus G' zurückerhalten können, wenn wir die Kanten von G' in der gleiche Weise neu mischen: für genau die Klasse der plättbaren Graphen!

Zum Beweis dieser doch ganz erstaunlichen Tatsache zeigen wir zunächst, dass für zusammenhängendes ebenes G sein Dual G^* gerade die für G' gesuchten Eigenschaften hat:

Proposition 3.6.1. *Ist G ein zusammenhängender ebener Multigraph, so ist eine Kantenmenge $E \subseteq E(G)$ genau dann die Kantenmenge eines Kreises in G, wenn $E^* := \{ e^* \mid e \in E \}$ ein minimaler Schnitt in G^* ist.* [5.5.2]

Beweis. Nach Bedingungen (i) und (ii) in der Definition von G^* liegen zwei Ecken $v^*(f_1)$ und $v^*(f_2)$ von G^* genau dann in der gleichen Komponente von $G^* - E^*$, wenn f_1 und f_2 im gleichen Gebiet von $\mathbb{R}^2 \setminus \bigcup E$ liegen: jeder $v^*(f_1)$–$v^*(f_2)$-Weg in $G^* - E^*$ ist ein Polygonzug zwischen f_1 und f_2 in $\mathbb{R}^2 \setminus \bigcup E$, und umgekehrt definiert jeder solche Polygonzug P (mit $P \cap V(G) = \emptyset$) einen Kantenzug in $G^* - E^*$ zwischen $v^*(f_1)$ und $v^*(f_2)$. (3.1.1) (3.2.4)

Ist nun $C \subseteq G$ ein Kreis und $E = E(C)$, so hat $G^* - E^*$ wegen der obigen Korrespondenz nach dem Jordanschen Kurvensatz genau zwei Komponenten, und somit ist E^* ein minimaler Schnitt in G^*.

Hat umgekehrt $E \subseteq E(G)$ die Eigenschaft, dass E^* ein Schnitt in G^* ist, so enthält E nach der obigen Korrespondenz und Lemma 3.2.4 die Kanten eines Kreises $C \subseteq G$. Ist E^* als Schnitt minimal, so enthält E nach dem bereits gezeigten Teil der Aussage keine weiteren Kanten, d.h. es gilt $E = E(C)$. □

Proposition 3.6.1 legt es nahe, auch für einen abstrakten (d.h. nicht ebenen) Multigraphen[6] G einen weiteren Multigraphen G^* *kombinatorisch dual* zu G zu nennen, wenn $E(G^*) = E(G)$ ist und die Minimalschnitte von G^* gerade die Kantenmengen der Kreise in G sind. (Weder G noch G^* muss jetzt zusammenhängend sein.) Man kann zeigen, dass G^* hierdurch bis aus Isomorphie eindeutig bestimmt ist, sofern G 3-zusammenhängend war.

kombinatorisch dual

Wir brauchen hier lediglich die folgende unmittelbare Konsequenz aus der Definition von G^*:

Proposition 3.6.2. *Ist G^* kombinatorisch dual zu G, so ist der Schnittraum von G^* der Zyklenraum von G, d.h. es gilt*

$$\mathcal{C}^*(G^*) = \mathcal{C}(G)\,.$$

Beweis. Nach Lemma 0.9.4 ist $\mathcal{C}^*(G^*)$ der von den Minimalschnitten in G^* erzeugte Unterraum von $\mathcal{E}(G^*) = \mathcal{E}(G)$. Diese sind nach Annahme gerade die Kantenmengen der Kreise in G, und deren Erzeugnis in $\mathcal{E}(G)$ ist $\mathcal{C}(G)$. □ (0.9.4)

[6] Im Folgenden werden wir ein paar Lemmas aus früheren Kapiteln benutzen, die wir dort nur für Graphen bewiesen haben. Diese Lemmas gelten genauso für Multigraphen, mit den gleichen Beweisen.

(0.9.5) Mit Satz 0.9.5 impliziert Proposition 3.6.2 sofort, dass G zu jedem kombinatorischen Dual G^* seinerseits kombinatorisch dual ist. Man kann zeigen, dass G^* eindeutig bestimmt ist (bis auf Isomorphie und die Hinzunahme isolierter Ecken), falls G 3-zusammenhängend ist. Nach
(2.1.3) (2.1.2) Lemma 2.1.3 ist eine nicht leere Teilmenge von $E(G) = E(G^*)$ genau dann die Kantenmenge eines Blocks von G, wenn sie die Kantenmenge eines Blocks von G^* ist. Mit Lemma 2.1.2 folgt daraus, dass die Blöcke von G^* Duale der Blöcke von G sind.

Satz 3.6.3. (Whitney 1933)
Ein Graph ist genau dann plättbar, wenn ein zu ihm kombinatorisch dualer Multigraph existiert.

(0.9.3) (3.5.1) *Beweis*. Wir nehmen zunächst G als plättbar an und betrachten eine beliebige Zeichnung. Deren Komponenten C haben jeweils ein topologisches Dual C^*. Es sei G^* die disjunkte Vereinigung dieser C^*, aufgefasst als abstrakte Multigraphen. Die Minimalschnitte von G^* sind dann genau die minimalen Schnitte der C^*, und nach Proposition 3.6.1 sind diese gerade die Kantenmengen der Kreise in G. Damit ist G^* kombinatorisch dual zu G.

Umgekehrt sei nun G^* ein zu G kombinatorisch dualer Multigraph. Nach Satz 3.5.1 und Proposition 3.6.2 reicht es zum Beweis der Plättbarkeit von G zu zeigen, dass $\mathcal{C}^*(G^*)$ eine schlichte Basis hat. Dies ist nach Proposition 0.9.3 der Fall. □

Übungen

1. Definiere einen Begriff der Einbettung von Graphen in den $\mathbb{R}^3$. Zeige, dass jeder Graph geradlinig in den $\mathbb{R}^3$ einbettbar ist.

2.$^-$ Zeige direkt mit Lemma 3.1.2, dass $K_{3,3}$ nicht als ebener Graph auftreten kann.

3.$^-$ Finde den Fehler im folgenden Beweis für die Behauptung, dass jeder maximal ebene Graph G mit mindestens vier Ecken ein ebener Dreiecksgraph mit Minimalgrad 3 ist. Verwende Induktion nach $|G|$. Der Induktionsanfang ist klar mit K^4. Zum Induktionsschritt $n \to n+1$ nehmen wir an, dass jeder maximal ebene Graph G mit n Ecken ein ebener Dreiecksgraph mit Minimalgrad 3 ist. Füge nun auf beliebige Weise zu G eine $(n+1)$-te Ecke v hinzu, so dass der erweiterte Graph G' wieder maximal eben ist. Offenbar liegt v in einem Gebiet f von G, und da G' maximal eben ist, ist v zu allen Ecken auf dem Rand von f benachbart (und zu keinen weiteren Ecken). Da G ein ebener Dreiecksgraph ist, sind dies genau drei Ecken, d.h. auch G' ist ein ebener Dreiecksgraph mit Minimalgrad 3.

4.$^-$ Finde eine Eulerformel (Satz 3.2.9) für unzusammenhängende Graphen.

5. Zeige, dass jeder zusammenhängende ebene Graph mit n Ecken, m Kanten und Taillenweite $g < \infty$ die Ungleichung $m \leqslant \frac{g}{g-2}(n-2)$ erfüllt.

6. Zeige, dass jeder ebene Graph die Vereinigung dreier Wälder ist.

7. Es sei $G_1, G_2, \ldots$ eine Folge paarweise nicht isomorpher Graphen, mit $\limsup \varepsilon(G_i) > 3$. Zeige, dass es keine (kompakte) Fläche gibt, in die alle G_i einbettbar sind.

   (Tip: Analog zur Eulerformel für die Ebene gibt es für jede Fläche S eine Konstante $\chi(S) \leqslant 2$, so dass jeder in S einbettbare Graph $n - m + \ell \geqslant \chi(S)$ erfüllt.)

8. Finde für plättbare Graphen einen direkten Beweis des Satzes von Tutte über den Zyklenraum 3-zusammenhängender Graphen (2.2.3).

9.$^-$ Zeige, dass die beiden ebenen Graphen aus Abb. 3.3.1 nicht kombinatorisch (und daher auch nicht topologisch) isomorph sind.

10. Zeige, dass die beiden ebenen Graphen aus Abb. 3.3.2 kombinatorisch aber nicht topologisch isomorph sind.

11. Zeige, dass dem Begriff äquivalenter Einbettungen in die Ebene wirklich eine Äquivalenzrelation zugrundeliegt.

12. Finde einen 2-zusammenhängenden Graphen, für den je zwei Zeichnungen topologisch isomorph sind aber nicht je zwei Einbettungen in die Ebene äquivalent.

13.$^+$ Zeige, dass zu jedem ebenen Graphen ein kombinatorisch isomorpher ebener Graph existiert, bei dem alle Kanten Strecken im $\mathbb{R}^2$ sind.

   (Tip: Betrachte oBdA einen ebenen Dreiecksgraphen und konstruiere einen graphentheoretisch isomorphen geradlinigen ebenen Graphen induktiv. Welche zusätzliche Eigenschaft der entstehenden Innengebiete könnte den Fortgang der Induktion sichern?)

14. Zeige, ohne den Satz von Kuratowski zu benutzen, dass jeder Minor eines plättbaren Graphen plättbar ist. Zeige weiter, dass ein Graph genau dann plättbar ist, wenn er Minor eines Gitters ist. (*Gitter* sind in Kapitel 10.3 definiert.)

15. (i) Zeige, ohne den Satz von Kuratowski zu benutzen, dass die plättbaren Graphen im Prinzip wie in diesem Satz charakterisierbar sind: dass eine Menge $\mathcal{X}$ von Graphen existiert mit der Eigenschaft, dass ein Graph genau dann plättbar ist, wenn er keinen TX mit $X \in \mathcal{X}$ enthält.

   (ii) Welche Grapheneigenschaften überhaupt lassen sich so charakterisieren?

16.$^-$ Hat jeder plättbare Graph eine Zeichnung, in der jedes Innengebiet konvex ist?

17. Modifiziere den Beweis von Lemma 3.4.3 so, dass jeder Gebietsrand ein konvexes Polygon wird.

18.$^-$ Enthält jeder minimal nicht plättbare Graph G (d.h. jeder nicht plättbare Graph G, dessen echte Teilgraphen alle plättbar sind) eine Kante e, für die $G - e$ maximal plättbar ist? Ändert sich die Antwort, wenn man unter „minimal nicht plättbar“ einen nicht plättbaren Graphen versteht, dessen echte Minoren alle plättbar sind?

19. Zeige, dass in einem maximal plättbaren Graphen mit mindestens 6 Ecken jede zusätzliche Kante sowohl einen TK^5 als auch einen $TK_{3,3}$ entstehen lässt.

20. Leite den Satz von Kuratowski induktiv durch Manipulation ebener Graphen aus Lemma 3.4.3 (dem 3-zusammenhängenden Fall des Satzes) her, also ohne den Umweg über Lemma 3.4.5.

    (Diese Aufgabe ist nicht als Übung in Elementartopologie gedacht; für die topologischen Beweisteile reicht eine grobe Skizze.)

21. Ein Graph heißt *outerplanar*, wenn er eine Zeichnung besitzt, bei der alle Ecken auf dem Rand des Außengebiets liegen. Zeige, dass ein Graph genau dann outerplanar ist, wenn er weder K^4 noch $K_{2,3}$ als Minor enthält.

22. Es sei $G = G_1 \cup G_2$ mit $|G_1 \cap G_2| \leqslant 1$. Zeige, dass $\mathcal{C}(G)$ genau dann eine schlichte Basis hat, wenn $\mathcal{C}(G_1)$ und $\mathcal{C}(G_2)$ eine haben.

23.$^+$ Finde unter den Gebietsrändern eines 2-zusammenhängenden ebenen Graphen eine Basis seines Zyklenraumes.

24. Zeige, dass ein 2-zusammenhängender ebener Graph genau dann bipartit ist, wenn jedes Gebiet durch einen Kreis gerader Länge berandet ist.

25.$^+$ Es sei C eine geschlossene Kurve in der Ebene, die sich an jedem Punkt der Ebene höchstens einmal selbst kreuzt und sich nirgendwo selbst berührt, ohne sich zu kreuzen. Wir nennen C *alternierend*, wenn wir die Kreuzungen so in Über-/Unterführungen verwandeln können, dass beim Durchlaufen entlang C die Überführungen mit den Unterführungen abwechseln.

    (i) Beweise oder widerlege, dass jede solche Kurve C alterniert.

    (ii) Ändert sich die Lösung von (i), wenn die Kurve C nicht geschlossen ist?

26.$^-$ Wie sieht das Dual eines ebenen Baumes aus?

27.$^-$ Zeige, dass das Dual eines ebenen Multigraphen zusammenhängend ist.

28.$^+$ Zeige, dass jeder zusammenhängende ebene Multigraph ein Dual besitzt.

29. Es seien G, G^* zueinander duale ebene Multigraphen, und $e \in G$ eine Kante. Zeige die folgenden Aussagen:

    (i) Ist e keine Brücke, so ist G^*/e^* dual zu $G - e$.

    (ii) Ist e keine Schlinge, so ist $G^* - e^*$ dual zu G/e.

30. Zeige, dass je zwei Duale eines ebenen Multigraphen kombinatorisch isomorph sind.

31. Zeige die folgenden Aussagen über duale ebene Graphen G, G^*:
    (i) Ist G 2-zusammenhängend, so ist auch G^* 2-zusammenhängend.
    (ii) Ist G 3-zusammenhängend, so ist auch G^* 3-zusammenhängend.
    (iii) Ist G 4-zusammenhängend, so ist G^* nicht notwendig 4-zusammenhängend.

32. Beweise die Behauptungen im Anschluss an Proposition 3.6.2 genauer (außer der Eindeutigkeit von G^*).

33. Zeige, dass die folgenden beiden Aussagen äquivalent sind für zusammenhängende Multigraphen $G = (V, E)$ und $G' = (V', E)$ mit der gleichen Kantenmenge:
    (i) G und G' sind zueinander kombinatorisch dual;
    (ii) für jede Kantenmenge $F \subseteq E$ ist der Multigraph (V, F) genau dann ein Baum, wenn $(V', E \setminus F)$ ein Baum ist.

Notizen

Über Einbettungen von Graphen in die Ebene und andere Flächen gibt es eine Monographie von B. Mohar & C. Thomassen, *Graphs on Surfaces*, Johns Hopkins University Press 2001. Dort finden sich explizite Beweise der in Abschnitt 3.1 zitierten Sätze, sowie Quellenverweise für die klassischen Resultate dieses Kapitels. Einen einfachen Beweis des Satzes von Jordan (polygonal und allgemein) gibt auch J. Stillwell, *Classical topology and combinatorial group theory*, Springer 1980.

Der kurze Beweis von Korollar 3.2.10 enthält einen Trick, der spezielle Erwähnung verdient: das sogenannte *doppelte Zählen* von Inzidenzen, veranschaulicht durch das Zählen der Kanten eines bipartiten Hilfsgraphen anhand seiner Eckengrade in der einen oder der anderen Partitionsmenge. Diese Beweistechnik tritt in der Kombinatorik vielfach auf; wir werden weitere Beispiele in Kapitel 4.5 und Kapitel 9 sehen.

Abschnitt 3.3 ist zum weiteren Verständnis des Kapitels nicht notwendig. Die Ergebnisse dieses Abschnitts sind aber alles andere als unwichtig. In gewisser Weise wurden sie Opfer ihres eigenen Erfolgs: die von ihnen geleistete Zurückführung topologischer auf kombinatorische Fragestellungen hat in diesem Abschnitt dargestellten topologischen Methoden für die meisten Teile der Plättbarkeitstheorie entbehrlich gemacht.

Kuratowski formulierte seinen Satz für topologische Minoren; die Version für Minoren wurde von Wagner (1937) hinzugefügt. Unser Beweis des Satzes für 3-zusammenhängende Graphen (Proposition 3.4.3) lässt sich leicht so verschärfen, dass alle Innengebiete der konstruierten Zeichnung konvex werden (Übung); siehe C. Thomassen, Planarity and duality of finite and infinite graphs, *J. Comb. Theory B* **29** (1980), 244–271. Die Existenz solcher Zeichnungen folgt auch aus dem klassischen Satz von Steinitz (1922), dass die 3-zusammenhängenden plättbaren Graphen genau die 1-Skelette der 3-dimensionalen

konvexen Polyeder sind; siehe auch W.T. Tutte, How to draw a graph, *Proc. Lond. Math. Soc.* **13** (1963), 743–767.

Wie man leicht zeigt (siehe Übung), erzeugt in einem maximal plättbaren Graphen jede zusätzliche Kante nicht nur einen TK^5 *oder* $TK_{3,3}$ (wie nach dem Satz von Kuratowski), sondern beides. In Kapitel 6.3 werden wir sehen, dass allgemeiner sogar jeder Graph mit n Ecken und mehr als $3n-6$ Kanten einen TK^5 und (mit einer Ausnahme) einen $TK_{3,3}$ enthält (Übung **26**, Kap. 6).

Die in unserem Beweis des Plättbarkeitskriteriums von MacLane (Satz 3.5.1) angegebene schlichte Basis aus den Rändern der Innengebiete ist im folgenden Sinne kanonisch: zu jeder schlichten Basis $\mathcal{B}$ des Zyklenraums eines 2-zusammenhängenden plättbaren Graphen G gibt es eine Zeichnung von G, bei der $\mathcal{B}$ gerade zur Menge der Innengebietsränder wird (siehe Thomassens oben zitierte Arbeit). Zur Rückrichtung des Beweises haben wir den Satz von Kuratowski benutzt. Ein instruktiverer (wenn auch längerer) Beweis, bei dem eine ebene Darstellung des Graphen direkt aus einer schlichten Basis seines Zyklenraumes konstruiert wird, ist dargestellt bei K. Wagner, *Graphentheorie*, BI Hochschultaschenbücher 1972.

Da Satz 3.5.2 mit Hilfe des Satzes von MacLane direkt aus dem Satz 2.2.3 von Tutte (1963) folgt, wurde es bekannt als das „Tuttesche Plättbarkeitskriterium“. Entdeckt wurde es jedoch erst 15 Jahre später von A.K. Kelmans, The concept of a vertex in a matroid, the non-separating cycles in a graph and a new criterion for graph planarity, in *Algebraic Methods in Graph Theory*, Vol. 1, Conf. Szeged 1978, *Colloq. Math. Soc. János Bolyai* **25** (1981) 345–388. Kelmans seinerseits wusste nichts von Tuttes Satz 2.2.3, bewies diesen unabhängig neu, und wies dann erstmals darauf hin, dass man Satz 3.5.2 durch Anwendung des MacLaneschen Kriteriums auch daraus herleiten kann.

Die in Abschnitt 3.6 angesprochene kombinatorische Dualität zwischen Kreisen und Minimalschnitten wird in der Matroidtheorie vertieft; siehe etwa J.G. Oxley, *Matroid Theory*, Oxford University Press 1992. Zur Dualität unendlicher Graphen siehe H. Bruhn & R. Diestel, Duality in infinite graphs, *Comb. Probab. Comput.* (erscheint in 2006).

4 Färbungen

Wieviele Farben reichen aus, um die Länder einer Landkarte so zu färben, dass zwei Länder mit gemeinsamer Grenze stets verschieden gefärbt sind? Wieviele Tage muss ein Parlament für Ausschusssitzungen anberaumen, wenn jeder Ausschuss einen Tag lang tagen will und einige Parlamentsmitglieder in mehreren Ausschüssen sitzen? Wie finden wir einen Stundenplan minimaler Gesamtlänge für eine Schule, wenn wir wissen, welcher Lehrer welche Klasse wie häufig unterrichten soll?

Eckenfärbung

Eine *Eckenfärbung* eines Graphen $G = (V, E)$ ist eine Abbildung $c\colon V \to S$ mit $c(v) \neq c(w)$ für je zwei benachbarte Ecken v, w; die Elemente der Menge S nennt man die zur Verfügung stehenden *Farben*. An der Menge S wird uns lediglich ihre Mächtigkeit interessieren: typischerweise fragen wir nach dem kleinsten $k \in \mathbb{N}$, so dass G eine *k-Färbung* hat, eine Eckenfärbung $c\colon V \to \{1, \dots, k\}$. Dieses k nennt man die (*ecken-*) *chromatische Zahl* von G; man bezeichnet sie mit $\chi(G)$. Einen Graphen G mit $\chi(G) = k$ nennt man *k-chromatisch*; ist $\chi(G) \leqslant k$, so heißt G *k-färbbar*.

chromatische Zahl $\chi(G)$

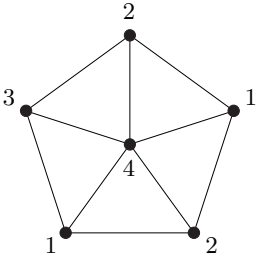


Abb. 4.0.1. Eine Eckenfärbung $V \to \{1, \dots, 4\}$

Eine k-Färbung ist natürlich nichts weiter als eine Eckenpartition in k unabhängige Mengen; die nicht trivialen 2-färbbaren Graphen beispielsweise sind gerade die bipartiten Graphen. Die erste der obigen

Fragen führt auf das Problem der Bestimmung von $\chi(G)$ für ebene Graphen G, und auch die zweite Frage lässt sich als Eckenfärbungsproblem formulieren. (Wie?)

Kantenfärbung

Eine *Kantenfärbung* von $G = (V, E)$ ist eine Abbildung $c\colon E \to S$ mit $c(e) \neq c(f)$ für benachbarte Kanten e, f. Das kleinste $k \in \mathbb{N}$, für das eine Kantenfärbung $c\colon E \to \{1, \dots, k\}$ existiert, nennt man die *kantenchromatische Zahl* oder den *chromatischen Index* von G; man bezeichnet dieses k mit $\chi'(G)$. Die dritte der obigen Fragen lässt sich modellieren als Kantenfärbungsproblem in einem bipartiten Multigraphen. (Wie?)

chromatischer Index $\chi'(G)$

Jede Kantenfärbung von G ist offenbar eine Eckenfärbung des Kantengraphen $L(G)$ von G und umgekehrt; insbesondere gilt $\chi'(G) = \chi(L(G))$. Die Bestimmung kantenchromatischer Zahlen lässt sich somit als Spezialfall der Bestimmung eckenchromatischer Zahlen auffassen. Wie wir sehen werden, entspricht diesem Verhältnis der beiden Typen von Färbungsproblemen ein markanter Unterschied in der Schwierigkeit ihrer – zumindest annähernden – Lösung: während es für $\chi(G)$ nur grobe Abschätzungen gibt, nimmt $\chi'(G)$ stets einen von zwei Werten an: $\Delta(G)$ oder $\Delta(G) + 1$.

4.1 Landkarten und das Färben ebener Graphen

Der außerhalb der Mathematik sicherlich bekannteste Satz der Graphentheorie ist der folgende *Vierfarbensatz*, nach dem (Übung) jede Landkarte mit höchstens vier Farben färbbar ist:

Satz 4.1.1. (Vierfarbensatz)
Jeder ebene Graph hat eine Eckenfärbung mit höchstens 4 Farben.

Hinweise zur Geschichte des Beweises des Vierfarbensatzes finden sich in den Notizen am Ende des Kapitels. Wir beweisen hier die folgende Abschwächung:

Proposition 4.1.2. (Fünffarbensatz)
Jeder ebene Graph ist 5-färbbar.

(3.1.1) (3.2.10)

Beweis. Es sei G ein ebener Graph mit $n \geqslant 3$ Ecken und m Kanten; wir nehmen induktiv an, dass jeder ebene Graph mit weniger als n Ecken

n, m

5-färbbar ist. Nach Korollar 3.2.10 ist

$$d(G) = 2m/n \leqslant 2\,(3n-6)/n < 6\,;$$

v

es sei $v \in G$ eine Ecke mit $d(v) \leqslant 5$. Nach Induktionsannahme hat

H, c

$H := G - v$ eine Eckenfärbung $c\colon V(H) \to \{1, \dots, 5\}$. Sind die Nachbarn von v darin mit insgesamt höchstens 4 Farben gefärbt, so können wir

c zu einer 5-Färbung von G fortsetzten. Wir nehmen daher an, dass v genau fünf Nachbarn hat und diese verschieden gefärbt sind.

Wir betrachten jetzt eine offene Kreisscheibe D um v, die so klein ist, dass sie nur die fünf geraden Kantensegmente von G trifft, die v enthalten; diese Segmente seien entsprechend ihrer Lage in D in zyklischer Ordnung als $s_1, \dots, s_5$ numeriert. Ist v_i der Nachbar von v mit $s_i \subseteq vv_i$, so sei oBdA $c(v_i) = i$. Wir zeigen zunächst, dass jeder v_1–v_3-Weg $P \subseteq H$ die Ecken v_2 und v_4 in H trennt. (Abb. 4.1.1)

D

$s_1, \dots, s_5$

$v_1, \dots, v_5$

P

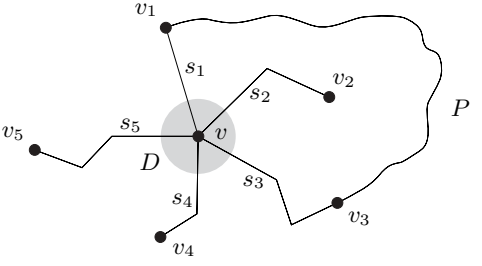


Abb. 4.1.1. Zum Beweis des Fünffarbensatzes

Dies ist offenbar genau dann der Fall, wenn der Kreis $C := vv_1Pv_3v$ die Ecken v_2 und v_4 in G trennt. Hierzu wiederum reicht es zu zeigen, dass v_2 und v_4 in verschiedenen Gebieten von C liegen. Dazu wählen wir zunächst einen Punkt $x_2 \in D \cap s_2$ und einen Punkt $x_4 \in D \cap s_4$, beide ungleich v. Da in $D \setminus (s_1 \cup s_3) \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus C$ jeder Punkt durch einen Polygonzug mit x_2 oder mit x_4 verbunden werden kann, müssen x_2 und x_4 (und damit auch v_2 und v_4) in verschiedenen Gebieten von C liegen: sonst würde D nur ein Gebiet von C treffen, im Widerspruch zu Satz 3.1.1, nach dem jeder Punkt von C zum Rand beider Gebiete von C gehört.

C

Für $i, j \in \{1, \dots, 5\}$ sei $H_{i,j}$ der von den mit i und j gefärbten Ecken induzierte Untergraph von H, also $H_{i,j} := H[c^{-1}(\{i, j\})]$. Ist C_1 die Komponente von $H_{1,3}$, die v_1 enthält, so ist auch $v_3 \in C_1$: anderenfalls vertauschten wir an allen Ecken von C_1 die Farben 1 und 3 und erhielten so eine 5-Färbung von H, in der v_1 und v_3 beide mit 3 gefärbt wären; wir könnten dann v mit 1 färben. $H_{1,3}$ enthält also einen v_1–v_3-Weg P, der wie oben v_2 und v_4 in H trennt. Insbesondere liegen v_2 und v_4 dann in verschiedenen Komponenten von $H_{2,4}$, denn $P \cap H_{2,4} = \emptyset$. In einer dieser Komponenten können wir die Farben 2 und 4 vertauschen und dann v mit der freigewordenen Farbe färben. □

$H_{i,j}$

Als Hintergrund zum Vier- und Fünffarbensatz zitieren wir noch ein bekanntes Resultat:

Satz 4.1.3. (Grötzsch 1959)
Jeder ebene Graph, der kein Dreieck enthält, ist 3-färbbar.

4.2 Eckenfärbungen

Wie bestimmen wir die chromatische Zahl eines Graphen? Wie *finden* wir eine Eckenfärbung mit möglichst wenigen Farben? Wie verhält sich die chromatische Zahl des Graphen zu anderen Invarianten wie Durchschnittsgrad, Zusammenhang oder Taillenweite?

Unmittelbar aus der Definition der chromatischen Zahl ergibt sich die folgende Abschätzung:

Proposition 4.2.1. *Für jeden Graphen G mit m Kanten gilt*

$$\chi(G) \leqslant \tfrac{1}{2} + \sqrt{2m + \tfrac{1}{4}}\,.$$

Farbklasse

Beweis. Es sei c eine Eckenfärbung von G mit $k = \chi(G)$ Farben. Dann hat G zwischen je zwei Farbklassen $c^{-1}(i)$ mindestens eine Kante: anderenfalls könnten wir beide Klassen gleich färben. Damit gilt $m \geqslant \frac{1}{2}k(k-1)$; Auflösung dieser Ungleichung nach k ergibt die Behauptung. □

Greedy-Algorithmus

Eine naheliegende Weise, einen Graphen G zu färben, ist der folgende *Greedy-Algorithmus*: ausgehend von einer festen Eckenaufzählung $v_1, \dots, v_n$ von G färbe die Ecken v_i nacheinander jeweils mit der kleinstmöglichen Farbe $c(v_i) \in \mathbb{N}$, also mit der kleinsten Farbe, die kein Nachbar v_j von v_i mit $j < i$ bereits trägt. Offenbar ist G so, selbst bei ungünstiger Eckenaufzählung, stets mit $\Delta(G) + 1$ Farben färbbar. Ist G vollständig oder ein Kreis ungerader Länge, so ist dies sogar bestmöglich.

Allgemein jedoch ist diese Abschätzung natürlich zu grob: wenn wir die Ecke v_i färben, reicht bereits ein Vorrat von $d_{G[v_1,\dots,v_i]}(v_i) + 1$ Farben, da die Nachbarn v_j von v_i mit $j > i$ vom Algorithmus ja nicht berücksichtigt werden. Diese feinere Abschätzung wird dann besonders gut, wenn v_i in $G[v_1, \dots, v_i]$ minimalen Grad hat. Dies ist aber ohne weiteres erreichbar: wir wählen als v_n eine Ecke mit minimalem Grad in G, als v_{n-1} eine Ecke mit minimalem Grad in $G - v_n$, und so weiter; mit der sich ergebenden Eckennumerierung hat dann v_i jeweils minimalen Grad in $G[v_1, \dots, v_i]$.

Reihenzahl $\operatorname{col}(G)$

Die kleinste natürliche Zahl k, für die G eine Eckenaufzählung hat, in der jede Ecke zu weniger als k früheren Ecken benachbart ist, nennt man die *Reihenzahl* $\operatorname{col}(G)$ von G. Unsere eben betrachtete Eckenaufzählung zeigt, dass stets $\operatorname{col}(G) \leqslant \max_{H \subseteq G} \delta(H) + 1$ gilt. Umgekehrt ist für jedes $H \subseteq G$ jedoch $\operatorname{col}(G) \geqslant \operatorname{col}(H)$ und $\operatorname{col}(H) \geqslant \delta(H) + 1$, da bei jeder Eckenaufzählung von H die Anzahl der „früheren“ Nachbarn der letzten Ecke einfach deren Grad in H ist, also mindestens $\delta(H)$. Wir haben somit die folgende Abschätzung:

Proposition 4.2.2. *Für jeden Graphen G gilt*

$$\chi(G) \leqslant \mathrm{col}(G) = \max\{\,\delta(H) \mid H \subseteq G\,\} + 1\,.$$

□ [6.3]

Korollar 4.2.3. *Jeder Graph G hat einen Untergraphen vom Minimalgrad $\geqslant \chi(G) - 1$.* □ [7.2.1] [7.2.3] [9.2.3]

Die Reihenzahl eines Graphen ist eng mit seiner Arborizität verknüpft; vergleiche dazu die Bemerkung nach Satz 1.4.4.

Wir sahen eingangs, dass für jeden Graphen G die Abschätzung $\chi(G) \leqslant \Delta(G) + 1$ gilt, mit Gleichheit für vollständige Graphen und Kreise ungerader Länge. Der folgende Satz zeigt, dass in allen anderen Fällen die Abschätzung ein wenig verbessert werden kann:

Satz 4.2.4. (Brooks 1941)
Es sei G ein zusammenhängender Graph. Ist G weder vollständig noch ein Kreis ungerader Länge, so gilt $\chi(G) \leqslant \Delta(G)$.

Beweis. Wir verwenden Induktion nach $|G|$. Ist $\Delta(G) \leqslant 2$, so ist G ein Weg oder Kreis, und die Behauptung ist trivial. Es gelte daher $\Delta := \Delta(G) \geqslant 3$, und die Behauptung sei wahr für Graphen kleinerer Ordnung als $|G|$. Δ

Es sei $v \in G$ eine beliebige Ecke und $H := G - v$. Dann ist $\chi(H) \leqslant \Delta$: v, H
für jede Komponente H' von H gilt nämlich nach Induktionsannahme $\chi(H') \leqslant \Delta(H') \leqslant \Delta$, sofern H' nicht vollständig oder ein ungerader Kreis ist; in jenem Fall ist jedoch $\chi(H') = \Delta(H') + 1 \leqslant \Delta$, da jede Ecke von H' maximalen Grad hat und eine solche Ecke in G zusätzlich zu v benachbart ist. Es sei $c\colon V(H) \to \{1, \ldots, \Delta\}$ eine Δ-Färbung von H. c

Angenommen, $\chi(G) > \Delta$. Dann gilt

$$c(N(v)) = \{1, \ldots, \Delta\} \tag{1}$$

(und insbesondere $d(v) = \Delta$), da wir sonst c zu einer Δ-Färbung von G fortsetzen könnten. Es sei $N(v) =: \{v_1, \ldots, v_\Delta\}$ mit $c(v_i) = i$ für alle $v_1, \ldots, v_\Delta$ $i = 1, \ldots, \Delta$.

Mit $H_{i,j}$ für $i \neq j$ bezeichnen wir den Untergraphen von H, den die Ecken mit den Farben i und j aufspannen. $H_{i,j}$

Die Ecken v_i und v_j gehören stets zur gleichen Komponente $C_{i,j}$ von $H_{i,j}$. (2) $C_{i,j}$

Anderenfalls könnten wir in einer dieser Komponenten die Farben i und j vertauschen, so dass dann v_i und v_j gleich gefärbt sind – im Widerspruch zu (1).

$$C_{i,j} \text{ ist stets ein } v_i\text{–}v_j\text{-Weg.} \tag{3}$$

Zum Beweis von (3) sei P ein v_i–v_j-Weg in $C_{i,j}$. Wegen $d_H(v_i) \leqslant \Delta - 1$ hat v_i keine zwei gleich gefärbten Nachbarn in H: anderenfalls könnten wir v_i umfärben, im Widerspruch zu (1). Der Nachbar von v_i auf P ist also sein einziger Nachbar in $C_{i,j}$, und Entsprechendes gilt für v_j. Ist nun $C_{i,j} \neq P$, so hat P eine innere Ecke mit drei gleich gefärbten Nachbarn in H; es sei u die erste solche Ecke auf P (Abb. 4.2.1). Wiederum können wir u umfärben; in der entstehenden Färbung ist $P\mathring{u}$ eine Komponente von $H_{i,j}$, im Widerspruch zu (2).

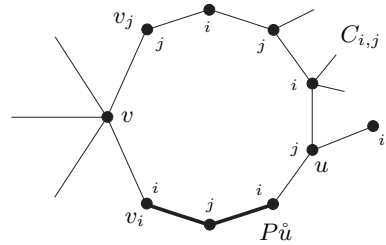


Abb. 4.2.1. Zum Beweis von (3) im Satz von Brooks

$$\text{Für verschiedene } i,j,k \text{ treffen die Wege } C_{i,j} \text{ und } C_{i,k} \text{ einander nur in } v_i. \tag{4}$$

Ist nämlich $v_i \neq u \in C_{i,j} \cap C_{i,k}$, so hat u zwei Nachbarn der Farbe j und zwei der Farbe k, und wir können u umfärben in eine Farbe $\ell \notin \{i,j,k\}$. In dieser neuen Färbung liegen nach (3) dann v_i und v_j in verschiedenen Komponenten von $H_{i,j}$, im Widerspruch zu (2).

Der Beweis der Hauptaussage folgt nun leicht. Sind die Ecken $v_1, \dots, v_\Delta$ paarweise benachbart, so hat jedes v_i bereits Δ Nachbarn in $N(v) \cup \{v\}$, und es folgt $G = G[v, v_1, \dots, v_\Delta] = K^{\Delta+1}$. Damit ist G vollständig, und es ist nichts zu zeigen. Wir dürfen somit $v_1v_2 \notin G$ annehmen. Es sei $u \neq v_2$ der Nachbar von v_1 auf dem Weg $C_{1,2}$. Dann ist $c(u) = 2$. Wir tauschen nun die Farben 1 und 3 in $C_{1,3}$ und nennen die neue Färbung c'; weiter seien $v_1' := v_3$ und $v_3' := v_1$, sowie $v_i' := v_i$ für $i \neq 1, 3$. Da die Färbung c beliebig gewählt war, gilt (1)–(4) analog auch für c'; es sei $C'_{i,j}$ der durch c' mit i und j gefärbte v_i'–v_j'-Weg. Als Nachbar von $v_1 = v_3'$ liegt u in $C'_{2,3}$, wegen $c'(u) = c(u) = 2$. Nach (4) für c wurde aber der Weg $\mathring{v}_1C_{1,2}$ nicht umgefärbt, und so gilt überdies $u \in \mathring{v}_1C_{1,2} \subseteq C'_{1,2}$. Dies widerspricht (4) für c'. □

Wie wir gesehen haben, hat ein Graph G hoher chromatischer Zahl auch hohen Maximalgrad, mindestens $\chi(G) - 1$. Was sonst können wir über andere Invarianten oder die Struktur eines Graphen mit hoher chromatischer Zahl sagen? Gibt es – wie im Satz von Kuratowski – irgendwelche „kanonischen“ hochchromatischen Graphen, die in jedem Graphen mit genügend hoher chromatischer Zahl als Teilgraph auftreten müssen?

Eine naheliegende mögliche Ursache für hohe chromatische Zahl, sagen wir $\chi(G) \geqslant k$, ist das Vorhandensein eines K^k-Teilgraphen. Dies ist eine lokale Eigenschaft von G, die mit beliebigen Werten globaler Invarianten wie ε und κ einhergehen kann. Die Annahme von $\chi(G) \geqslant k$ verrät uns daher nichts über diese Invarianten für G selbst. Sie impliziert jedoch die Existenz eines Teilgraphen, in dem diese Invarianten groß sind: nach Korollar 4.2.3 enthält G einen Teilgraphen H mit $\delta(H) \geqslant k - 1$, und mit Satz 0.4.3 daher auch einen Teilgraphen H' mit $\kappa(H') \geqslant \lceil \frac{1}{4}k \rceil$.

Doch das Auftreten irgendwelcher solcher Teilgraphen ist nicht äquivalent zu hohem $\chi(G)$, nicht einmal in rein qualitativem Sinne: wie man an vollständig bipartiten Graphen sieht, kann keine Annahme hoher[1] Werte für δ oder κ die chromatische Zahl höher als 2 treiben, geschweige denn beliebig hoch machen.

Die Gesamtheit aller Graphen mit Minimalgrad $\geqslant k - 1$ oder Zusammenhang $\geqslant \lceil \frac{1}{4}k \rceil$ kann also nicht die Rolle einer leicht beschreibbaren „Kuratowskimenge“ minimaler k-chromatischer Graphen spielen. Vielleicht kann eine geeignete Teilklasse dies. Doch kann keine solche Menge endlich sein. Der folgende grundlegende Satz von Erdős impliziert nämlich, dass es für kein k eine endliche Menge $\mathcal{H}$ von Graphen mit chromatischer Zahl mindestens 3 gibt, so dass jeder Graph mit chromatischer Zahl mindestens k einen Teilgraphen in $\mathcal{H}$ besitzt:

Satz 4.2.5. (Erdős 1959) [7.2.3]
Für jedes $k \in \mathbb{N}$ existiert ein Graph G mit Taillenweite $g(G) > k$ und chromatischer Zahl $\chi(G) > k$.

Satz 4.2.5 wurde zuerst nicht-konstruktiv unter Verwendung von Zufallsgraphen bewiesen; diesen Beweis werden wir in Kapitel 9.2 kennenlernen. Graphen hoher chromatischer Zahl und Taillenweite direkt zu konstruieren ist nicht leicht; vgl. Übung 24 für den einfachsten Fall.

Die Quintessenz des Satzes von Erdős ist, dass hohe chromatische Zahl entgegen unserer Eingangsvermutung als rein globales Phänomen auftreten kann: Graphen hoher Taillenweite sehen ja lokal überall wie

[1] Hoch im absoluten Sinne. In Kapitel 6 werden wir die Auswirkung von Kantendichte untersuchen, die ε auch relativ zur Ordnung des betrachteten Graphen groß werden lässt; das ist eine viel stärkere Annahme.

ein Baum aus, und sind insbesondere lokal überall 2-färbbar. Doch was genau eine hohe chromatische Zahl als globales Phänomen hervorrufen kann, bleibt ein Rätsel.

Dennoch existiert ein einfaches – wenn auch nicht immer kurzes – Verfahren, mit dem man jeden Graphen G mit $\chi(G) \geqslant k$ schrittweise aus vollständigen Graphen K^k gewinnen kann. Zu jedem $k \in \mathbb{N}$ definieren wir dazu die Klasse der *k-konstruierbaren* Graphen rekursiv wie folgt:

(i) Jeder K^k sei k-konstruierbar.

(ii) Ist G k-konstruierbar, und sind zwei Ecken x, y nicht benachbart, so sei auch $(G + xy)/xy$ k-konstruierbar.

(iii) Sind G_1 und G_2 zwei k-konstruierbare Graphen mit $|G_1 \cap G_2| = 1$, sowie y_1 und y_2 Nachbarn in G_1 bzw. G_2 der Ecke $x \in G_1 \cap G_2$, so sei auch $(G_1 \cup G_2) - xy_1 - xy_2 + y_1y_2$ k-konstruierbar (Abb. 4.2.2).

k-konstruierbar

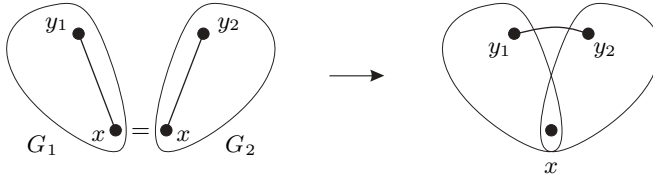


Abb. 4.2.2. Die *Hajós-Operation* (iii)

Induktiv entlang der Rekursion sieht man sofort, dass alle k-konstruierbaren Graphen – und damit auch deren Obergraphen – mindestens k-chromatisch sind. In (ii) etwa definiert jede Färbung von $(G + xy)/xy$ auch eine Färbung von G und benötigt daher, wie G nach Induktionsannahme, mindestens k Farben. In (iii) hat in jeder Färbung des konstruierten Graphen mindestens eine der Ecken y_1, y_2 eine andere Farbe als x, d.h. die Färbung induziert eine Färbung von G_1 oder von G_2 und benötigt daher mindestens k Farben.

Bemerkenswert ist jedoch, dass auch die Umkehrung gilt:

Satz 4.2.6. (Hajós 1961)
Für $k \in \mathbb{N}$ und einen Graphen G gilt genau dann $\chi(G) \geqslant k$, wenn G einen k-konstruierbaren Teilgraphen hat.

Beweis. Es sei G ein Graph mit $\chi(G) \geqslant k$; wir zeigen, dass G einen k-konstruierbaren Teilgraphen hat. Angenommen nicht; dann ist $k \geqslant 3$. Durch schrittweises Hinzufügen neuer Kanten machen wir G zunächst kantenmaximal mit der Eigenschaft, dass keiner seiner Teilgraphen k-konstruierbar ist. G ist dann nicht vollständig r-partit für irgendein r: wegen $\chi(G) \geqslant k$ gälte sonst $r \geqslant k$, und G enthielte den k-konstruierbaren Graphen K^k.

Da G nicht vollständig multipartit ist, ist Nichtbenachbartheit keine Äquivalenzrelation auf $V(G)$. Es gibt somit Ecken y_1, x, y_2 mit $y_1x, xy_2 \notin E(G)$ aber $y_1y_2 \in E(G)$. Da G kantenmaximal ist ohne k-konstruierbaren Teilgraphen, liegt jede der beiden Kanten xy_i in einem k-konstruierbaren Teilgraphen H_i von $G + xy_i$ $(i = 1, 2)$. y_1, x, y_2 H_1, H_2

Es sei H_2' eine isomorphe Kopie von H_2, die x und $H_2 - H_1$ enthält und sonst zu G disjunkt ist; der Isomorphismus $v \mapsto v'$ von H_2 nach H_2' sei auf $H_2 \cap H_2'$ die Identität. Dann gilt $H_1 \cap H_2' = \{x\}$, und nach (iii) ist H_2' v' *etc.*

$$H := (H_1 \cup H_2') - xy_1 - xy_2' + y_1y_2'$$

k-konstruierbar. Wir identifizieren in H nun nacheinander jede Ecke $v' \in H_2' - G$ mit ihrer Partnerecke v; da jeweils $vv' \notin E(H)$ gilt, ist jede solche Identifikation ein Konstruktionsschritt des Typs (ii). Am Ende dieses Prozesses erhalten wir den Graphen

$$(H_1 \cup H_2) - xy_1 - xy_2 + y_1y_2 \subseteq G\,;$$

dies ist der gesuchte k-konstruierbare Teilgraph von G. □

4.3 Kantenfärbungen

Für jeden Graphen G ist offenbar $\chi'(G) \geqslant \Delta(G)$. Für bipartite Graphen gilt hier sogar Gleichheit:

Proposition 4.3.1. (König 1916) [4.4.5]
Für jeden bipartiten Graphen G gilt $\chi'(G) = \Delta(G)$.

Beweis. Wir verwenden Induktion nach $\|G\|$. Für $\|G\| = 0$ ist die Behauptung wahr. Es sei nun G mit $\|G\| \geqslant 1$ gegeben, $\Delta := \Delta(G)$, und die Behauptung sei wahr für Graphen mit weniger Kanten. Wir wählen eine Kante $xy \in G$ und eine Kantenfärbung $E(G - xy) \to \{1, \dots, \Delta\}$. Kanten der Farbe α bezeichnen wir als *α-Kanten* usw. (0.6.1) Δ xy *α-Kante*

In $G - xy$ haben x und y jeweils höchstens $\Delta - 1$ inzidente Kanten. Wir können daher $\alpha, \beta \in \{1, \dots, \Delta\}$ finden, so dass x mit keiner α-Kante inzidiert und y mit keiner β-Kante. Können wir überdies $\alpha = \beta$ wählen, so färben wir xy mit dieser Farbe und erhalten so unsere gewünschte Δ-Kantenfärbung von G. α, β

Wir nehmen daher an, dass $\alpha \neq \beta$ ist und x mit einer β-Kante inzidiert. Wir setzen diese Kante zu einem maximalen in x beginnenden Kantenzug W fort, dessen Kanten abwechselnd mit β und α gefärbt sind. Da kein solcher Kantenzug eine Ecke zweimal enthalten kann (warum nicht?), existiert W und ist ein Weg. Weiter ist $y \notin W$: sonst würde

W in y mit einer α-Kante enden (nach Wahl von β) und somit gerade Länge haben, d.h. $W + xy$ wäre ein Kreis ungerader Länge in G (vgl. Proposition 0.6.1). Wir färben nun alle Kanten in W um, indem wir die Farben α und β auf W vertauschen. Nach Wahl von α und aufgrund der Maximalität von W sind auch nach der Umfärbung in ganz $G - xy$ keine gleichfarbigen Kanten benachbart. Wir haben somit eine Δ-Kantenfärbung von $G - xy$, in der weder x noch y mit einer β-Kante inzidiert. Indem wir xy mit β färben, können wir diese Färbung zu einer Δ-Kantenfärbung von G fortsetzen. □

Satz 4.3.2. (Vizing 1964)
Für jeden Graphen G gilt

$$\Delta(G) \leqslant \chi'(G) \leqslant \Delta(G) + 1\,.$$

Beweis. Wir zeigen die zweite Ungleichung mit Induktion nach $\|G\|$. $G = (V, E)$ Für $\|G\| = 0$ ist sie trivial. Zum Induktionsschritt sei $G = (V, E)$ gegeben, Δ $\Delta := \Delta(G) > 0$, und die Behauptung sei wahr für Graphen mit weniger Kanten. Statt „Kantenfärbung mit $(\Delta + 1)$ Farben“ sagen wir *Färbung* im Folgenden kurz „Färbung“. Eine mit einer Farbe α gefärbte Kante *α-Kante* nennen wir wieder eine *α-Kante*.

Zu jeder Kante $e \in G$ existiert nach Induktionsannahme eine Färbung von $G - e$. Zu jeder Ecke v gibt es wegen $d(v) \leqslant \Delta$ dabei eine Farbe $\beta \in \{1, \ldots, \Delta + 1\}$, die von keiner mit v inzidenten Kante ge- *fehlt* tragen wird; wir sagen, diese Farbe *β fehlt an v*. Ist α eine weitere Farbe, so existiert dann ein eindeutig bestimmter maximaler in v beginnender Kantenzug (möglicherweise trivial), dessen Kanten abwechselnd mit α und β gefärbt sind. Dieser Kantenzug ist ein Weg, und wir nennen ihn *α/β-Weg* den *α/β-Weg aus v*.

Wir nehmen an, G habe keine Färbung. Dann gilt:

> *Ist $xy \in E$ und eine Färbung von $G - xy$ gegeben, in der die Farbe α an x und die Farbe β an y fehlt, so endet der α/β-Weg aus y in x.* (∗)

Anderenfalls könnten wir die Kanten des Weges umfärben (durch Vertauschung der Farben α und β) und xy mit α färben; wir hätten dann eine Färbung von G, entgegen unserer Annahme.

x, y_0 Es sei $xy_0 \in G$ eine Kante; nach Induktionsannahme hat $G_0 :=$
G_0, c_0, α $G - xy_0$ eine Färbung c_0. Es sei α eine darin an x fehlende Farbe. Weiter
$y_1, \ldots, y_k$ sei $y_0, y_1, \ldots, y_k$ eine maximale mit y_0 beginnende Folge verschiedener Nachbarn von x in G, so dass in c_0 jeweils $c_0(xy_i)$ an y_{i-1} fehlt ($i =$
G_i $1, \ldots, k$). Auf jedem der Graphen $G_i := G - xy_i$ definieren wir eine

Färbung c_i durch

$$c_i(e) := \begin{cases} c_0(xy_{j+1}) & \text{für } e = xy_j \text{ mit } j \in \{0, \dots, i-1\} \\ c_0(e) & \text{sonst;} \end{cases}$$ c_i

beachte, dass in jeder dieser Färbungen die gleichen Farben an x fehlen wie in c_0.

Es sei nun β eine in c_0 an y_k fehlende Farbe. Natürlich fehlt β dann auch in c_k an y_k. Fehlte β auch an x, so könnten wir c_k zu einer Färbung von ganz G ergänzen, indem wir xy_k mit β färbten. Die Ecke x ist also (in jedem c_i) mit einer β-Kante inzident. Wegen der Maximalität von k gibt es daher ein $i \in \{1, \dots, k-1\}$ mit $c_0(xy_i) = \beta$. β i

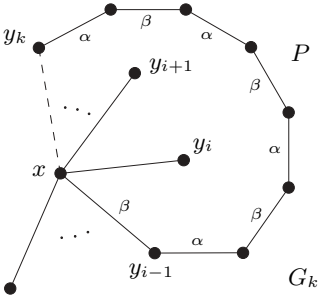


Abb. 4.3.1. Der α/β-Weg P in G_k

Es sei P der α/β-Weg aus y_k in G_k (bezüglich c_k; Abb. 4.3.1). P Nach $(*)$ endet P in x – und zwar mit einer β-Kante, da α an x fehlt. Wegen $\beta = c_0(xy_i) = c_k(xy_{i-1})$ ist dies die Kante xy_{i-1}. In c_0, und somit auch in c_{i-1}, fehlt β jedoch an y_{i-1}; es sei P' der α/β-Weg aus P' y_{i-1} in G_{i-1} (bezüglich c_{i-1}). Da P' eindeutig bestimmt ist, durchläuft P' zuerst $y_{i-1}Py_k$; beachte, dass die Kanten von $P\mathring{x}$ in c_{i-1} genauso gefärbt sind wie in c_k. In c_0, und daher auch in c_{i-1}, ist y_k jedoch mit keiner β-Kante inzident (nach Wahl von β). Somit endet P' in y_k, im Widerspruch zu $(*)$. □

Der Satz von Vizing teilt die Graphen hinsichtlich ihres chromatischen Indexes in zwei Klassen ein; Graphen G mit $\chi'(G) = \Delta(G)$ bezeichnet man häufig als Graphen der *Klasse 1*, Graphen G mit $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$ als Graphen der *Klasse 2*.

4.4 Listenfärbungen

In diesem Abschnitt betrachten wir eine Verallgemeinerung der bislang besprochenen Färbungsprobleme. Gibt man zu jeder Ecke eines Graphen G eine Liste speziell an dieser Ecke erlaubter Farben vor, so kann man fragen, ob G eine Eckenfärbung mit Farben aus den jeweiligen Listen besitzt. Analog kann man Kantenfärbungen aus vorgegebenen Listen betrachten.

Ist formal zu $G = (V, E)$ eine Familie $(S_v)_{v \in V}$ irgendwelcher Mengen gegeben, so nennen wir eine Eckenfärbung c von G mit $c(v) \in S_v$ für alle $v \in V$ eine Färbung *aus den Listen* S_v. Der Graph G heißt *k-listenfärbbar*, wenn er aus Listen von je k Farben stets färbbar ist, wenn also zu jeder Familie $(S_v)_{v \in V}$ mit $|S_v| = k$ für alle v eine Eckenfärbung aus den Listen S_v existiert. Das kleinste $k \in \mathbb{N}$, für das G k-listenfärbbar ist, ist die *listenchromatische Zahl* $\mathrm{ch}(G)$ von G.

$\mathrm{ch}(G)$

Kantenfärbungen aus Listen sind analog definiert. Das kleinste k, für das G aus Listen von je k Farben stets kantenfärbbar ist, ist der *listenchromatische Index* $\mathrm{ch}'(G)$ von G; formal definieren wir einfach $\mathrm{ch}'(G) := \mathrm{ch}(L(G))$ über den Kantengraphen $L(G)$ von G.

$\mathrm{ch}'(G)$

Zu zeigen, dass ein gegebener Graph k-listenfärbbar ist, ist im Prinzip schwerer als der Beweis seiner gewöhnlichen k-Färbbarkeit: letztere ist offenbar gerade der Spezialfall, dass alle Listen gleich sind. Entsprechendes gilt für Kantenfärbungen. Somit haben wir

$$\mathrm{ch}(G) \geqslant \chi(G) \quad \text{und} \quad \mathrm{ch}'(G) \geqslant \chi'(G)$$

für alle Graphen G.

Trotz der obigen (linken) Ungleichung gelten die bekannten allgemeinen oberen Schranken für die chromatische Zahl oftmals auch für die listenchromatische Zahl. Beispiele hierfür sind der Satz von Brooks und Proposition 4.2.2; insbesondere enthalten also auch Graphen hoher listenchromatischer Zahl stets Teilgraphen hohen Minimalgrads. Gleichwohl lassen sich leicht einzelne Graphen G finden, für die die Werte $\mathrm{ch}(G)$ und $\chi(G)$ auseinanderklaffen (Übung); die angesprochene Übertragbarkeit allgemeiner Schranken deutet somit nicht zuletzt darauf hin, wie weit diese Schranken vom tatsächlichen Wert der chromatischen Zahl abweichen können.

Dass die listenchromatische Zahl eine Invariante von grundsätzlich anderem Charakter ist als die chromatische Zahl, zeigt der folgende Satz. Wie bereits erwähnt, gibt es 2-chromatische Graphen mit beliebig hohem Minimalgrad, etwa die Graphen $K_{n,n}$. Die listenchromatische Zahl andererseits lässt sich durch hohe Vorgaben für Invarianten wie δ, ε oder κ in die Höhe treiben:

Satz 4.4.1. (Alon 1993)
Es existiert eine Funktion $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, so dass $\mathrm{ch}(G) \geqslant k$ gilt für alle Graphen G mit Durchschnittsgrad $d(G) \geqslant f(k)$, für alle $k \in \mathbb{N}$.

Der Beweis von Satz 4.4.1 verwendet probabilistische Methoden, wie wir sie in Kapitel 9 kennenlernen werden.

Obwohl Aussagen der Form $\mathrm{ch}(G) \leqslant k$ formal stärker sind als die entsprechende Aussage $\chi(G) \leqslant k$, sind sie zuweilen leichter zu beweisen. Ein hübsches Beispiel hierfür ist die Listenversion des Fünffarbensatzes: jeder plättbare Graph ist 5-listenfärbbar. Der Beweis hierfür benutzt weder den Fünffarbensatz noch die in dessen Beweis entscheidend eingehende Eulersche Polyederformel (3.2.9); wir erhalten den Fünffarbensatz somit neu bewiesen als Korollar.

Satz 4.4.2. (Thomassen 1994)
Jeder ebene Graph ist 5-listenfärbbar.

Beweis. Wir werden die folgende Aussage für alle ebenen Graphen G (3.2.8)
mit mindestens drei Ecken beweisen:

> *Ist jedes Innengebiet von G durch ein Dreieck und sein Außengebiet durch einen Kreis $C = v_1 \dots v_k v_1$ berandet, ist v_1 bereits mit der Farbe 1 und v_2 mit der Farbe 2 gefärbt, und ist zu jeder anderen Ecke von C eine Liste von mindestens 3 Farben und zu jeder Ecke von $G - C$ eine Liste von mindestens 5 Farben gegeben, so ist die Färbung der Ecken v_1, v_2 aus den gegebenen Listen zu einer Färbung von G erweiterbar.* (∗)

Dass aus (∗) in der Tat die Behauptung des Satzes folgt, sieht man so. Es sei ein beliebiger ebener Graph gegeben, zusammen mit einer Liste von 5 Farben für jede Ecke. Wir erweitern den Graphen durch schrittweises Hinzufügen ebener Kanten zu einem maximal ebenen Graphen G. Nach Proposition 3.2.8 ist G ein ebener Dreiecksgraph; es sei $v_1v_2v_3v_1$ der Rand seines Außengebietes. Wir färben v_1 und v_2 beliebig (unterschiedlich) aus ihren Listen und setzen diese Färbung mit (∗) zu einer Färbung von ganz G aus den gegebenen Listen fort.

Wir beweisen jetzt die Aussage (∗), mit Induktion nach $|G|$. Ist $|G| = 3$, so ist $G = C$, und die Behauptung ist trivial. Wir nehmen nun $|G| \geqslant 4$ an. Hat C eine Sehne vw, so liegt vw auf zwei eindeutig bestimmten verschiedenen Kreisen $C_1, C_2 \subseteq C + vw$ mit $v_1v_2 \in C_1$ und $v_1v_2 \notin C_2$. Für $i = 1, 2$ bezeichne G_i den Untergraphen von G, der von den Ecken aus C_i und seinem Innengebiet induziert wird (Abb. 4.4.1). Anwendung der Induktionsannahme, zunächst auf G_1 und dann – mit

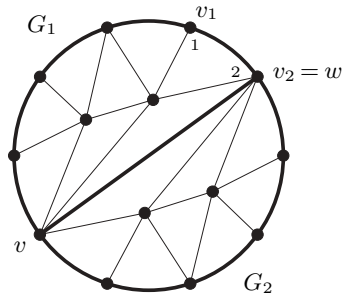


Abb. 4.4.1. Induktionsschritt mit Sehne vw

den dadurch für v und w vorgegebenen Farben – auf G_2, ergibt eine Färbung von G wie gewünscht.

$u_1, \ldots, u_m$

Hat C keine Sehne, so seien $v_1, u_1, \ldots, u_m, v_{k-1}$ die Nachbarn von v_k in ihrer natürlichen Reihenfolge (wie im ersten Beweis des Fünffarbensatzes); all diese Nachbarn u_i liegen im Innengebiet von C (Abb. 4.4.2). Da jedes Innengebiet von G durch ein Dreieck berandet ist,

C'

ist $P := v_1 u_1 \ldots u_m v_{k-1}$ ein Weg in G, und $C' := P \cup (C - v_k)$ ein Kreis.

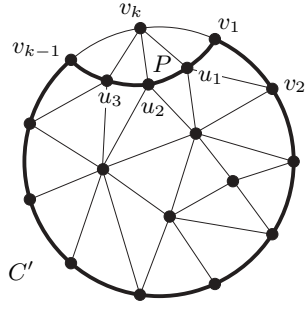


Abb. 4.4.2. Induktionsschritt ohne Sehne

Wir wählen zwei verschiedene Farben $j, \ell \neq 1$ aus der Liste von v_k und streichen diese Farben aus den Listen aller Ecken u_i. Jede Liste einer Ecke von C' hat dann noch mindestens 3 Farben, und so können wir C' samt den Ecken in seinem Innengebiet, also den Graphen $G - v_k$, nach Induktionsannahme färben. Mindestens eine der beiden Farben j, ℓ wird dabei nicht für v_{k-1} verwendet, und mit dieser Farbe färben wir v_k. □

Der Trick des obigen Beweises liegt, wie nicht selten bei Induktionsbeweisen, in einer fein ausbalancierten technischen Verschärfung der zu beweisenden Aussage. Dabei hilft entscheidend die bei gewöhnlichen Färbungen nicht gegebene Möglichkeit, die Anzahl der für eine Ecke zugelassenen Farben individuell auf diese Ecke zuzuschneiden, also von

der Struktur des Graphen abhängig zu gestalten. Dies legt den Gedanken nahe, dass es auch bei ungelösten Färbungsproblemen zuweilen vorteilhaft sein könnte, eine Aussage der Form $\mathrm{ch}(G) \leqslant k$ zu beweisen statt der formal schwächeren Aussage $\chi(G) \leqslant k$. Leider gilt dies jedoch nicht für das Vierfarbenproblem: plättbare Graphen sind *nicht* generell 4-listenfärbbar.

Wie wir gesehen haben, können die listenchromatische Zahl eines Graphen und seine chromatische Zahl beliebig weit auseinanderklaffen. Umso erstaunlicher ist es, dass für Kantenfärbungen kein entsprechendes Beispiel bekannt ist. Es wird sogar vermutet, dass es keines gibt:

Listenfärbungsvermutung. *Für jeden Graphen G gilt* $\mathrm{ch}'(G) = \chi'(G)$.

Wir werden die Listenfärbungsvermutung für bipartite Graphen beweisen. Der Beweis verwendet als Hilfsmittel Orientierungen von Graphen; siehe Kapitel 0.10. Ist D ein gerichteter Graph und $v \in V(D)$, so bezeichne $N^+(v)$ die Menge und $d^+(v)$ die Anzahl der Ecken w, für die D eine von v nach w gerichtete Kante enthält. $N^+(v)$ $d^+(v)$

Um zu sehen, wie Orientierungen im Zusammenhang mit Färbungsproblemen ins Spiel kommen, betrachten wir noch einmal den Greedy-Algorithmus aus Abschnitt 4.2. Um den Algorithmus auf einen Graphen G anzuwenden, müssen wir zunächst eine Eckenaufzählung $v_1, \dots, v_n$ von G festlegen. Diese Aufzählung definiert dann eine Orientierung von G: wir richten einfach jede Kante v_iv_j „rückwärts“, also von v_i nach v_j falls $i > j$ ist. Wenn der Algorithmus nun eine Ecke v_i färbt, berücksichtigt er nur diejenigen Kanten an v_i, die von v_i fort gerichtet sind: gilt $d^+(v) < k$ für alle Ecken v, so verwendet er höchstens k Farben.

Schreibt man dies formal umständlich als Induktionsbeweis nach k auf, so ist für den Induktionsschritt entscheidend, dass jede nicht mit der Farbe 1 gefärbte Ecke eine gerichtete Kante in die erste Farbklasse U schickt: in $G - U$ gilt dann $d^+(v) < k - 1$ für alle Ecken v, und wir können $G - U$ nach Induktionsannahme mit den verbleibenden $k - 1$ Farben färben.

Das folgende Lemma verallgemeinert diesen Ansatz auf Listenfärbungen, sowie auf Orientierungen D von G, die nicht notwendig durch eine Eckenaufzählung definiert sind sondern auch gewisse gerichtete Kreise enthalten dürfen. Dazu nennen wir eine unabhängige Eckenmenge U in D einen *Kern* von D, wenn D zu jeder Ecke $v \in D - U$ eine v–U - Kante enthält, die von v nach U gerichtet ist. Beachte, dass für $D \neq \emptyset$ auch ein Kern von D nie leer ist. *Kern*

Lemma 4.4.3. *Es sei H ein Graph und $(S_v)_{v \in V(H)}$ eine Familie von Farblisten. Besitzt H eine Orientierung D mit $d^+(v) < |S_v|$ für jede Ecke v, so dass jeder Untergraph von D einen Kern hat, dann ist H aus den Listen S_v färbbar.*

Beweis. Wir verwenden Induktion nach $|H|$. Für $|H| = 0$ ist $\emptyset$ stets eine geeignete Färbung. Zum Induktionsschritt sei nun $|H| > 0$. Es sei α eine der in den Listen S_v vorkommenden Farben, und D eine Orientierung von H mit den genannten Eigenschaften. Die Ecken $v \in H$ mit $\alpha \in S_v$ spannen in D einen nicht leeren Untergraphen D' auf. Nach Voraussetzung hat D' einen Kern U; auch U ist nicht leer.

Wir färben jede Ecke aus U mit der Farbe α und entfernen α aus den Listen S_v der Ecken $v \in D' - U$. Da jede dieser Ecken v eine Kante nach U schickt, erfüllt mit den so modifizierten Listen S'_v dann auch der gerichtete Graph $D - U$ die Bedingung $d^+(v) < |S'_v|$ für alle Ecken $v \in D - U$. Da $D - U$ eine Orientierung von $H - U$ ist, ist $H - U$ nach Induktionsannahme aus den modifizierten Listen färbbar. Da keine dieser Listen mehr die Farbe α enthält, ergänzt diese Färbung unsere Färbung $U \to \{\alpha\}$ zur gewünschten Listenfärbung von H. □

In unserem Beweis der Listenfärbungsvermutung für bipartite Graphen werden wir von der Variabilität der Listenlängen in Lemma 4.4.3 keinen Gebrauch machen. Dennoch ist sie auch hier entscheidend: für feste Listenlängen ist der einfache Induktionsbeweis des Lemmas nicht durchführbar.

Satz 4.4.4. (Galvin 1995)
Für jeden bipartiten Graphen G gilt $\mathrm{ch}'(G) = \chi'(G)$.

(1.1.4)

Beweis. Es sei $\{X, Y\}$ die zu G gehörige Eckenpartition, und E seine
X, Y, E Kantenmenge. Wir sagen, dass zwei Kanten sich *in X treffen*, wenn sie eine Ecke aus X gemeinsam haben; für Y formulieren wir entsprechend.
k, c Es sei $\chi'(G) =: k$, und $c\colon E \to \{1, \dots, k\}$ eine Kantenfärbung von G.

Wie immer gilt $\mathrm{ch}'(G) \geqslant k$; wir beweisen $\mathrm{ch}'(G) \leqslant k$. Wir zeigen
H mit Lemma 4.4.3, dass der Kantengraph H von G k-listenfärbbar ist. Dazu reicht es, eine Orientierung D von H zu finden mit $d^+(e) < k$ für jede Ecke e von H, so dass jeder Untergraph von D einen Kern hat.
D Zur Definition von D betrachten wir zwei benachbarte $e, e' \in E$, etwa mit $c(e) < c(e')$. Treffen e und e' sich in X, so richten wir die Kante $ee' \in H$ von e' nach e. Treffen e und e' sich in Y, so richten wir die

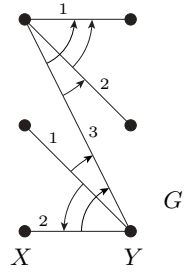


Abb. 4.4.3. Eine Orientierung des Kantengraphen von G

Kante $ee' \in H$ von e nach e' (Abb. 4.4.3).

Wie groß ist jetzt $d^+(e)$ zu gegebenem $e \in E = V(D)$? Ist etwa $c(e) = i$, so trägt jedes $e' \in N^+(e)$, das e in X trifft, eine Farbe aus $\{1, \dots, i-1\}$. Analog trägt jedes $e' \in N^+(e)$, das e in Y trifft, eine Farbe aus $\{i+1, \dots, k\}$. Da zwei Nachbarn e' von e, die e beide in X oder beide in Y treffen, auch zueinander benachbart sind und somit verschieden gefärbt, gilt damit $d^+(e) < k$ wie gewünscht.

Es bleibt zu zeigen, dass jeder Untergraph D' von D einen Kern hat. Dies folgt sofort aus Satz 1.1.4 für G, wenn wir die Richtungen in D als Präferenzlisten interpretieren: für jede Ecke $v \in X \cup Y$ und zwei mit v inzidente Kanten $e, e' \in V(D')$ schreiben wir $e <_v e'$, wenn die Kante ee' von H in D von e nach e' gerichtet ist. Jede stabile Paarung des Graphen $(X \cup Y, V(D'))$ ist dann ein Kern in D'. □ D'

Zusammen mit Proposition 4.3.1 erhalten wir: (4.3.1)

Korollar 4.4.5. *Für jeden bipartiten Graphen G gilt* $\mathrm{ch}'(G) = \Delta(G)$.
□

4.5 Perfekte Graphen

Wie bereits in Abschnitt 4.2 angedeutet, kann eine hohe chromatische Zahl als rein globales Phänomen auftreten: selbst wenn ein Graph G hohe Taillenweite hat, lokal also überall wie ein Baum aussieht, kann $\chi(G)$ beliebig hoch sein. Umgekehrt stellt sich die Frage, wie Graphen aussehen, in denen dieses globale Phänomen nirgends auftritt.

Um diese Frage zu präzisieren, brauchen wir zwei Bezeichnungen. Mit $\alpha(G)$ bezeichnen wir die größte Mächtigkeit einer unabhängigen Eckenmenge in G; dies ist die *Stabilitätszahl*, oder *Unabhängigkeitszahl*, von G. Mit $\omega(G)$ bezeichnen wir das größte n mit $K^n \subseteq G$; das ist die *Cliquenzahl* von G. Offenbar ist $\alpha(G) = \omega(\overline{G})$ und $\omega(G) = \alpha(\overline{G})$. $\alpha(G)$ $\omega(G)$

Ein Graph G heißt *perfekt*, wenn jeder Untergraph $H \subseteq G$ die chromatische Zahl $\chi(H) = \omega(H)$ hat, wenn also die triviale untere Schranke von $\omega(H)$ Farben stets ausreicht, um die Ecken von H zu färben. Während für einen beliebigen Graphen G der Nachweis einer Aussage der Form $\chi(G) > k$, also der Nichtfärbbarkeit mit einer gegebenen Anzahl von Farben, schwierig werden kann, existiert somit bei perfekten Graphen (und ihren Untergraphen) dafür stets ein einfaches „Zertifikat“ in Form eines geeigneten $K^{k+1} \subseteq G$. *perfekt*

Die Klasse der perfekten Graphen hat auf den ersten Blick keine besonders natürliche Struktur: nach Definition ist sie zwar abgeschlossen unter der Bildung von Untergraphen (wenn auch nur „erzwungenermaßen“), nicht aber unter allgemeiner Teilgraphenbildung oder Kanten-

kontraktion (Beispiele?). Gleichwohl ist die Perfektion ein zentraler Begriff der Graphentheorie; die Tatsache, dass eine Reihe wichtiger Graphenklassen – scheinbar zufällig – perfekt sind, ist hierfür nur ein oberflächlich sichtbares Symptom.[2]

Was für Graphen sind also beispielsweise perfekt? Bipartite Graphen etwa sind es, trivialerweise. Dass das Komplement eines bipartiten Graphen stets perfekt ist, ist äquivalent zum Überdeckungssatz 1.1.1 von König (Übung **37**). Sogenannte *Vergleichbarkeitsgraphen* sind perfekt, desgleichen *Intervallgraphen* (siehe Übungen); beide Klassen von Graphen treten in zahlreichen Anwendungen auf.

chordal

Wir betrachten hier beispielhaft nur eine Klasse perfekter Graphen, die sogenannten chordalen Graphen. Ein Graph heißt *chordal* (oder *trianguliert*), wenn er keinen induzierten Kreis der Länge $\geqslant 4$ enthält, wenn also jeder seiner Kreise der Länge $\geqslant 4$ eine Sehne hat. Um zu zeigen, dass chordale Graphen perfekt sind, charakterisieren wir zunächst die Struktur dieser Graphen. Ist G ein Graph mit Untergraphen G_1, G_2 und S, so dass $G = G_1 \cup G_2$ und $S = G_1 \cap G_2$ ist, so sagen wir, G entstehe aus G_1 und G_2 durch *Zusammenkleben entlang* S.

Zusammenkleben

[10.3.10] **Proposition 4.5.1.** *Ein Graph ist genau dann chordal, wenn er rekursiv durch Zusammenkleben entlang vollständiger Untergraphen konstruiert werden kann, ausgehend von vollständigen Graphen.*

Beweis. Entsteht G aus zwei chordalen Graphen G_1, G_2 durch Zusammenkleben entlang eines vollständigen Graphen, so ist G offenbar selbst chordal: jeder in G induzierte Kreis liegt ganz in G_1 oder ganz in G_2 und hat deshalb keine Länge $\geqslant 4$. Da vollständige Graphen trivialerweise chordal sind, sind es damit auch alle wie angegeben konstruierbaren Graphen.

Umgekehrt sei G ein chordaler Graph. Wir zeigen mit Induktion nach $|G|$, dass G wie angegeben konstruierbar ist. Ist G vollständig, so ist dies trivial. Nun sei G nicht vollständig, insbesondere $|G| > 1$, und jeder chordale Graph mit weniger als $|G|$ Ecken sei wie angegeben konstruierbar. Es seien $a, b \in G$ zwei nicht benachbarte Ecken, und $X \subseteq V(G) \setminus \{a, b\}$ ein minimaler a–b-Trenner. Weiter sei C die Komponente von $G - X$, die a enthält, $G_1 := G[V(C) \cup X]$, und $G_2 := G - C$. Dann entsteht G aus G_1 und G_2 durch Zusammenkleben entlang $S := G[X]$.

$a, b,\ X$ *C* *G_1, G_2* *S*

Da G_1 und G_2 als Untergraphen von G chordal sind und somit nach Induktionsannahme konstruierbar, reicht es zu zeigen, dass S vollständig ist. Angenommen, $s, t \in S$ seien zwei nicht benachbarte Ecken. Wegen

s, t

[2] Die Klasse der perfekten Graphen hat Dualitätseigenschaften, die tiefe Beziehungen etwa zur Optimierung und Komplexitätstheorie aufweisen und noch nicht völlig verstanden sind. Satz 4.5.4 lässt einen Hauch davon erahnen; mehr dazu findet der interessierte Leser in dem in den Notizen zitierten einführenden Übersichtsartikel von Lovász.

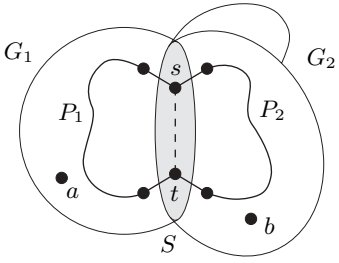


Abb. 4.5.1. Mit G_1 und G_2 ist auch G chordal

der Minimalität von $X = V(S)$ als a–b-Trenner haben s und t beide einen Nachbarn in C. In G_1 existiert somit ein X-Weg von s nach t; es sei P_1 ein kürzester solcher Weg. Analog enthält G_2 einen kürzesten X-Weg P_2 von s nach t. Damit ist $P_1 \cup P_2$ ein sehnenloser Kreis der Länge $\geqslant 4$ (Abb. 4.5.1), im Widerspruch zur Chordalität von G. □

Proposition 4.5.2. *Jeder chordale Graph ist perfekt.*

Beweis. Da vollständige Graphen perfekt sind, reicht es nach Proposition 4.5.1, zu zeigen, dass ein durch Zusammenkleben perfekter Graphen G_1, G_2 entlang eines vollständigen Graphen S entstandener Graph G wiederum perfekt ist. Dazu sei $H \subseteq G$ ein beliebiger Untergraph; wir zeigen $\chi(H) \leqslant \omega(H)$. G_1, G_2, S G, H

Es sei $H_i := H \cap G_i$ für $i = 1, 2$ und $T := H \cap S$. Dann ist T wiederum vollständig, und H entsteht aus H_1 und H_2 durch Zusammenkleben entlang T. Als Untergraph von G_i ist H_i jeweils mit $\omega(H_i)$ Farben färbbar. Da T vollständig ist und somit stets injektiv gefärbt, lassen sich zwei solche Färbungen (eine von H_1 und eine von H_2) stets zu einer Färbung von H mit $\max\{\omega(H_1), \omega(H_2)\} \leqslant \omega(H)$ Farben zusammensetzen, wenn nötig durch Permutation der Farben in einer der beiden Teilfärbungen. H_1, H_2, T □

Nach Definition der Perfektion ist jeder Untergraph eines perfekten Graphen wiederum perfekt. Die Eigenschaft der Perfektion ist daher durch verbotene Untergraphen charakterisierbar: es existiert eine Menge $\mathcal{H}$ nicht perfekter Graphen mit der Eigenschaft, dass ein Graph genau dann perfekt ist, wenn er keinen zu einem Element von $\mathcal{H}$ isomorphen Untergraphen hat. (Wir könnten etwa als $\mathcal{H}$ die Menge aller nicht perfekten Graphen mit Ecken in $\mathbb{N}$ wählen.)

Ein offensichtliches Ziel ist es nun, $\mathcal{H}$ möglichst klein zu halten. Und in der Tat ist das möglich: $\mathcal{H}$ muss lediglich alle Kreise ungerader Länge $\geqslant 5$ enthalten (die offensichtlich nicht perfekt sind) und die Komplemente solcher Kreise (die nach dem unten bewiesenen Satz 4.5.4 damit auch nicht perfekt sind). Dieses erst kürzlich bewiesene Resultat

würde berühmt als die *starke Vermutung über perfekte Graphen* von Berge (1963); es ist eines der tiefsten Resultate der Graphentheorie.

Satz 4.5.3. (Chudnovsky, Robertson, Seymour & Thomas 2002)
Ein Graph G ist genau dann perfekt, wenn weder G noch $\overline{G}$ einen Kreis ungerader Länge $\geqslant 5$ als Untergraphen enthält.

Der Beweis dieses Satzes ist zu lang und technisch, als dass eine hier mögliche Skizze der Tiefe des Satzes gerecht werden könnte. Um die perfekten Graphen dennoch ein wenig besser zu beleuchten, geben wir stattdessen zwei direkte Beweise einer wichtigen Folge des Satzes, die bis zu ihrem Beweis als Berges *schwache Vermutung über perfekte Graphen* bekannt war:

Satz 4.5.4. (Lovász 1972)
Ein Graph ist genau dann perfekt, wenn sein Komplement es ist.

Dem Beweis des Satzes schicken wir ein einfaches Lemma voraus. Es sei G ein Graph, $x \in G$ eine Ecke, und der Graph G' entstehe aus G durch Hinzufügung einer neuen Ecke x' und aller Kanten $x'y$ mit $y \in \{x\} \cup N_G(x)$. Wir sagen, G' sei aus G durch *Eckenerweiterung* entstanden (Abb. 4.5.2).

Eckenerweiterung

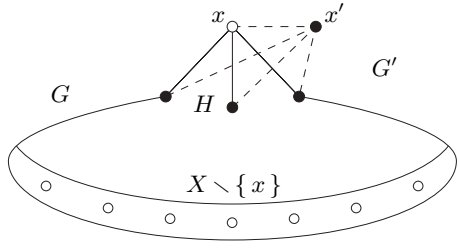


Abb. 4.5.2. Erweiterung der Ecke x

Lemma 4.5.5. *Ist G perfekt, und G' aus G durch Eckenerweiterung entstanden, so ist auch G' perfekt.*

Beweis. Wir verwenden Induktion nach $|G|$. Für $|G| = 1$ ist $G' = K^2$, und K^2 ist perfekt. Zum Induktionsschritt sei nun G perfekt und nicht trivial. Es sei $x \in G$ die durch $x' \in G'$ erweiterte Ecke. Zum Beweis, dass auch G' perfekt ist, ist lediglich $\chi(G') \leqslant \omega(G')$ zu zeigen: jeder echte Untergraph H von G' ist entweder isomorph zu einem Untergraphen von G oder durch Eckenerweiterung aus einem echten Untergraphen von G entstanden; in beiden Fällen ist H nach Voraussetzung und Induktionsannahme perfekt und daher mit $\omega(H)$ Farben färbbar.

x, x'

Es sei $\omega(G) =: \omega$; dann ist $\omega(G') \in \{\omega, \omega+1\}$. Ist $\omega(G') = \omega+1$, so gilt ω

$$\chi(G') \leqslant \chi(G) + 1 = \omega + 1 = \omega(G')$$

und wir sind fertig. Es gelte also $\omega(G') = \omega$. Dann liegt x in keinem $K^\omega \subseteq G$: zusammen mit x' ergäbe dieser sonst einen $K^{\omega+1}$ in G'. Wir färben G nun mit ω Farben. Da jeder $K^\omega \subseteq G$ die Farbklasse X von x aber nicht x selbst trifft, gilt $\omega(H) < \omega$ für $H := G - (X \setminus \{x\})$; siehe Abb. 4.5.2. Da G perfekt ist, hat H eine Färbung mit $\omega - 1$ Farben. Mit X ist aber auch die Menge $(X \setminus \{x\}) \cup \{x'\} = V(G' - H)$ unabhängig, und so können wir diese $(\omega-1)$-Färbung von H zu einer ω-Färbung von G' ergänzen. Damit gilt $\chi(G') \leqslant \omega = \omega(G')$ wie gewünscht. X H □

Beweis von Satz 4.5.4. Wir zeigen mit Induktion nach $|G|$, dass für jeden perfekten Graphen $G = (V, E)$ auch $\overline{G}$ perfekt ist. Für $|G| = 1$ ist dies klar; zum Induktionsschritt sei jetzt $|G| \geqslant 2$. Es sei $\mathcal{K}$ die Menge aller Eckenmengen vollständiger Teilgraphen von G. Weiter sei $\alpha(G) =: \alpha$, und $\mathcal{A}$ bezeichne die Menge aller unabhängigen Eckenmengen A in G mit $|A| = \alpha$. $G = (V, E)$ $\mathcal{K}$ $\alpha, \mathcal{A}$

Jeder echte Untergraph von $\overline{G}$ ist als Komplement eines echten Untergraphen von G nach Induktionsannahme perfekt; wir müssen zum Nachweis der Perfektion von $\overline{G}$ also nur $\chi(\overline{G}) \leqslant \omega(\overline{G})$ $(= \alpha)$ nachweisen. Wir zeigen dazu, dass es ein $K \in \mathcal{K}$ gibt mit $K \cap A \neq \emptyset$ für alle $A \in \mathcal{A}$; dann gilt

$$\omega(\overline{G} - K) = \alpha(G - K) < \alpha = \omega(\overline{G})\,,$$

und daher nach Induktionsannahme

$$\chi(\overline{G}) \leqslant \chi(\overline{G} - K) + 1 = \omega(\overline{G} - K) + 1 \leqslant \omega(\overline{G})$$

wie gewünscht.

Nehmen wir also an, es gäbe kein solches K; zu jedem $K \in \mathcal{K}$ existiert dann ein $A_K \in \mathcal{A}$ mit $A_K \cap K = \emptyset$. Wir ersetzen in G jede Ecke x durch einen vollständigen Graphen G_x der Ordnung A_K G_x

$$k(x) := \big|\{\, K \in \mathcal{K} \mid x \in A_K \,\}\big| \qquad k(x)$$

und verbinden für benachbarte $x, y \in V$ jeweils alle Ecken aus G_x mit allen Ecken aus G_y. Der entstandene Graph G' hat dann die Eckenmenge $\bigcup_{x \in V} V(G_x)$, und zwei Ecken $v \in G_x$ und $w \in G_y$ sind in G' genau dann benachbart, wenn entweder $x = y$ gilt oder $x \neq y$ und $xy \in E$. Für $U := \{\, x \in V \mid k(x) > 0 \,\}$ ist G' isomorph zu einem aus $G[U]$ durch sukzessive Eckenerweiterung konstruierten Graphen. Da $G[U]$ als Untergraph von G perfekt ist, ist nach Lemma 4.5.5 auch G' perfekt. Insbesondere gilt also G'

$$\chi(G') \leqslant \omega(G')\,. \qquad (1)$$

Um (1) zum Widerspruch zu führen, berechnen wir jetzt nacheinander $\omega(G')$ und $\chi(G')$. Nach Konstruktion von G' hat jeder maximale vollständige Teilgraph von G' die Form $G'[\bigcup_{x\in X} G_x]$ für ein $X \in \mathcal{K}$. Für
X ein geeignetes $X \in \mathcal{K}$ gilt also

$$\begin{aligned}\omega(G') &= \sum_{x\in X} k(x)\\ &= \bigl|\{\,(x,K) : x \in X,\ K \in \mathcal{K},\ x \in A_K\,\}\bigr|\\ &= \sum_{K\in\mathcal{K}} |X \cap A_K|\\ &\leqslant |\mathcal{K}| - 1\,; \end{aligned} \tag{2}$$

die letzte Ungleichung folgt aus der Tatsache, dass $|X \cap A_K| \leqslant 1$ ist für alle K (da A_K unabhängig ist und $G[X]$ vollständig), und $|X \cap A_X| = 0$ (nach Wahl von A_X). Andererseits gilt

$$\begin{aligned}|G'| &= \sum_{x\in V} k(x)\\ &= \bigl|\{\,(x,K) : x \in V,\ K \in \mathcal{K},\ x \in A_K\,\}\bigr|\\ &= \sum_{K\in\mathcal{K}} |A_K|\\ &= |\mathcal{K}| \cdot \alpha\,. \end{aligned}$$

Da $\alpha(G') \leqslant \alpha$ ist nach Konstruktion von G', gilt somit

$$\chi(G') \geqslant \frac{|G'|}{\alpha(G')} \geqslant \frac{|G'|}{\alpha} = |\mathcal{K}|\,. \tag{3}$$

Aus (2) und (3) zusammen erhalten wir

$$\chi(G') \geqslant |\mathcal{K}| > |\mathcal{K}| - 1 \geqslant \omega(G')\,,$$

im Widerspruch zu (1). □

Beim ersten Lesen mutet der Beweis von Satz 4.5.4 vielleicht etwas wie Zauberei an: er beginnt mit einem technischen Lemma über Eckenerweiterungen, überträgt das Problem dann auf einen so erweiterten Graphen G', brilliert dort ein wenig durch doppeltes Zählen – und ist unversehens fertig. Ein zweiter Blick jedoch lohnt sich, und so wollen wir mit dem Gesamtbeweis vor Augen noch einmal genauer hinschauen.

Zunächst beginnt der Beweis ganz kanonisch, etwa bis zur Annahme, dass es zu jedem $K \in \mathcal{K}$ ein $A_K \in \mathcal{A}$ gibt mit $K \cap A_K = \emptyset$. Zum Beweis,

dass dies der Perfektion von G widerspricht, würden wir jetzt gerne weiter zeigen, dass der durch die Mengen A_K insgesamt aufgespannte Untergraph $\tilde{G}$ von G eine zu hohe chromatische Zahl hat, größer als seine Cliquenzahl.

Wie aber können wir zeigen, dass $\chi(\tilde{G})$ groß ist? Wie stets bei Abschätzungen der chromatischen Zahl nach unten bleibt uns nur, die Ungleichung

$$\chi(\tilde{G}) \geqslant \frac{|\tilde{G}|}{\alpha(\tilde{G})} \geqslant \frac{|\tilde{G}|}{\alpha}$$

zu verwenden, statt der chromatischen Zahl von $\tilde{G}$ also den Quotienten $|\tilde{G}|/\alpha$ nach unten abzuschätzen. In dem Spezialfall, dass die Mengen A_K disjunkt sind, ist diese Schranke sogar scharf: dann gilt $|\tilde{G}| = |\mathcal{K}| \cdot \alpha$ und $\chi(\tilde{G}) = |\mathcal{K}|$, mit den Mengen A_K als Farbklassen. Überlappen die Mengen A_K einander jedoch stark, so ist $|\tilde{G}|$ bei gleichem α viel kleiner, die Schranke schlechter.

Die Idee bei der Definition von G' ist nun, die Mengen A_K gewissermaßen künstlich disjunkt zu machen: liegt eine Ecke x in k verschiedenen A_K, so ersetzen wir sie durch k Ecken, eine für jedes sie enthaltende A_K. Es bleibt die Aufgabe, die so erweiterte Eckenmenge von $\tilde{G}$ derart mit Kanten auszustatten, dass der dadurch entstehende Graph G' wiederum perfekt ist, die Abschätzung seiner chromatischen Zahl also zum gewünschten Widerspruch führt. Diese Aufgabe jedoch führt geradewegs zur Definition der Eckenerweiterung, und damit zum Lemma 4.5.5.

Die folgende Charakterisierung von Perfektion, Satz 4.5.6, ist symmetrisch in G und $\overline{G}$. Sie impliziert daher unmittelbar Satz 4.5.4, wofür wir auf diesem Wege einen zweiten Beweis erhalten.

Satz 4.5.6. (Lovász 1972)
Ein Graph G ist genau dann perfekt, wenn

$$|H| \leqslant \alpha(H) \cdot \omega(H) \qquad (*)$$

gilt für alle Untergraphen $H \subseteq G$.

Beweis. Wir schreiben $V(G) =: \{v_1, \ldots, v_n\}$, sowie $\alpha := \alpha(G)$ und $\omega := \omega(G)$. Die Notwendigkeit der Bedingung $(*)$ ist unmittelbar klar: wenn G perfekt ist, so kann jeder Untergraph H von G in höchstens $\omega(H)$ Farbklassen zerlegt werden, von denen jede höchstens $\alpha(H)$ Ecken enthält. v_i, n α, ω

Dass $(*)$ auch hinreichend für Perfektion ist, zeigen wir mit Induktion nach $n = |G|$. Dazu nehmen wir an, dass jeder Untergraph H von G die Bedingung $(*)$ erfüllt, aber G nicht perfekt ist.

Nach Induktionsannahme ist jeder echte Untergraph von G perfekt. Für jede nicht leere, unabhängige Eckenmenge U gilt dann

$$\chi(G-U) = \omega(G-U) = \omega\,. \tag{1}$$

(Die erste Gleichheit folgt direkt aus der Perfektion von $G-U$. Bei der zweiten ist „$\leqslant$“ klar, und $\chi(G-U) < \omega$ würde $\chi(G) \leqslant \omega$ implizieren, womit G entgegen unserer unserer Annahme perfekt wäre.)

Wir wenden nun (1) auf eine einzelne Ecke u an und betrachten eine ω-Färbung von $G-u$. Es sei K die Eckenmenge eines beliebigen K^ω in G. Offenbar gilt:

$$\textit{Ist } u \notin K\textit{, so trifft } K \textit{ jede Farbklasse von } G-u; \tag{2}$$

$$\textit{Ist } u \in K\textit{, so trifft } K \textit{ genau eine Farbklasse von } G-u \textit{ nicht.} \tag{3}$$

A_0 Es sei $A_0 = \{u_1, \dots, u_\alpha\}$ eine unabhängige Eckenmenge in G der Größe α. Weiter seien $A_1, \dots, A_\omega$ die Farbklassen einer ω-Färbung von $G-u_1$, sowie $A_{\omega+1}, \dots, A_{2\omega}$ die Farbklassen einer ω-Färbung von $G-u_2$, usw. Insgesamt erhalten wir $\alpha\omega+1$ unabhängige Eckenmengen $A_0, A_1, \dots, A_{\alpha\omega}$ in G. Für jedes $i = 0, \dots, \alpha\omega$ existiert nach (1) ein $K^\omega \subseteq G - A_i$; dessen Eckenmenge bezeichnen wir mit K_i.

A_i
K_i

Die Eckenmenge K eines K^ω in G erfüllt nun stets

$$K \cap A_i = \emptyset \textit{ für genau ein } i \in \{0, \dots, \alpha\omega\}. \tag{4}$$

Denn ist $K \cap A_0 = \emptyset$, so folgt $K \cap A_i \neq \emptyset$ für alle $i \neq 0$ aus (2), nach Definition der A_i. Ist $K \cap A_0 \neq \emptyset$, so gilt $|K \cap A_0| = 1$, und damit $K \cap A_i = \emptyset$ für genau ein $i \neq 0$: nach (3) für die eindeutig bestimmte Ecke $u \in K \cap A_0$, und (2) für alle anderen Ecken $u \in A_0$.

J Es sei J die reelle $(\alpha\omega+1) \times (\alpha\omega+1)$-Matrix mit Nullen in der
A Hauptdiagonalen und sonst überall Einsen, und $A = (a_{ij})$ die reelle $(\alpha\omega+1) \times n$-Matrix mit $a_{ij} = 1$ falls $v_j \in A_i$ und $a_{ij} = 0$ sonst. Analog
B sei $B = (b_{ij})$ die reelle $n \times (\alpha\omega+1)$ Matrix mit $b_{ij} = 1$ falls $v_i \in K_j$ und $b_{ij} = 0$ sonst. Nun gilt $|A_i \cap K_i| = 0$ für alle i nach Wahl der K_i, und daher $A_i \cap K_j \neq \emptyset$ und somit $|A_i \cap K_j| = 1$ für alle $i \neq j$, nach (4).

Demnach gilt

$$AB = J.$$

Da J invertierbar ist, hat A den Rang $\alpha\omega+1$. Es folgt $n \geqslant \alpha\omega+1$, was $(*)$ für $H := G$ widerspricht. □

Übungen

1.$^-$ Zeige, dass eine positive Lösung des Vierfarbenproblems für Landkarten (wie zu Beginn des Kapitels formuliert) in der Tat äquivalent ist zur Aussage des Vierfarbensatzes (dass jeder ebene Graph 4-färbbar ist).

2.$^-$ Zeige, dass es für das Vierfarbenproblem ausreicht, Landkarten ohne $(\geqslant 4)$-Länderecks zu betrachten – also solche, bei denen jeder Punkt auf dem Rand höchstens dreier Länder liegt.

3.$^-$ Versuche, den Beweis des Fünffarbensatzes in einen Beweis des Vierfarbensatzes umzuwandeln, wie folgt. Definiere v und H wie gehabt, nimm induktiv an, dass H eine 4-Färbung habe, und folge dann wieder dem Beweis des Fünffarbensatzes. Wo geht dies schief?

4. Leite die chromatische Zahl eines Graphen aus den chromatischen Zahlen seiner Blöcke her.

5.$^-$ Zeige, dass jeder Graph G eine Eckenaufzählung hat, mit der der Greedy-Algorithmus nur $\chi(G)$ Farben benötigt.

6. Finde zu jedem $n > 1$ einen bipartiten Graphen mit $2n$ Ecken, für den der Greedy-Algorithmus bei (un)geeigneter Eckenaufzählung n statt 2 Farben benötigt.

7. Betrachte das folgende Verfahren zur Eckenfärbung: finde zunächst eine maximale unabhängige Eckenmenge und färbe diese mit der ersten Farbe; finde dann im Restgraphen eine maximale unabhängige Eckenmenge und färbe diese mit der zweiten Farbe, usw. Vergleiche diesen Algorithmus mit dem Greedy-Algorithmus aus dem Text: welcher ist besser?

8. Zeige, dass die Schranke aus Proposition 4.2.2 für keinen Graphen schlechter ist als die aus Proposition 4.2.1.

9. Beschränke die Reihenzahl nach unten durch eine Funktion des Durchschnittsgrads.

10. Finde eine Funktion f, so dass jeder Graph der Arborizität mindestens $f(k)$ eine Reihenzahl von mindestens k hat, und eine Funktion g, so dass jeder Graph der Reihenzahl mindestens $g(k)$ eine Arborizität von mindestens k hat (für alle $k \in \mathbb{N}$).

11.$^-$ Ein k-chromatischer Graph G heißt *kritisch* k-chromatisch, wenn $G - v$ für jede Ecke $v \in G$ mit weniger als k Farben färbbar ist. Zeige, dass jeder k-chromatische Graph einen kritisch k-chromatischen Untergraphen hat, und dass der Minimalgrad jedes solchen Untergraphen mindestens $k - 1$ beträgt.

12. Bestimme alle kritisch 3-chromatischen Graphen.

13.$^+$ Zeige, dass jeder kritisch k-chromatische Graph $(k-1)$-kantenzusammenhängend ist.

14. Finde zu jedem $k \in \mathbb{N}$ eine Konstante $c_k > 0$, so dass jeder Graph G mit Unabhängigkeitszahl $\alpha(G) \leqslant k$ und hinreichend vielen Ecken einen Kreis der Länge mindestens $c_k |G|$ enthält.

15.$^-$ Finde einen Graphen G, für den der Satz von Brooks eine wesentlich schlechtere Abschätzung für $\chi(G)$ ergibt als Proposition 4.2.2.

16.$^+$ Führe den Satz von Brooks auf den Fall zurück, dass G 2-zusammenhängend und $\Delta(G) \geqslant 3$ ist. Beweise diesen Fall dann anhand der folgenden beiden Hilfsaussagen.

(i) Es sei $v_1, \dots, v_n$ eine Eckenaufzählung von G. Hat jedes v_i ($i < n$) einen Nachbarn v_j mit $j > i$, ist weiter $v_1v_n, v_2v_n \in E(G)$ und $v_1v_2 \notin E(G)$, so benötigt der Greedy-Algorithmus höchstens $\Delta(G)$ Farben.

(ii) Ist G nicht vollständig, und ist $v_n \in G$ eine Ecke maximalen Grades, so hat v_n Nachbarn v_1, v_2 wie in (i).

17.$^+$ Zeige die Gleichwertigkeit der folgenden Aussagen über Graphen G:

(i) $\chi(G) \leqslant k$;

(ii) G hat eine Orientierung, in der kein gerichteter Weg die Länge k hat;

(iii) G hat eine Orientierung wie in (ii), in der es auch keine gerichteten Kreise gibt.

18. Für einen Graphen G und $k \in \mathbb{N}$ bezeichne $P_G(k)$ die Anzahl der möglichen Eckenfärbungen $V(G) \to \{1, \dots, k\}$ von G. Zeige, dass P_G ein Polynom in k vom Grad $n := |G|$ ist, bei dem k^n den Koeffizienten 1 hat und k^{n-1} den Koeffizienten $-\|G\|$. (Man nennt P_G das *chromatische Polynom* von G).

(Tip: Induktion nach $\|G\|$.)

19.$^+$ Bestimme die Klasse aller Graphen G mit $P_G(k) = k\,(k-1)^{n-1}$. (Wie in der vorigen Übung sei $n := |G|$, und P_G bezeichne das chromatische Polynom von G.)

20. Ersetze in der Definition von „k-konstruierbar“ Axiome (ii) und (iii) durch

(ii)$'$ *Jeder Obergraph eines k-konstruierbaren Graphen sei k-konstruierbar*;

(iii)$'$ *Sind x, y_1, y_2 verschiedene Ecken von G und $y_1y_2 \in E(G)$, und ist sowohl $G + xy_1$ als auch $G + xy_2$ k-konstruierbar, dann sei auch G k-konstruierbar.*

Zeige, dass bezüglich dieser neuen Definition ein Graph genau dann k-konstruierbar ist, wenn seine chromatische Zahl mindestens k ist.

21.$^-$ Eine $n \times n$-Matrix mit Einträgen aus $\{1, \dots, n\}$ heißt *Lateinisches Quadrat*, wenn jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ in jeder Spalte und jeder Zeile genau einmal auftritt. Führe die Konstruktion Lateinischer Quadrate auf ein Färbungsproblem zurück.

22. Zeige ohne Proposition 4.3.1, dass $\chi'(G) = k$ gilt für jeden k-regulären bipartiten Graphen G.

23. Beweise Proposition 4.3.1 aus der Aussage der vorigen Übung.

24.$^+$ Zeige, dass es zu jedem $k \in \mathbb{N}$ einen k-chromatischen Graphen gibt, der kein Dreieck enthält.

25.$^-$ Zeige ohne Satz 4.4.2, dass jeder ebene Graph 6-listenfärbbar ist.

26. Finde einen 2-färbbaren Graphen, der nicht 2-listenfärbbar ist.

27.$^-$ Finde eine Funktion $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $\mathrm{ch}'(G) \leqslant f(\chi'(G))$ für alle Graphen G.

28. Vergleiche die listenchromatische Zahl eines Graphen mit seiner Reihenzahl: welche ist größer? Versuche, ohne Satz 4.4.1 zu benutzen, die ihm entsprechende Aussage für die Reihenzahl zu zeigen.

29.$^+$ Beweise $\mathrm{ch}(K_2^r) = r$.

(Tip: Induktion nach r.)

30. Die *Totalfärbungszahl* $\chi''(G)$ eines Graphen $G = (V, E)$ ist die geringste Anzahl von Farben, mit denen die Ecken und Kanten von G gleichzeitig so gefärbt werden können, dass je zwei benachbarte oder inzidente Elemente von $V \cup E$ verschiedene Farben tragen. Die *Totalfärbungsvermutung* besagt, dass $\chi''(G) \leqslant \Delta(G) + 2$ sei. Finde eine in ch' ausgedrückte obere Schranke für die Totalfärbungszahl, und benutze diese Schranke, um eine Abschwächung der Totalfärbungsvermutung aus der Listenfärbungsvermutung abzuleiten.

31. Hat jeder orientierte Graph einen Kern? Wenn nicht, besitzt jeder Graph eine Orientierung, in der jeder Untergraph einen Kern hat? Wenn nicht, besitzt zumindest jeder Graph eine Orientierung, die selbst einen Kern hat?

32.$^+$ Beweise den Satz von Richardson, dass jeder gerichtete Graph ohne gerichtete Kreise ungerader Länge einen Kern besitzt.

33.$^+$ Zeige, dass jeder bipartite plättbare Graph 3-listenfärbbar ist.

(Tip: Verwende die vorige Übung und Lemma 4.4.3.)

34.$^-$ Zeige, dass Perfektion weder hinsichtlich des Löschens von Kanten noch hinsichtlich der Kantenkontraktion abgeschlossen ist.

35.$^-$ Leite Satz 4.5.6 aus Satz 4.5.3 her.

36. Es seien $\mathcal{H}_1$ und $\mathcal{H}_2$ zwei minimale Mengen nicht perfekter Graphen, beide mit der Eigenschaft, dass ein Graph genau dann perfekt ist, wenn er keinen Untergraphen in $\mathcal{H}_i$ hat $(i = 1, 2)$. Enthalten $\mathcal{H}_1$ und $\mathcal{H}_2$ bis auf Isomorphie die gleichen Graphen?

37. Beweise mit Hilfe von Satz 1.1.1, dass das Komplement eines bipartiten Graphen stets perfekt ist.

38. Finde – unter Benutzung der Resultate dieses Kapitels – einen einzeiligen Beweis des folgenden Satzes von König: in jedem bipartiten Graphen ohne isolierte Ecken ist die geringste Mächtigkeit einer alle Ecken treffenden Kantenmenge gleich der größten Mächtigkeit einer unabhängigen Eckenmenge.

39. Ein Graph G ist ein *Vergleichbarkeitsgraph*, wenn eine Halbordnung auf $V(G)$ existiert, in der genau die in G benachbarten Elemente vergleichbar sind. Zeige, dass jeder Vergleichbarkeitsgraph perfekt ist.

40. Ein Graph $G = (V, E)$ heißt *Intervallgraph*, wenn es eine Menge $\{ I_v \mid v \in V \}$ reeller Intervalle gibt, so dass genau dann $I_u \cap I_v \neq \emptyset$ gilt, wenn $uv \in E$ ist.

    (i) Zeige, dass jeder Intervallgraph chordal ist.

    (ii) Zeige, dass das Komplement eines Intervallgraphen stets ein Vergleichbarkeitsgraph ist.

    (Umgekehrt ist auch jeder chordale Graph, dessen Komplement ein Vergleichbarkeitsgraph ist, ein Intervallgraph; dies ist ein Satz von Gilmore und Hoffman (1964).)

41. Zeige, dass $\chi(H) \in \{\omega(H), \omega(H) + 1\}$ gilt für jeden Kantengraphen $H = L(G)$.

42.$^+$ Charakterisiere die Graphen G, deren Kantengraphen perfekt sind.

43. Zeige, dass ein Graph G genau dann perfekt ist, wenn jeder nicht leere Untergraph H von G eine unabhängige Eckenmenge A mit $\omega(H - A) < \omega(H)$ enthält.

44.$^+$ Betrachte die Graphen G, für die bei jedem Untergraphen $H \subseteq G$ jede maximale unabhängige Eckenmenge von H jeden maximalen vollständigen Teilgraphen von H trifft.

    (i) Zeige, dass diese Graphen G perfekt sind.

    (ii) Zeige, dass diese Graphen G genau die Graphen sind, die keinen P^3 als Untergraphen enthalten.

45.$^+$ Zeige, dass man in jedem perfekten Graphen G eine Menge $\mathcal{A}$ unabhängiger Eckenmengen und eine Menge $\mathcal{O}$ von Eckenmengen vollständiger Teilgraphen finden kann, so dass $\bigcup \mathcal{A} = V(G) = \bigcup \mathcal{O}$ gilt und jede Menge aus $\mathcal{A}$ jede Menge aus $\mathcal{O}$ trifft.

    (Tip: Lemma 4.5.5.)

46.$^+$ Es sei G ein perfekter Graph. Wie im Beweis von Satz 4.5.4 ersetze jede Ecke x von G durch einen perfekten Graphen G_x; die G_x seien jedoch nicht notwendig vollständig. Zeige, dass dennoch der entstehende Graph G' wiederum perfekt ist.

Notizen

Das Standardwerk über Färbungsprobleme ist T.R. Jensen & B. Toft, *Graph Coloring Problems*, Wiley 1995. Das Buch gibt nach einem kurzen Überblick über die wichtigsten bekannten Resultate und Forschungsrichtungen des Gebiets eine umfassende Darstellung mehr als 200 offener Färbungsprobleme. Gewissermaßen im Vorübergehen, als Hintergrund zu den einzelnen Problemen, referiert es die gesamte gegenwärtige Färbungstheorie und verweist auf die entsprechende Literatur. Die meisten der folgenden Bemerkungen sind bei Jensen & Toft weiter ausgeführt; alle hier nicht gegebenen Quellenverweise sind dort zu finden.

Das *Vierfarbenproblem*, ob die Länder einer Landkarte stets so mit vier Farben gefärbt werden können, dass keine zwei Länder mit gemeinsamer Grenze gleich gefärbt sind, war eine Frage, die ein gewisser Francis Guthrie 1852 seinem Bruder Frederick stellte; dieser war damals Mathematikstudent in Cambridge. Bekannt wurde das Problem durch einen Vortrag von Cayley an der London Mathematical Society im Jahre 1878. Bereits im Jahr darauf gab Kempe einen vermeintlichen Beweis, der 1890 von Heawood zum Fünffarbensatz korrigiert wurde. Im Jahre 1880 kündigte Tait weitere Beweise an, die er jedoch nie (erfolgreich) ausarbeitete; siehe die Notizen zu Kapitel 8.

Der erste weitgehend akzeptierte Beweis des Vierfarbensatzes stammt von Appel & Haken (1977). Der Beweis beruht auf Ideen, die bereits in der Arbeit von Kempe angelegt sind und später von Birkhoff und Heesch wesentlich weiterentwickelt wurden. Zunächst wird gezeigt, dass jeder ebene Dreiecksgraph eine von 1482 sogenannten „unvermeidbaren Konfigurationen“ enthalten muss. Im zweiten Schritt wird mit Hilfe eines Computers gezeigt, dass jede dieser Konfigurationen „reduzierbar“ ist: jeder sie enthaltende ebene Dreiecksgraph kann durch die Zusammensetzung von 4-Färbungen kleinerer ebener Dreiecksgraphen ebenfalls 4-gefärbt werden. Nimmt man beide Schritte zusammen, so folgt der Vierfarbensatz induktiv.

Auch der Beweis von Appel & Haken ist nicht ohne Kritik geblieben, nicht nur wegen der Verwendung eines Computers. Eine Antwort auf solche Kritik und eine Reihe von Korrekturen einzelner Fehler (durch Erweiterung der Liste unvermeidbarer Konfigurationen) geben die Autoren in K. Appel & W. Haken, *Every Planar Map is Four Colorable*, American Mathematical Society 1989, einer 741 Seiten starken Langfassung ihres Beweises. Einen wesentlich kürzeren und einfacheren Beweis, der im Wesentlichen auf den gleichen Ideen beruht (und auch einen Computer heranzieht) aber zumindest in seinem schriftlichen Teil normal nachvollziehbar ist, geben N. Robertson, D. Sanders, P.D. Seymour & R. Thomas, The four-colour theorem, *J. Comb. Theory B* **70** (1997).

Färbungsprobleme auf Flächen höheren Geschlechts haben wir in diesem Kapitel gar nicht angesprochen. Gleichwohl bilden sie einen wesentlichen und interessanten Teil der Färbungstheorie; siehe B. Mohar & C. Thomassen, *Graphs on Surfaces*, Johns Hopkins University Press 2001.

Einen relativ kurzen Beweis des Satzes von Grötzsch gibt C. Thomassen, A short list color proof of Grötzsch's theorem, *J. Comb. Theory B* **88** (2003), 189–192. Der in den Übungen angedeutete kürzere Beweis des Satzes von Brooks, bei dem der Greedy-Algorithmus auf eine geschickte Eckenaufzählung

angewendet wird, stammt von Lovász (1973). Lovász (1968) begann auch als erster, Graphen mit beliebig hoher Taillenweite und chromatischer Zahl zu *konstruieren* – Graphen, deren Existenz Erdős zehn Jahre zuvor probabilistisch bewiesen hatte.

A. Urquhart, The graph constructions of Hajós and Ore, *J. Graph Theory* **26** (1997), 211–215, zeigte, dass die Graphen mit chromatischer Zahl $\geqslant k$ nicht nur alle einen k-konstruierbaren Teilgraphen haben (wie im Satz von Hajós), sondern sogar alle selbst k-konstruierbar sind. Ansätze, eine hohe chromatische Zahl mit algebraischen Mitteln nachzuweisen, wurden entwickelt von Kleitman & Lovász (1982), von Alon & Tarsi (1992), und von Babson & Kozlov (2004).

Listenfärbungen wurden bereits 1976 von Vizing betrachtet. Er bewies unter anderem die Listenversion des Satzes von Brooks; einen kürzeren Beweis geben A.V. Kostochka, M. Stiebitz und B. Wirth, The colour theorems of Brooks and Gallai extended, *Discrete Math.* **162** (1996) 299–303. Voigt (1993) konstruierte einen ebenen Graphen mit 238 Ecken, der nicht 4-listenfärbbar ist; Thomassens Listenversion des Fünffarbensatzes ist somit bestmöglich.

Sowohl die Listenfärbungsvermutung als auch Galvins Beweis des bipartiten Falls gelten allgemeiner für Multigraphen. Unser Beweis von Satz 4.4.4 folgt Galvins Originalarbeit; eine etwas kompaktere Fassung, in der die gerichteten Kantengraphen und ihre Kerne nicht explizit auftreten sondern in das Hauptargument integriert sind, gibt Slivnik in *Comb. Probab. Comput.* **5** (1996), 91–94.

Einen Überblick über Resultate, Techniken und offene Probleme aus dem Bereich der Listenfärbungen gibt N. Alon, Restricted colorings of graphs, in (K. Walker, Hrsg.): *Surveys in Combinatorics*, LMS Lecture Notes **187**, Cambridge University Press 1993. Dort findet sich auch ein Beweis von Satz 4.4.1. Kahn (1994) zeigte, dass die Listenfärbungsvermutung asymptotisch richtig ist: für jedes $\epsilon > 0$ gilt $\mathrm{ch}'(G) \leqslant (1+\epsilon)\Delta(G)$ für alle Graphen G mit hinreichend großem $\Delta(G)$.

Die Totalfärbungsvermutung (Übung **30**) wurde um 1965 unabhängig von Vizing und Behzad aufgestellt; siehe Jensen & Toft.

Eine leicht lesbare Einführung in perfekte Graphen samt Anwendungen gibt M.C. Golumbic, *Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs*, Academic Press 1980. Eine umfassendere Behandlung gibt A. Schrijver, *Combinatorial optimization*, Springer 2003. Übersichtsartikel zu unterschiedlichen Aspekten perfekter Graphen finden sich in *Perfect Graphs* von J. Ramirez-Alfonsin & B. Reed (eds.), Wiley 2001. Unser erster Beweis von Satz 4.5.4 folgt Lovász's Übersichtsartikel in L.W. Beineke & R.J. Wilson (Hrsg.), *Selected Topics in Graph Theory 2*, Academic Press 1983. Unser zweiter Beweis, der Beweis des Satzes 4.5.6, ist von G.S. Gasparian, Minimal imperfect graphs: a simple approach, *Combinatorica* **16** (1996), 209–212. Satz 4.5.3 wurde von Chudnovsky, Robertson, Seymour und Thomas bewiesen, The strong perfect graph theorem (erscheint in *Ann. Math.*). Chudnovsky, Cornuejols, Liu, Seymour und Vušković, Recognizing Berge graphs, *Combinatorica* **25** (2005), 143–186, entwarfen einen Algorithmus mit Laufzeit $O(n^9)$, der den Inputgraphen auf die Existenz von „Löchern" (ungeraden Kreise der Länge $\geqslant 5$) und „Antilöchern" (Komplemente von Löchern) als Untergraphen testet, und nach Satz 4.5.3 damit auf Perfektion.

5 Flüsse

Stellen wir uns einen Graphen einmal als ein Netzwerk vor: durch seine Kanten fließe ein Strom irgendwelcher Art – Wasser, Elektrizität, Daten oder Ähnliches. Wie könnten wir dies genauer modellieren?

Wesentliche Eigenschaften eines solchen Flusses haben wir erfasst, wenn wir zu jeder Kante $e = xy$ wissen, wieviel Fluss durch diese Kante fließt, und in welche Richtung: von x nach y oder umgekehrt. In unserem Modell könnten wir diese Information so beschreiben: fließt durch e ein Fluss der Stärke $k \in \mathbb{N}$ von x nach y, so ordnen wir dem Eckenpaar (x, y) die Zahl k zu; fließt durch e ein Fluss der Stärke k umgekehrt von y nach x, so ordnen wir (x, y) die Zahl $-k$ zu. Ist $f\colon V^2 \to \mathbb{Z}$ eine solche Zuordung, so gilt offenbar $f(x, y) = -f(y, x)$ für je zwei benachbarte Ecken $x, y \in G$.

In dem zu modellierenden Netzwerk wird gewöhnlich nur an wenigen ausgezeichneten Knotenpunkten Strom entspringen oder versickern: aus jedem anderen Punkt fließt gerade so viel Strom heraus wie in ihn hineinfließt. Was bedeutet dies für unser Modell? Es bedeutet, dass f an den meisten Ecken x der *Kirchhoffschen Regel*

Kirchhoff-Regel

$$\sum_{y \in N(x)} f(x, y) = 0$$

genügt.

Jede Abbildung $f\colon V^2 \to \mathbb{Z}$ mit den genannten beiden Eigenschaften werden wir als *Fluss* auf G bezeichnen; die Gruppe $\mathbb{Z}$ werden wir dabei gelegentlich durch andere Gruppen ersetzen, und statt schlichter Graphen werden wir allgemeiner Multigraphen betrachten.[1] Wie wir sehen werden, ist die Theorie solcher Flüsse nicht nur in der offensichtlichen Weise auf echte Flüsse anwendbar: sie fügt sich überdies so

[1] Sätze, deren Beweise auf Aussagen aus früheren Kapiteln zurückgreifen, werden wir nur für schlichte Graphen formulieren. Gleichwohl gelten auch diese Aussagen sinngemäß für Multigraphen.

nahtlos in den Gesamtrahmen der Graphentheorie ein, dass sich ganz erstaunliche Beziehungen zu anderen Fragen ergeben – insbesondere zu Zusammenhangs- und Färbungsproblemen.

5.1 Flüsse und Rundflüsse

$G = (V, E)$

Im Zusammenhang mit Flüssen werden wir von den „Richtungen“ einer Kante sprechen müssen. Da in einem Multigraphen $G = (V, E)$ eine Kante $e = xy$ durch x und y nicht mehr eindeutig bestimmt ist, reicht dazu die Festlegung eines der Paare (x, y) und (y, x) nicht mehr aus: wir müssen e stets dazu nennen. Wir definieren daher Kantenrichtungen als Tripel:

$\vec{E}$

$$\vec{E} := \{\, (e, x, y) \mid e \in E;\ x, y \in V;\ e = xy \,\}.$$

Richtung (e, x, y)

Jede Kante $e = xy$ mit $x \neq y$ hat damit die zwei *Richtungen* (e, x, y) und (e, y, x); Schlingen $e = xx$ haben nur eine Richtung, das Tripel (e, x, x).[2]

$\overleftarrow{e}$

Zu gegebenem $\vec{e} = (e, x, y) \in \vec{E}$ schreiben wir $\overleftarrow{e} := (e, y, x)$, und für $\vec{F} \subseteq \vec{E}$ setzen wir

$\overleftarrow{F}$

$$\overleftarrow{F} := \{\, \overleftarrow{e} \mid \vec{e} \in \vec{F} \,\}.$$

Beachte, dass $\vec{E}$ selbst symmetrisch ist, d.h. es gilt $\overleftarrow{E} = \vec{E}$.

Für $X, Y \subseteq V$ (nicht notwendig disjunkt) schreiben wir

$\vec{F}(X,Y)$

$$\vec{F}(X, Y) := \{\, (e, x, y) \in \vec{F} \mid x \in X;\ y \in Y;\ x \neq y \,\},$$

$\vec{F}(x,Y)$

sowie $\vec{F}(x, Y) := \vec{F}(\{x\}, Y)$ etc. Zur Abkürzung setzen wir

$\vec{F}(x)$

$$\vec{F}(x) := \vec{F}(x, V) = \vec{F}(\{x\}, \overline{\{x\}}).$$

$\overline{X}$

(Hier, wie auch später, bezeichnet $\overline{X}$ das Komplement $V \setminus X$ einer Eckenmenge $X \subseteq V$.) Beachte, dass etwaige Schlingen an Ecken $x \in X \cap Y$ in $\vec{F}(X, Y)$ und $\vec{F}(x)$ nicht enthalten sind.

Es sei H eine kommutative Halbgruppe.[3] Wir schreiben H additiv

0

und bezeichnen das neutrale Element von H mit 0. Für Eckenmengen

[2] Beachte, dass G selbst weiterhin ein ungerichteter Multigraph ist: seine Kanten sind nicht, wie bei gerichteten Graphen, bereits von vornherein auf eine Richtung festgelegt. Diese Flexibilität ist wichtig und vereinfacht die Begriffsbildung erheblich.

[3] Dieses Kapitel enthält keinerlei Gruppentheorie. Die einzigen Halbgruppen, die wir für H betrachten werden, sind die natürlichen, ganzen und reellen Zahlen, die zyklischen Gruppen $\mathbb{Z}_k$ der ganzen Zahlen modulo k, und (einmal) die Kleinsche Vierergruppe.

$X, Y \subseteq V$ (nicht notwendig disjunkt) und eine Abbildung $f\colon \vec{E} \to H$ setzen wir f

$$f(X,Y) := \sum_{\vec{e} \in \vec{E}(X,Y)} f(\vec{e})\,. \tag{1}$$

$f(X,Y)$

Statt $f(\{x\},Y)$ schreiben wir wieder $f(x,Y)$ etc. $f(x,Y)$

Im Folgenden nehmen wir an, dass H sogar eine (abelsche) Gruppe ist. Wir nennen f einen *Rundfluss* auf G mit Werten in H, oder kurz einen *H-Rundfluss*, wenn f den folgenden beiden Bedingungen genügt: *Rundfluss*

(F1) $f(e,x,y) = -f(e,y,x)$ für alle $(e,x,y) \in \vec{E}$ mit $x \neq y$;
(F2) $f(v,V) = 0$ für alle $v \in V$.

Erfüllt f die Bedingung (F1), so gilt

$$f(X,X) = 0$$

für jedes $X \subseteq V$. Erfüllt es (F2), so gilt

$$f(X,V) = \sum_{x \in X} f(x,V) = 0\,.$$

Damit folgt:

[5.3.1] [5.5.2] [5.6.1]

Proposition 5.1.1. *Ist f ein Rundfluss, so gilt $f(X,\overline{X}) = 0$ für jede Eckenmenge $X \subseteq V$.*

Beweis. $f(X,\overline{X}) = f(X,V) - f(X,X) = 0 - 0 = 0$. □

Da Brücken alleine einen Schnitt bilden, haben nach Proposition 5.1.1 Rundflüsse auf Brücken den Wert null:

Korollar 5.1.2. *Ist f ein Rundfluss und $e = xy$ eine Brücke in G, so gilt $f(e,x,y) = 0$.* □

5.2 Netzwerke

In diesem Abschnitt geben wir eine exemplarische Einführung in die Art von Netzwerktheorie, die sich als Beweistechnik bei Zusammenhangs- und Paarungsproblemen als natürlich und hilfreich erwiesen hat. Wir beweisen dazu einen mittlerweile klassischen Satz dieser Theorie, das sogenannte *max-flow min-cut theorem* von Ford und Fulkerson. Aus diesem Satz folgt bereits ohne Schwierigkeiten der Satz von Menger (siehe Übungen), eine der Grundlagen aller Zusammenhangsuntersuchungen.

Als Ausgangspunkt betrachten wir die Aufgabe, Flüsse zu modellieren, die an einem Netzwerkknoten s entspringen und an einem anderen Netzwerkknoten t versickern. Jede Netzwerkleitung zwischen zwei benachbarten Knoten habe eine gewisse Kapazität, die die Stromstärke durch diese Leitung beschränkt. Wir interessieren uns dann für die maximale Stärke des Gesamtstroms von s nach t durch das Netzwerk. Diese hängt offenbar irgendwie von den zugrundegelegten Kapazitäten ab – wie genau, wollen wir herausfinden.

$G = (V, E)$
s, t, c, N
Netzwerk

Es seien $G = (V, E)$ ein Multigraph und $s, t \in V$ zwei fest gewählte verschiedene Ecken. Es sei $c\colon \vec{E} \to \mathbb{N}$ eine Abbildung; wir nennen c eine *Kapazitätsfunktion* auf G und das Tupel $N := (G, s, t, c)$ ein *Netzwerk*. Beachte, dass c für die beiden Richtungen einer Kante unabhängig definiert ist: die „Kapazität von e“ hängt also von der betrachteten Durchflussrichtung ab.[4]

Fluss in N

Wir nennen eine Abbildung $f\colon \vec{E} \to \mathbb{R}$ auf G einen *Fluss in* N, wenn sie den folgenden Bedingungen genügt (Abb. 5.2.1):

(F1) $f(e, x, y) = -f(e, y, x)$ für alle $(e, x, y) \in \vec{E}$ mit $x \neq y$;

(F2′) $f(v, V) = 0$ für alle $v \in V \setminus \{s, t\}$;

(F3) $f(\vec{e}) \leqslant c(\vec{e})$ für alle $\vec{e} \in \vec{E}$.

ganzzahlig

Wir nennen f *ganzzahlig*, wenn alle Werte von f in $\mathbb{Z}$ liegen.

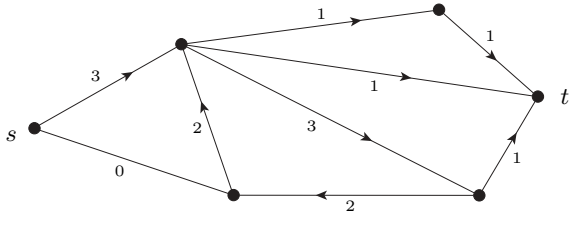


Abb. 5.2.1. Ein Fluss der Stärke 3; die angegebenen Flusswerte gelten in Pfeilrichtung

f
Schnitt
Kapazität

Im Folgenden sei f ein Fluss in N. Ist $S \subseteq V$ mit $s \in S$ und $t \in \overline{S}$, so bezeichnen wir das Paar $(S, \overline{S})$ als *Schnitt in* N. Die Zahl $c(S, \overline{S})$, definiert unter (1) in Abschnitt 5.1, ist *Kapazität* dieses Schnittes.

Da f statt (F2) jetzt nur (F2′) erfüllen muss, ist $f(X, \overline{X})$ im Gegensatz zu Proposition 5.1.1 nicht mehr für alle Eckenmengen $X \subseteq V$ null. Für Schnitte ist dieser Wert jedoch stets gleich:

Proposition 5.2.1. *Für jeden Schnitt $(S, \overline{S})$ in N gilt $f(S, \overline{S}) = f(s, V)$.*

[4] Schlingen bilden mal wieder eine Ausnahme, wenn auch keine interessante.

Beweis. Analog zum Beweis von Proposition 5.1.1 gilt:

$$\begin{aligned} f(S,\overline{S}) &= f(S,V) - f(S,S) \\ &\underset{(F1)}{=} f(s,V) + \sum_{v \in S \setminus \{s\}} f(v,V) \;-\; 0 \\ &\underset{(F2')}{=} f(s,V)\,. \end{aligned}$$

□

Den für alle Schnitte gleichen Wert $f(S,\overline{S})$ aus Proposition 5.2.1 nennen wir die *Stärke* von f und bezeichnen ihn mit $|f|$;[5] siehe Abb. 5.2.1. Da f der Bedingung (F3) genügt, gilt

Flussstärke $|f|$

$$|f| = f(S,\overline{S}) \leqslant c(S,\overline{S})$$

für jeden Schnitt $(S,\overline{S})$ in N; die größtmögliche Stärke eines Flusses in N ist also höchstens so groß wie die kleinste Kapazität eines Schnittes in N. Das folgende *max-flow min-cut theorem* besagt, dass stets ein Fluss existiert, dessen Stärke diese obere Schranke annimmt:

Satz 5.2.2. (Ford & Fulkerson 1956)
In jedem Netzwerk ist die größte Stärke eines Flusses gleich der kleinsten Kapazität eines Schnittes.

Beweis. Es sei $N = (G,s,t,c)$ ein beliebiges Netzwerk, mit $G =: (V,E)$. Wir werden eine Folge $f_0, f_1, f_2, \ldots$ ganzzahliger Flüsse in N von streng wachsender Stärke definieren, also mit

$$|f_0| < |f_1| < |f_2| < \ldots$$

Da mit einem Fluss auch seine Stärke ganzzahlig ist, gilt dann jeweils $|f_{n+1}| \geqslant |f_n| + 1$. Da überdies die Stärke aller Flüsse in N durch die Kapazität eines jeden Schnittes nach oben beschränkt ist, wird unsere Folge mit einem Fluss f_n abbrechen. Wir werden dazu dann einen Schnitt der Kapazität $c_n = |f_n|$ finden; da trivialerweise in N jede Flussstärke nach oben durch c_n und jede Schnittkapazität nach unten durch $|f_n|$ beschränkt ist, ist f_n damit ein Fluss größter Stärke und c_n eine kleinste Schnittkapazität, und die Behauptung folgt.

Als f_0 wählen wir den Nullfluss, setzen also $f_0(\vec{e}) := 0$ für alle $\vec{e} \in \vec{E}$. Ist für ein $n \in \mathbb{N}$ bereits ein Fluss f_n ganzzahliger Stärke in N definiert, so bezeichne S_n die Menge aller Ecken v, für die G einen s–v-Kantenzug $x_0 e_0 \ldots e_{\ell-1} x_\ell$ mit

S_n

$$f_n(\vec{e_i}) < c(\vec{e_i})$$

für alle $i < \ell$ enthält; hier sei $\vec{e_i} := (e_i, x_i, x_{i+1})$, und natürlich $x_0 = s$ und $x_\ell = v$.

[5] Formal kann $|f|$ also durchaus negativ sein. Durch Vertauschung der Rollen von s und t in N lässt sich das Vorzeichen von $|f|$ jedoch nach Geschmack ändern.

W Ist $t \in S_n$, so sei $W = x_0 e_0 \dots e_{\ell-1} x_\ell$ der entsprechende s–t-Kantenzug, oBdA ohne Eckenwiederholung, und

ϵ
$$\epsilon := \min \{\, c(\vec{e_i}) - f_n(\vec{e_i}) \mid i < \ell \,\}.$$

Offenbar ist $\epsilon > 0$, und da f_n (wie c) nach Annahme ganzzahlig ist, ist $\epsilon \in \mathbb{N}$. Wir setzen

$$f_{n+1}\colon \vec{e} \mapsto \begin{cases} f_n(\vec{e}) + \epsilon & \text{für } \vec{e} = \vec{e_i},\ i = 0, \dots, \ell-1; \\ f_n(\vec{e}) - \epsilon & \text{für } \vec{e} = \overleftarrow{e_i},\ i = 0, \dots, \ell-1; \\ f_n(\vec{e}) & \text{für } e \notin W. \end{cases}$$

Anschaulich entsteht f_{n+1} aus f_n, indem wir einen zusätzlichen Fluss der Stärke ϵ entlang W von s nach t schicken.

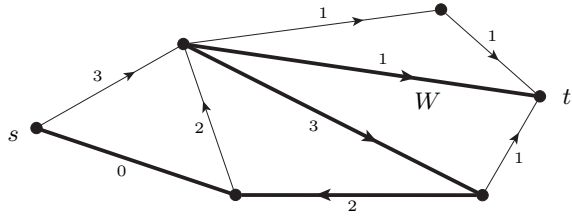


Abb. 5.2.2. Ein Kantenzug W mit $\epsilon = 2$ bei konstanter Kapazitätsfunktion $c = 3$

Offenbar ist f_{n+1} wieder ein ganzzahliger Fluss in N. Zur Bestimmung von $|f_{n+1}|$ betrachten wir den Wert $|f_{n+1}| = f_{n+1}(s, V)$. Da W die Ecke s nur einmal enthält, ist $\vec{e_0}$ das einzige Tripel (e, x, y) mit $x = s$ und $y \in V$, dessen Wert geändert wurde. Dieser Wert, und somit der von $f_{n+1}(s, V)$, wurde erhöht. Es gilt also $|f_{n+1}| > |f_n|$ wie erwünscht.

Ist $t \notin S_n$, so ist $(S_n, \overline{S_n})$ ein Schnitt in N. Nach (F3) für f_n und Definition von S_n gilt

$$f_n(\vec{e}) = c(\vec{e})$$

für alle $\vec{e} \in \vec{E}(S_n, \overline{S_n})$. Damit gilt

$$|f_n| = f_n(S_n, \overline{S_n}) = c(S_n, \overline{S_n})$$

wie gewünscht. □

Da der im Beweis von Satz 5.2.2 konstruierte Fluss ganzzahlig ist, haben wir die folgende Aussage mitbewiesen:

Korollar 5.2.3. *In jedem Netzwerk (mit ganzzahliger Kapazitätsfunktion) gibt es einen Fluss maximaler Stärke, der ganzzahlig ist.* □

5.3 Gruppenwertige Flüsse

Es sei $G = (V, E)$ ein Multigraph und H eine abelsche Gruppe. Sind f und g zwei H-Rundflüsse, so sind offenbar auch $f + g\colon \vec{e} \mapsto f(\vec{e}) + g(\vec{e})$ und $-f\colon \vec{e} \mapsto -f(\vec{e})$ zwei H-Rundflüsse. Die H-Rundflüsse auf G bilden also selbst in natürlicher Weise eine Gruppe.

$G = (V, E)$ $f + g$ $-f$

Eine Abbildung $f\colon \vec{E} \to H$ ist *nirgends null*, wenn $f(\vec{e}) \neq 0$ gilt für alle $\vec{e} \in \vec{E}$. Einen H-Rundfluss, der nirgends null ist, nennen wir einen *H-Fluss*. Beachte, dass die Menge der H-Flüsse auf G nicht unter Addition abgeschlossen ist: zwei H-Flüsse können sich auf einer Kante $\vec{e}$ zu null addieren, und ihre Summe ist dann kein H-Fluss mehr. Existiert auf G ein H-Fluss, so hat G nach Korollar 5.1.2 keine Brücke.

nirgends null *H-Fluss*

Für endliche Gruppen H hängt die Anzahl der H-Flüsse auf G, und insbesondere ihre Existenz, überraschenderweise nur von der Mächtigkeit von H ab, nicht von H selbst:

Satz 5.3.1. (Tutte 1954)
Zu jedem Multigraphen G existiert ein Polynom P mit der Eigenschaft, dass für jede endliche abelsche Gruppe H die Anzahl der H-Flüsse auf G gleich $P(|H| - 1)$ ist.

Beweis. Es sei $G =: (V, E)$; wir verwenden Induktion nach $m := |E|$. Wir nehmen zunächst an, dass alle Kanten von G Schlingen sind. Ist H eine beliebige abelsche Gruppe, so ist jede Abbildung $\vec{E} \to H \setminus \{0\}$ ein H-Fluss auf G. Da $|\vec{E}| = |E|$ ist, wenn alle Kanten Schlingen sind, gibt es $(|H| - 1)^m$ solche Abbildungen, und $P := x^m$ ist das gesuchte Polynom. (5.1.1)

Es gebe nun eine Kante $e_0 = xy \in E$ mit $x \neq y$; es sei $\vec{e_0} := (e_0, x, y)$ und $E' := E \setminus \{e_0\}$. Wir betrachten die Multigraphen

$e_0 = xy$ E'

$$G_1 := G - e_0 \quad \text{und} \quad G_2 := G/e_0\,.$$

Nach Induktionsannahme gibt es für $i = 1, 2$ jeweils ein Polynom P_i, so dass für jede endliche abelsche Gruppe H und $k = k(H) := |H| - 1$ die Anzahl der H-Flüsse auf G_i gleich $P_i(k)$ ist. Wir werden zeigen, dass für jedes H die Anzahl der H-Flüsse auf G gleich $P_2(k) - P_1(k)$ ist; insgesamt ist dann $P := P_2 - P_1$ das gesuchte Polynom.

P_1, P_2 k

Im Folgenden sei also H fest gegeben. Wir bezeichnen die Menge aller H-Flüsse auf G mit F, wollen also

H F

$$|F| = P_2(k) - P_1(k) \tag{1}$$

zeigen. Die H-Flüsse auf G_1 sind nun genau die Einschränkungen auf $\vec{E'}$ derjenigen H-Rundflüsse auf G, die auf e_0 null sind aber sonst nirgends. Bezeichnen wir die Menge dieser Rundflüsse auf G mit F_1, so gilt damit

F_1

$$P_1(k) = |F_1|\,.$$

Analog wollen wir jetzt zeigen, dass die H-Flüsse auf G_2 bijektiv denjenigen H-Rundflüssen auf G entsprechen, die nirgends null sind außer möglicherweise auf e_0. Bezeichnen wir die Menge dieser Rundflüsse auf G mit F_2, so gilt dann

F_2

$$P_2(k) = |F_2|\,,$$

und F_2 ist die disjunkte Vereinigung von F_1 und F. Damit wird (1) und der Satz bewiesen sein.

In G_2 sei $v_0 := v_{e_0}$ die aus e_0 kontrahierte Ecke (Abb. 5.3.1; siehe Kapitel 0.10). Wir suchen eine Bijektion $f \mapsto g$ zwischen F_2 und der Menge der H-Flüsse auf G_2. Dazu definieren wir g als die Einschränkung von f auf $\vec{E}' \setminus \vec{E}'(y,x)$. (Da die x–y-Kanten $e \in E'$ in G_2 zu Schlingen werden, haben sie dort nur die eine Richtung (e, v_0, v_0), und deren g-Wert legen wir als $f(e,x,y)$ fest.) Damit ist g in der Tat ein H-Fluss auf G_2; die Kirchhoff-Regel (F2) in v_0 gilt nach Proposition 5.1.1 für G mit $X := \{x, y\}$.

v_0

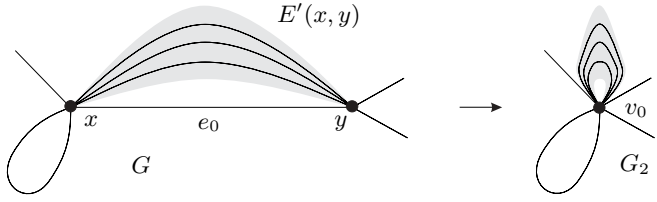


Abb. 5.3.1. Kontraktion der Kante e_0

Es bleibt zu zeigen, dass diese Abbildung $f \mapsto g$ eine Bijektion ist. Wollen wir zu einem gegebenen H-Fluss g auf G_2 ein $f \in F_2$ finden mit $f \mapsto g$, so liegt $f(\vec{e})$ für alle $\vec{e} \in \vec{E}' \setminus \vec{E}'(y,x)$ bereits fest, als $f(\vec{e}) = g(\vec{e})$; durch (F1) ist dann auch $f(\vec{e}) = -f(\bar{e})$ für alle $\vec{e} \in \vec{E}'(y,x)$ bestimmt. Unsere Abbildung $f \mapsto g$ ist also genau dann bijektiv, wenn wir zu gegebenem g auch die verbleibenden Werte $f(\vec{e_0})$ und $f(\bar{e_0})$ stets auf genau eine Weise so definieren können, dass f in $\vec{e_0}$ und $\bar{e_0}$ die Bedingung (F1) und in x und y die Bedingung (F2) erfüllt (und somit ein Rundfluss aus F_2 ist).

Nun liegt $f(\vec{e_0})$ bereits fest durch (F2) in x und die bereits bestimmten Werte $f(\vec{e})$ für Kanten e an x, und $f(\bar{e_0})$ liegt bereits fest durch (F2) in y und die bereits bestimmten Werte $f(\vec{e})$ für Kanten e an y. Denn mit

$$h := \sum_{\vec{e} \in \vec{E}'(x,y)} f(\vec{e}) \quad \Big(= \sum_{e \in E'(x,y)} g(e, v_0, v_0) \Big)$$

und $V' := V \setminus \{x, y\}$ gilt (F2) für f genau dann, wenn

$$0 = f(x, V) = f(\vec{e_0}) + h + f(x, V')$$

und

$$0 = f(y, V) = f(\overleftarrow{e_0}) - h + f(y, V')$$

gilt, d.h. wenn wir

$$f(\vec{e_0}) := -f(x, V') - h \quad \text{und} \quad f(\overleftarrow{e_0}) := -f(y, V') + h$$

setzen. Glücklicherweise erfüllt f dann aber auch (F1) in e_0, da

$$f(\vec{e_0}) + f(\overleftarrow{e_0}) = -f(x, V') - f(y, V') = -g(v_0, V') = 0$$

gilt wegen (F2) für g in v_0. □

Das Polynom P aus Satz 5.3.1 nennt man das *Flusspolynom* von G. *Flusspolynom*

Korollar 5.3.2. *Sind H und H' zwei endliche abelsche Gruppen gleicher Mächtigkeit, so hat G genau dann einen H-Fluss, wenn G einen H'-Fluss hat.* [5.4.5] □

Korollar 5.3.2 ist für die algebraische Flusstheorie von grundlegender Bedeutung: es zeigt, dass etwaige Schwierigkeiten bei Existenzbeweisen von H-Flüssen kaum gruppentheoretischer Natur sein werden. Andererseits kann es durchaus hilfreich sein, wenn wir uns bei bekannter oder zu zeigender Existenz eines H-Flusses die Gruppe aussuchen dürfen; ein hübsches Beispiel dafür werden wir in Proposition 5.4.5 kennenlernen.

Es sei $k \geqslant 1$ eine natürliche Zahl und $G = (V, E)$ ein Multigraph. Einen $\mathbb{Z}$-Fluss f auf G mit $0 < |f(\vec{e})| < k$ für alle $\vec{e} \in \vec{E}$ bezeichnet man als *k-Fluss*. Jeder k-Fluss ist offenbar auch ein m-Fluss für alle $m > k$. Zu gegebenem G stellt sich somit die Frage nach dem kleinsten k (falls überhaupt eins existiert), für das G einen k-Fluss zulässt. Wir nennen dieses k die *Flusszahl* von G und bezeichnen es mit $\varphi(G)$; hat G keinerlei k-Fluss, so setzen wir $\varphi(G) := \infty$. *k* *k-Fluss* *Flusszahl* *$\varphi(G)$*

Die Frage nach dem Wert von $\varphi(G)$ für natürlich auftretende Graphen G führt auf einige der tiefsten Probleme der Graphentheorie. Wir verschieben die Behandlung dieser Frage auf die Abschnitte 5.4 und 5.6 und ordnen sie zunächst in den weiteren Rahmen der H-Flüsse ein.

Zwischen k-Flüssen und $\mathbb{Z}_k$-Flüssen gibt es eine enge Beziehung. Bezeichnet σ_k den kanonischen Homomorphismus $i \mapsto \overline{i}$ von $\mathbb{Z}$ nach $\mathbb{Z}_k$, so definiert jeder k-Fluss durch Komposition mit σ_k einen $\mathbb{Z}_k$-Fluss. Interessanterweise gilt auch die Umkehrung: aus jedem $\mathbb{Z}_k$-Fluss auf einem Multigraphen lässt sich ein k-Fluss auf ihm konstruieren. Angesichts von Korollar 5.3.2 reduziert sich die allgemeine Frage nach der Existenz von H-Flüssen damit ganz auf die Frage nach der Existenz von k-Flüssen. *σ_k*

[5.4.1] [5.4.2] [5.4.3] [5.4.5]

Satz 5.3.3. (Tutte 1950)
Ein Multigraph hat genau dann einen k-Fluss, wenn er einen $\mathbb{Z}_k$-Fluss hat.

g

Beweis. Es sei g ein $\mathbb{Z}_k$-Fluss auf einem Multigraphen $G = (V, E)$; wir konstruieren einen k-Fluss f auf G. OBdA habe G keine Schlingen. Es

F

sei F die Menge aller Abbildungen $f\colon \vec{E} \to \mathbb{Z}$, die (F1) erfüllen sowie $|f(\vec{e})| < k$ (für alle $\vec{e} \in \vec{E}$) und $\sigma_k \circ f = g$; beachte, dass mit g auch jedes $f \in F$ nirgends null ist.

Wir zeigen zunächst, dass F nicht leer ist. Da wir jedes $g(\vec{e}) \in \mathbb{Z}_k$ als $\overline{i}$ mit $|i| < k$ schreiben und dann $f(\vec{e}) := i$ setzen können, gibt es sicher eine Abbildung $f\colon \vec{E} \to \mathbb{Z}$ mit $|f(\vec{e})| < k$ für alle $\vec{e} \in \vec{E}$ und $\sigma_k \circ f = g$. Für jede Kante $e \in E$ bezeichnen wir nun eine ihrer beiden Richtungen mit $\vec{e}$ und definieren $f'\colon \vec{E} \to \mathbb{Z}$ vermöge $f'(\vec{e}) := f(\vec{e})$ und $f'(\overleftarrow{e}) := -f(\vec{e})$ für jedes $e \in E$. Damit erfüllt f' (F1) und hat seine Werte im gewünschten Bereich; zu zeigen ist, dass die Abbildungen $\sigma_k \circ f'$ und g auch in den Gegenrichtungen $\overleftarrow{e}$ der Kanten e übereinstimmen. Da σ_k ein Homomorphismus ist, gilt jedoch

$$(\sigma_k \circ f')(\overleftarrow{e}) = \sigma_k(-f(\vec{e})) = -(\sigma_k \circ f)(\vec{e}) = -g(\vec{e}) = g(\overleftarrow{e})\,;$$

es ist also $f' \in F$, d.h. F ist in der Tat nicht leer.

Unser Ziel ist es, ein $f \in F$ zu finden, das die Kirchhoff-Regel (F2)

f

erfüllt und somit ein k-Fluss ist. Wir wählen dazu ein $f \in F$, für das die Summe

$$K(f) := \sum_{x \in V} |f(x, V)|$$

K

aller Abweichungen von der Kirchhoff-Regel minimal ist. Wir werden $K(f) = 0$ zeigen; offenbar gilt dann auch $f(x, V) = 0$ für jedes x, wie gewünscht.

Angenommen, $K(f) \neq 0$. Da f die Bedingung (F1) erfüllt, und

x

somit $\sum_{x \in V} f(x, V) = f(V, V) = 0$ ist, existiert dann eine Ecke x mit

$$f(x, V) > 0\,. \tag{1}$$

X

Es sei $X \subseteq V$ die Menge aller Ecken x', für die G einen Kantenzug $x_0 e_0 \dots e_{\ell-1} x_\ell$ von x nach x' enthält mit $f(e_i, x_i, x_{i+1}) > 0$ für alle

X'

$i < \ell$; weiter sei $X' := X \setminus \{x\}$.

Wir zeigen zunächst, dass X' eine Ecke x' mit $f(x', V) < 0$ enthält. Nach Definition von X gilt $f(e, x', y) \leqslant 0$ für alle Kanten $e = x'y$ mit $x' \in X$ und $y \in \overline{X}$. Insbesondere gilt dies für $x' = x$. Aus $f(x, V) > 0$ folgt somit $f(x, X') > 0$. Wegen (F1) gilt dann $f(X', x) < 0$, und überdies $f(X', X') = 0$. Somit ist

$$\sum_{x' \in X'} f(x', V) = f(X', V) = f(X', \overline{X}) + f(X', x) + f(X', X') < 0\,,$$

d.h. für mindestens ein $x' \in X'$ gilt in der Tat x'

$$f(x', V) < 0\,. \tag{2}$$

Wegen $x' \in X$ gibt es einen Kantenzug $W = x_0 e_0 \dots e_{\ell-1} x_\ell$ von x W
nach x' mit $f(e_i, x_i, x_{i+1}) > 0$ für alle $i < \ell$. Wir modifizieren f nun dadurch, dass wir zusätzlich einen Fluss der Stärke k rückwärts entlang W schicken: wir definieren $f' \colon \vec{E} \to \mathbb{Z}$ durch

$$f' \colon \vec{e} \mapsto \begin{cases} f(\vec{e}) - k & \text{für } \vec{e} = (e_i, x_i, x_{i+1}),\ \ i = 0, \dots, \ell - 1; \\ f(\vec{e}) + k & \text{für } \vec{e} = (e_i, x_{i+1}, x_i),\ \ i = 0, \dots, \ell - 1; \\ f(\vec{e}) & \text{für } e \notin W. \end{cases}$$

Nach Wahl von W gilt $|f'(\vec{e})| < k$ für alle $\vec{e} \in \vec{E}$, d.h. mit f ist auch f' in F.

Wie wirkt sich die Modifikation von f auf K aus? An allen inneren Ecken v von W und außerhalb von W bleibt die bisherige Abweichung von der Kirchhoff-Regel erhalten: es gilt

$$f'(v, V) = f(v, V) \qquad \text{für alle } v \in V \setminus \{x, x'\}. \tag{3}$$

Für x und x' andererseits ist

$$f'(x, V) = f(x, V) - k \quad \text{und} \quad f'(x', V) = f(x', V) + k\,. \tag{4}$$

Da g ein $\mathbb{Z}_k$-Fluss ist, also

$$\sigma_k(f(x, V)) = g(x, V) = \overline{0} \in \mathbb{Z}_k$$

und

$$\sigma_k(f(x', V)) = g(x', V) = \overline{0} \in \mathbb{Z}_k\,,$$

sind $f(x, V)$ und $f(x', V)$ Vielfache von k. Mit (1) und (2) ergibt dies $f(x, V) \geqslant k$ und $f(x', V) \leqslant -k$. Damit folgt aus (4)

$$|f'(x, V)| < |f(x, V)| \quad \text{und} \quad |f'(x', V)| < |f(x', V)|\,.$$

Zusammen mit (3) folgt $K(f') < K(f)$, im Widerspruch zur Wahl von f.

Es gilt somit wie behauptet $K(f) = 0$, und f ist ein k-Fluss auf G. □

Da die Summe zweier $\mathbb{Z}_k$-Rundflüsse stets wieder ein $\mathbb{Z}_k$-Rundfluss ist, sind $\mathbb{Z}_k$-Flüsse oft einfacher zu konstruieren – durch Summierung geeigneter Teilflüsse – als k-Flüsse. Bei der Entscheidung der Frage, ob ein gegebener Graph einen k-Fluss hat, ist Satz 5.3.3 daher eine wesentliche Hilfe. In den folgenden Abschnitten werden wir mehrere Beispiele hierfür kennenlernen.

Satz 5.3.3 sagt uns zwar, ob ein gegebener Multigraph einen k-Fluss hat oder nicht (sofern wir den Wert seines Flusspolynoms an der Stelle $k-1$ kennen), doch sagt er nichts über die Anzahl solcher Flüsse. Nach einem Satz von Kochol ist auch diese Anzahl ein Polynom in k, dessen Werte nach oben und unten durch die entsprechenden Werte des Flusspolynoms abgeschätzt werden können.

5.4 k-Flüsse für kleine k

Trivialerweise hat ein Graph genau dann einen 1-Fluss (die leere Menge), wenn er keine Kanten hat. In diesem Abschnitt stellen wir einige einfache Beispiele von hinreichenden Bedingungen zusammen, unter denen ein Graph einen 2-, 3- oder 4-Fluss hat. Weitere Beispiele finden sich in den Übungen.

[5.6.1] **Proposition 5.4.1.** *Ein Graph hat genau dann einen 2-Fluss, wenn all seine Eckengrade gerade sind.*

(5.3.3) *Beweis.* Nach Satz 5.3.3 hat ein Graph $G = (V, E)$ genau dann einen 2-Fluss, wenn er einen $\mathbb{Z}_2$-Fluss hat, d.h. wenn die konstante Abbildung $\vec{E} \to \mathbb{Z}_2$ mit Wert $\overline{1}$ der Kirchhoff-Regel (F2) genügt. Dies ist genau dann der Fall, wenn alle Eckengrade in G gerade sind. □

gerader Graph Für den Rest dieses Kapitels nennen wir einen Graphen *gerade*, wenn all seine Eckengrade gerade sind.

Proposition 5.4.2. *Ein kubischer Graph hat genau dann einen 3-Fluss, wenn er bipartit ist.*

(0.6.1) (5.3.3) *Beweis.* Es sei $G = (V, E)$ ein kubischer Graph. Wir nehmen zuerst an, dass G einen 3-Fluss hat, und somit auch einen $\mathbb{Z}_3$-Fluss f. Ist $C = x_0 \dots x_\ell x_0$ ein Kreis in G, so ordnet f den Kanten $e_i = x_i x_{i+1}$ von C (mit $x_{\ell+1} := x_0$) bei festem Durchlaufsinn abwechselnd die Werte $\overline{1}$ und $\overline{2}$ zu: wäre $f(e_{i-1}, x_{i-1}, x_i) = f(e_i, x_i, x_{i+1})$ für irgendein i, so könnte f für keinen Wert $\neq \overline{0}$ der dritten Kante an x_i dort der Bedingung (F2) genügen. Damit hat C gerade Länge, und G ist bipartit nach Proposition 0.6.1.

Umgekehrt sei G nun bipartit, mit Eckenpartition $\{X, Y\}$. Die Abbildung $\vec{E} \to \mathbb{Z}_3$ definiert durch $f(e, x, y) := \overline{1}$ und $f(e, y, x) := \overline{2}$ für alle

Kanten $e = xy$ mit $x \in X$ und $y \in Y$ ist ein $\mathbb{Z}_3$-Fluss auf G. Nach Satz 5.3.3 hat G dann auch einen 3-Fluss. □

Welche Flusszahl haben die vollständigen Graphen K^n? Für ungerades $n > 1$ gilt $\varphi(K^n) = 2$ nach Proposition 5.4.1. Für $n = 2$ haben wir $\varphi(K^n) = \infty$, und wie man leicht direkt zeigt (oder aus den Propositionen 5.4.2 und 5.4.5 folgert), ist $\varphi(K^4) = 4$. Interessanterweise ist K^4 der einzige vollständige Graph mit Flusszahl 4:

Proposition 5.4.3. *Für alle geraden $n > 4$ gilt $\varphi(K^n) = 3$.*

Beweis. Nach Proposition 5.4.1 ist $\varphi(K^n) \geqslant 3$ für gerade n; wir zeigen (5.3.3)
mit Induktion nach n, dass jedes $G = K^n$ mit geradem $n > 4$ einen 3-Fluss hat.

Zunächst sei $n = 6$. Dann ist G die kantendisjunkte Vereinigung dreier Graphen G_1, G_2, G_3, mit $G_1, G_2 = K^3$ und $G_3 = K_{3,3}$. Nach Proposition 5.4.1 haben G_1 und G_2 jeweils einen 2-Fluss, und G_3 hat nach Proposition 5.4.2 einen 3-Fluss. Die Vereinigung dieser Flüsse ist ein 3-Fluss auf G.

Es sei nun $n > 6$, und die Behauptung gelte für $n - 2$. Offenbar ist G die kantendisjunkte Vereinigung eines K^{n-2} und eines Graphen $G' = (V', E')$ mit $G' = \overline{K^{n-2}} * K^2$. Der K^{n-2} hat einen 3-Fluss nach Induktionsannahme. Nach Satz 5.3.3 reicht es also, einen $\mathbb{Z}_3$-Fluss auf G' zu finden. Für jede Ecke z des $\overline{K^{n-2}} \subseteq G'$ sei f_z ein $\mathbb{Z}_3$-Fluss auf dem Dreieck $zxyz \subseteq G'$, wobei $e = xy$ die Kante des K^2 in G' ist. Es sei $f\colon \vec{E'} \to \mathbb{Z}_3$ die Summe dieser Flüsse. Offenbar ist f nirgends null, außer möglicherweise in (e, x, y) und (e, y, x). Ist $f(e, x, y) \neq \overline{0}$, so ist f der gesuchte $\mathbb{Z}_3$-Fluss auf G'. Ist $f(e, x, y) = \overline{0}$, so ist $f + f_z$ (für ein beliebiges z) ein $\mathbb{Z}_3$-Fluss auf G'. □

Proposition 5.4.4. *Jeder 4-kantenzusammenhängende Graph hat einen 4-Fluss.*

Beweis. Es sei G ein 4-kantenzusammenhängender Graph. Nach Korollar 1.4.2 hat G zwei kantendisjunkte Spannbäume T_i, $i = 1, 2$. Für jede (1.4.2)
Kante $e \notin T_i$ sei $C_{i,e}$ der e enthaltende Fundamentalkreis zu T_i und $f_{i,e}$ $f_{1,e}, f_{2,e}$
ein „$\mathbb{Z}_4$-Fluss der Stärke $\overline{i}$ um $C_{i,e}$ herum“, genauer: ein $\mathbb{Z}_4$-Rundfluss auf G mit Werten $\overline{i}$ und $-\overline{i}$ auf den Kanten von $C_{i,e}$ und null sonst.

Es sei $f_1 := \sum_{e \notin T_1} f_{1,e}$. Da jedes $e \notin T_1$ auf nur einem Kreis $C_{1,e'}$ f_1
liegt, nämlich für $e' = e$, nimmt f_1 außerhalb von T_1 nur die Werte $\overline{1}$ und $-\overline{1}$ $(= \overline{3})$ an. Weiter sei

$$E := \{\, e \in E(T_1) \mid f_1(e) = \overline{0} \,\}$$

und $f_2 := \sum_{e \in E} f_{2,e}$. Wie oben nimmt f_2 auf E nur den Wert $\overline{2}$ $(= -\overline{2})$ f_2
an. Als Summe von lauter $\mathbb{Z}_4$-Rundflüssen ist auch $f := f_1 + f_2$ ein f

$\mathbb{Z}_4$-Rundfluss auf G. Und überdies ist f nirgends null: auf Kanten aus E ist f konstant $\overline{2}$, auf Kanten von $T_1 - E$ ist $f = f_1$ (und damit nicht null nach Wahl von E), und auf allen Kanten außerhalb von T_1 ist f entweder $\overline{1}$ oder $\overline{3}$. Somit ist f ein $\mathbb{Z}_4$-Fluss auf G, und die Behauptung folgt mit Satz 5.3.3. □

Die folgende Proposition beschreibt die Graphen mit einem 4-Fluss im Rückgriff auf diejenigen mit einem 2-Fluss.

Proposition 5.4.5.

(i) *Ein Graph hat genau dann einen 4-Fluss, wenn er die Vereinigung zweier gerader Teilgraphen ist.*

(ii) *Ein kubischer Graph hat genau dann einen 4-Fluss, wenn er 3-kantenfärbbar ist.*

(5.3.2) (5.3.3)

Beweis. Es sei $\mathbb{Z}_2^2$ die Kleinsche Vierergruppe in ihrer Darstellung als direktes Produkt $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ mit komponentenweiser Addition. (Die Elemente von $\mathbb{Z}_2^2$ sind also die Paare (a, b) mit $a, b \in \mathbb{Z}_2$, und es gilt $(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b')$.) Nach Korollar 5.3.2 und Satz 5.3.3 hat ein Graph genau dann einen 4-Fluss, wenn er einen $\mathbb{Z}_2^2$-Fluss hat.

(i) Die behauptete Äquivalenz folgt mit der Vorbemerkung direkt aus Proposition 5.4.1.

(ii) Es sei $G = (V, E)$ ein kubischer Graph. Wir nehmen zuerst an, dass G einen $\mathbb{Z}_2^2$-Fluss f hat und definieren eine Kantenfärbung $E \to \mathbb{Z}_2^2 \setminus \{0\}$. Wegen $a = -a$ für alle $a \in \mathbb{Z}_2^2$ gilt $f(\vec{e}) = f(\overleftarrow{e})$ für jedes $\vec{e} \in \vec{E}$; wir färben die Kante e mit dieser Farbe $f(\vec{e})$. Trügen nun zwei Kanten mit gemeinsamer Endecke v die gleiche Farbe, so summierten sich die Werte von f auf diesen beiden Kanten zu 0, und die dritte mit v inzidente Kante hätte nach (F2) den f-Wert 0. Dies widerspricht der Annahme, dass f als $\mathbb{Z}_2^2$-Fluss nirgends null ist; unsere Kantenfärbung von G ist also korrekt.

Da die drei Elemente von $\mathbb{Z}_2^2 \setminus \{0\}$ sich zu 0 summieren, definiert umgekehrt jede 3-Kantenfärbung $c\colon E \to \mathbb{Z}_2^2 \setminus \{0\}$ vermöge $f(\vec{e}) = f(\overleftarrow{e}) = c(e)$ für alle $\vec{e} \in \vec{E}$ einen $\mathbb{Z}_2^2$-Fluss auf G. □

Korollar 5.4.6. *Ein kubischer 3-kantenfärbbarer Graph hat keine Brücke.* □

5.5 Flüsse und Färbungen

In diesem Abschnitt zeigen wir einen ganz erstaunlichen Zusammenhang zwischen Flüssen und Färbungen: jeder k-Eckenfärbung eines ebenen Multigraphen entspricht ein k-Fluss auf seinem Dual, und umgekehrt. Die Untersuchung von Rundflüssen auf nicht ebenen Multigraphen erweist sich damit als eine natürliche Verallgemeinerung der bekannten (Landkarten-) Färbungsprobleme in der Ebene.

Es seien $G = (V, E)$ und $G^* = (V^*, E^*)$ duale ebene Multigraphen. Der Einfachheit halber nehmen wir zunächst an, dass G und G^* weder Brücken noch Schlingen haben[6] und nicht trivial sind. Für Kantenmengen $F \subseteq E$ schreiben wir

$G = (V, E)$
G^*

$$F^* := \{\, e^* \in E^* \mid e \in F \,\}.$$

F^*

Da $e \mapsto e^*$ eine Bijektion von E nach E^* ist, schreiben wir auch beliebig gegebene Teilmengen von E^* meist in der Form F^* und sehen $F \subseteq E$ als hierdurch mitdefiniert an.

Wie können wir die in einem Rundfluss g auf G^* enthaltene Information mittels der Dualitätsbeziehung zwischen G und G^* auch für G nutzbar machen? Unsere einfachste allgemeine Aussage über Rundflüsse ist Proposition 5.1.1: danach ist $g(X, \overline{X}) = 0$ für alle $X \subseteq V^*$. Den minimalen Schnitten $E^*(X, \overline{X})$ in G^* entsprechen nach Proposition 3.6.1 gerade die Kreise in G. Betrachten wir nun die Hintereinanderausführung f der Abbildungen $e \mapsto e^*$ und g und summieren f über die Kanten eines beliebigen Kreises in G, so sollte dann auch hier das Ergebnis null sein.

Natürlich hat die Sache noch einen technischen Haken. Da g nicht auf E^* sondern auf $\vec{E^*}$ definiert ist, ist auch f nicht wie oben definierbar: zuvor müssen wir die Bijektion $e \mapsto e^*$ zu einer Bijektion von $\vec{E}$ nach $\vec{E^*}$ verfeinern, jedem $\vec{e} \in \vec{E}$ also kanonisch eine der beiden Richtungen von e^* zuordnen. Dazu dient unser erstes Lemma. Danach zeigen wir dann, dass f sich in der Tat entlang Kreisen von G zu null summiert.

Ist $C = v_0 \dots v_{\ell-1} v_0$ ein Kreis mit Kanten $e_i = v_i v_{i+1}$ (und $v_\ell := v_0$), so nennen wir

$$\vec{C} := \{\, (e_i, v_i, v_{i+1}) \mid i < \ell \,\}$$

$\vec{C}$

einen *Kreis mit Drehsinn*. Die Definition von $\vec{C}$ hängt natürlich von der Eckenaufzählung von C ab: jeder Kreis in G hat genau zwei Drehsinne. Da umgekehrt jedoch C aus $\vec{C}$ rekonstruierbar ist, werden wir informell auch dann über C sprechen, wenn formal nur $\vec{C}$ definiert wurde.

Kreis mit Drehsinn

[6] Wollten wir diese zulassen, so müssten wir im Folgenden auch ebenen Schlingen zwei Richtungen geben. Dies ist natürlich ohne weiteres möglich, verträgt sich aber nicht so gut mit unserer Konvention, dass (abstrakte) Schlingen nur eine Richtung haben.

Lemma 5.5.1. *Es existiert eine Bijektion* $^*\colon \vec{e} \mapsto \vec{e}^*$ *von* $\vec{E}$ *nach* $\vec{E^*}$ *mit den folgenden Eigenschaften.*

(i) *Die* $\vec{e}^*$ *zugrundeliegende Kante ist jeweils* e^**, d.h.* $\vec{e}^*$ *ist eine der beiden Richtungen* $\vec{e^*}, \overleftarrow{e^*}$ *von* e^**.*

(ii) *Ist* $C \subseteq G$ *ein Kreis,* $F := E(C)$*, und* $X \subseteq V^*$ *so dass* $F^* = E^*(X, \overline{X})$*, dann existiert ein Drehsinn* $\vec{C}$ *von* C *mit* $\{ \vec{e}^* \mid \vec{e} \in \vec{C} \} = \vec{E^*}(X, \overline{X})$*.*

Der Beweis von Lemma 5.5.1 ist nicht ganz trivial: er beruht auf einer topologischen Eigenschaft der Ebene, ihrer sogenannten *Orientierbarkeit*, und ist im Rahmen dieses Abschnitts nicht darstellbar. Gleichwohl ist die Aussage des Lemmas anschaulich einfach und plausibel. Definieren wir nämlich etwa für $e = vw$ und $e^* = xy$ die Zuordnung $(e, v, w) \mapsto (e, v, w)^* \in \{(e^*, x, y), (e^*, y, x)\}$ stets dadurch, dass wir e (und seine Endecken) in e^* (und seine Endecken) durch eine Drehung im Uhrzeigersinn überführen (Abb. 5.5.1), so genügt die Abbildung $\vec{e} \mapsto \vec{e}^*$ der Aussage des Lemmas.

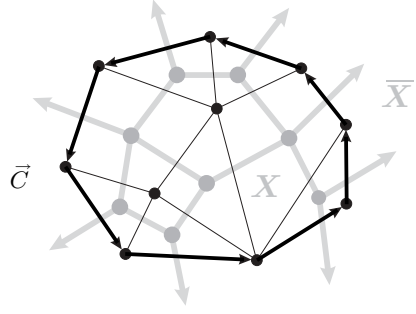


Abb. 5.5.1. Gerichtete Kreis-Schnitt-Dualität

f, g

Für eine abelsche Gruppe H seien $f\colon \vec{E} \to H$ und $g\colon \vec{E^*} \to H$ zwei Abbildungen mit

$$f(\vec{e}) = g(\vec{e}^*)$$

für alle $\vec{e} \in \vec{E}$. Für $\vec{F} \subseteq \vec{E}$ setzen wir

$f(\vec{C})$ etc.

$$f(\vec{F}) := \sum_{\vec{e} \in \vec{F}} f(\vec{e})\,.$$

Lemma 5.5.2.

(i) *Die Abbildung* g *erfüllt genau dann (F1), wenn* f *es tut.*

(ii) *Die Abbildung* g *ist genau dann ein Rundfluss auf* G^**, wenn* f *(F1) erfüllt und* $f(\vec{C}) = 0$ *gilt für jeden Kreis* $\vec{C}$ *in* G *mit Drehsinn.*

Beweis. Aussage (i) folgt aus der Bijektivität der Abbildung $\vec{e} \mapsto \vec{e}^*$ und Lemma 5.5.1 (i). (3.6.1) (5.1.1)

Zur Vorwärtsrichtung der Aussage (ii) nehmen wir an, dass g ein Rundfluss auf G^* ist und betrachten einen Kreis $C \subseteq G$ mit gegebenem Drehsinn. Es sei $F := E(C)$. Nach Proposition 3.6.1 ist F^* ein minimaler Schnitt in G^*, also $F^* = E^*(X, \overline{X})$ für ein geeignetes $X \subseteq V^*$. Nach Definition von f und g, Lemma 5.5.1 (ii) und Proposition 5.1.1 ist

$$f(\vec{C}) = \sum_{\vec{e} \in \vec{C}} f(\vec{e}) = \sum_{\vec{d} \in \vec{E^*}(X,\overline{X})} g(\vec{d}) = g(X, \overline{X}) = 0$$

für einen der beiden Drehsinne $\vec{C}$ von C. Wegen $f(\overleftarrow{C}) = -f(\vec{C})$ ist dann auch der entsprechende Wert für unseren gegebenen Drehsinn von C null.

Zur Rückrichtung reicht es wegen (i) zu zeigen, dass g der Bedingung (F2) genügt. Wir zeigen allgemeiner, dass $g(X, \overline{X}) = 0$ gilt für jeden Schnitt $F^* = E^*(X, \overline{X})$ von G^*. Mit Lemma 0.9.4 dürfen wir annehmen, dass F^* ein Minimalschnitt von G^* ist. Da G und G^* zusammenhängend sind, ist F die Kantenmenge eines Kreises $C \subseteq G$ (Proposition 3.6.1). Nach Lemma 5.5.1 (ii) hat C einen Drehsinn $\vec{C}$ mit $\{ \vec{e}^* \mid \vec{e} \in \vec{C} \} = \vec{E^*}(X, \overline{X})$. Nach Definition von f und g gilt damit $g(X, \overline{X}) = f(\vec{C}) = 0$. F □

Mit Hilfe von Lemma 5.5.2 können wir nun unseren Dualitätssatz zwischen Färbungen und Flüssen ebener Graphen beweisen. Ist $P = v_0 \dots v_\ell$ ein Weg mit Kanten $e_i = v_i v_{i+1}$ $(i < \ell)$, so setzen wir (abhängig von der genannten Eckenfolge von P)

$$\vec{P} := \{ (e_i, v_i, v_{i+1}) \mid i < \ell \}$$ $\vec{P}$

und nennen $\vec{P}$ einen $v_0 \to v_\ell$ *-Weg*. Wiederum ist durch $\vec{P}$ auch P implizit gegeben. $v_0 \to v_\ell$ *-Weg*

Satz 5.5.3. (Tutte 1954)
Für jedes Paar dualer ebener Multigraphen G und G^* gilt

$$\chi(G) = \varphi(G^*)\,.$$

Beweis. Es sei $G =: (V, E)$ und $G^* =: (V^*, E^*)$. Für $|G| \in \{1, 2\}$ ist die Behauptung leicht geprüft; wir nehmen $|G| \geqslant 3$ an und verwenden Induktion nach der Anzahl der Brücken in G. Ist $e \in G$ eine Brücke, so ist e^* eine Schlinge von G^*, und $G^* - e^*$ dual zu G/e. (Warum?) Nach Induktionsannahme gilt daher (0.5.6) V, E V^*, E^*

$$\chi(G) = \chi(G/e) = \varphi(G^* - e^*) = \varphi(G^*)\,;$$

bei der ersten und letzten Gleichheit geht ein, dass e wegen $|G| \geqslant 3$ nicht die einzige Kante von G ist.

Es ist also nur der Induktionsanfang zu zeigen: wir nehmen an, dass G keine Brücke hat. Hat G eine Schlinge, so hat G^* eine Brücke, und es gilt nach Konvention $\chi(G) = \infty = \varphi(G^*)$. Im Folgenden sei G daher auch schlingenlos. Damit ist $\chi(G)$ endlich; wir zeigen für beliebiges
k $k \geqslant 2$, dass G genau dann k-färbbar ist, wenn G^* einen k-Fluss besitzt. Da G – und damit auch G^* – weder Brücken noch Schlingen hat, sind die Lemmas 5.5.1 und 5.5.2 auf G und G^* anwendbar. Es sei $\vec{e} \mapsto \vec{e}^*$ die Bijektion zwischen $\vec{E}$ und $\vec{E^*}$ aus Lemma 5.5.1.

Wir nehmen zuerst an, dass G^* einen k-Fluss hat. Trivialerweise
g, f hat G^* dann auch einen $\mathbb{Z}_k$-Fluss g. Wie zuvor sei $f\colon \vec{E} \to \mathbb{Z}_k$ definiert durch $f(\vec{e}) := g(\vec{e}^*)$. Wir werden mit Hilfe von f eine Eckenfärbung $c\colon V \to \mathbb{Z}_k$ von G konstruieren.

Dazu sei T ein normaler Spannbaum in G, sagen wir mit Wurzel r. Wir setzen $c(r) := \overline{0}$. Für jede andere Ecke $v \in V$ sei $c(v) := f(\vec{P})$, wobei $\vec{P}$ der Weg von r nach v in T sei. Um zu prüfen, ob damit benachbarte Ecken stets verschieden gefärbt sind, betrachten wir eine beliebige Kante $e = vw \in E$. Da T normal ist, dürfen wir annehmen, dass $v < w$ gilt in der Baumordnung von T. Ist e eine Kante von T, so gilt dann $c(w) - c(v) = f(e, v, w)$ nach Definition von c, und somit $c(v) \neq c(w)$, da g (und damit f) ja nirgends null ist. Ist $e \notin T$, so sei $\vec{P}$ der Weg von v nach w in T. Dann gilt

$$c(w) - c(v) = f(\vec{P}) = -f(e, w, v) = f(e, v, w) \neq \overline{0}$$

nach Lemma 5.5.2 (ii).

c Umgekehrt nehmen wir nun $\chi(G) \leqslant k$ an; es sei $c\colon V \to \{1, \dots, k\}$ eine k-Färbung von G. Wir definieren $f\colon \vec{E} \to \mathbb{Z}$ durch

f
$$f(e, v, w) := c(w) - c(v)\,,$$

g und $g\colon \vec{E^*} \to \mathbb{Z}$ durch $g(\vec{e}^*) := f(\vec{e})$. Offenbar erfüllt f (F1) und hat seine Werte in $\{\pm 1, \dots, \pm(k-1)\}$; nach Lemma 5.5.2 (i) gilt beides dann auch für g. Nach Definition von f gilt überdies $f(\vec{C}) = 0$ für jeden Kreis $\vec{C}$ mit Drehsinn. Nach Lemma 5.5.2 (ii) ist g daher ein k-Fluss. □

5.6 Die Tutteschen Flussvermutungen

Wie bestimmen wir die Flusszahl eines gegebenen Graphen? Hat überhaupt jeder brückenlose Graph eine Flusszahl, einen k-Fluss für irgendein k? Können Flusszahlen beliebig groß werden, oder gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ mit $\varphi(G) \leqslant k$ für alle brückenlosen Graphen G? Können wir zu gegebenem k die Graphen mit einem k-Fluss charakterisieren?

Von den vier obigen Fragen werden wir in diesem Abschnitt im Wesentlichen nur die zweite und dritte beantworten: jeder brückenlose Multigraph hat einen 6-Fluss. Ein Graph hat also insbesondere genau dann eine Flusszahl, wenn er keine Brücke hat. Die Frage nach einer Charakterisierung der Graphen mit einem k-Fluss stellt sich nach Proposition 5.4.1 damit nur noch für $k = 3, 4, 5$. Die folgenden Vermutungen von Tutte, dem Begründer der algebraischen Flusstheorie, geben mögliche Teilantworten.

Die bekannteste und älteste der Tutteschen Vermutungen ist seine sogenannte *Fünfflussvermutung*:

Fünfflussvermutung. (Tutte 1954)
Jeder brückenlose Multigraph hat einen 5-Fluss.

Welche Graphen haben einen 4-Fluss? Nach Proposition 5.4.4 gehören die 4-kantenzusammenhängenden Graphen dazu. Der Petersen-Graph (Abb. 5.6.1) andererseits ist ein Beispiel eines brückenlosen Graphen ohne 4-Fluss: da er kubisch aber nicht 3-kantenfärbbar ist, kann er nach Proposition 5.4.5 (ii) keinen 4-Fluss haben.

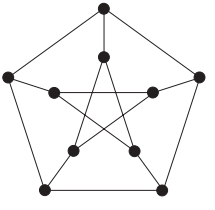


Abb. 5.6.1. Der Petersen-Graph

Die Tuttesche *Vierflussvermutung* besagt nun, dass der Petersen-Graph in jedem Graphen ohne 4-Fluss auftreten muss:

Vierflussvermutung. (Tutte 1966)
Jeder brückenlose Multigraph, der nicht den Petersen-Graphen als Minor enthält, hat einen 4-Fluss.

Nach Proposition 0.7.2 kann man in der Vierflussvermutung das Wort „Minor“ durch „topologischen Minor“ ersetzen.

Selbst wenn sie wahr ist, ist die Vierflussvermutung natürlich nicht bestmöglich: ein K^{11} beispielsweise enthält den Petersen-Graphen als Minor, hat aber dennoch einen 4-Fluss (und sogar einen 2-Fluss). Die Vermutung erscheint natürlicher für weniger dichte Graphen, und in der Tat bilden die kubischen Graphen einen wesentlichen Spezialfall; siehe dazu die Notizen.

Snark

Einen kubischen brückenlosen Graphen oder Multigraphen ohne 4-Fluss (äquivalent: ohne 3-Kantenfärbung) nennt man einen *Snark*. Die Vierflussvermutung für kubische Graphen besagt also, dass jeder Snark den Petersen-Graphen zum Minor hat; der Petersen-Graph ist also in diesem Sinne der kleinste Snark. Snarks treten sowohl beim Vierfarbensatz als auch bei der Fünfflussvermutung als harter Kern des Problems auf: der Vierfarbensatz ist äquivalent zu der Aussage, dass es keinen plättbaren Snark gibt (Übung), und man kann zeigen, dass die Fünfflussvermutung bereits dann wahr ist, wenn sie für alle Snarks gilt.[7] Obwohl die Snarks eine so spezielle Graphenklasse bilden, scheint keines der genannten Probleme durch die Reduktion auf Snarks wesentlich einfacher zu werden.[8]

Wir erwähnen noch die etwas weniger bekannte *Dreiflussvermutung*:

Dreiflussvermutung. (Tutte 1972)
Jeder Multigraph ohne einen Schnitt aus genau einer oder genau drei Kanten hat einen 3-Fluss.

Auch die Dreiflussvermutung ist natürlich nicht bestmöglich: es gibt durchaus Graphen mit Schnitten aus drei Kanten, die einen 3-Fluss haben (Übung).

Alle drei Flussvermutungen sind nach dem Dualitätssatz 5.5.3 wahr für plättbare Graphen, und sicher auch daher motiviert: die Dreiflussvermutung für plättbare Graphen ist äquivalent zum Satz 4.1.3 von Grötzsch, die Vierflussvermutung zum Vierfarbensatz (der Petersen-Graph ist nicht plättbar), und die Fünfflussvermutung zum Fünffarbensatz.

Zum Schluss beweisen wir jetzt den Hauptsatz des Kapitels:

Satz 5.6.1. (Seymour 1981)
Jeder brückenlose Graph hat einen 6-Fluss.

---

[7] Entsprechendes gilt für eine andere bekannte Vermutung, die sogenannte *cycle double cover conjecture* (siehe Übungen).

[8] Die Unberechenbarkeit von Snarks wurde bereits gezeigt von Lewis Carroll, *The Hunting of the Snark*, Macmillan 1876.

(2.3.6)
(5.1.1)
(5.4.1)

Beweis. Es sei $G = (V, E)$ ein Graph ohne Brücke. Da 6-Flüsse auf den Komponenten von G sich zu einem 6-Fluss auf G addieren, dürfen wir G als zusammenhängend voraussetzen; da G keine Brücke hat, ist G damit 2-kantenzusammenhängend. Nach dem Satz von Menger (2.3.6 (ii)) enthält jeder 2-kantenzusammenhängende Graph zu gegebenen Ecken v, w einen v und w enthaltenden zusammenhängenden geraden Teilgraphen – z.B. die Vereinigung zweier kantendisjunkter v–w-Wege. Dies werden wir im Folgenden verwenden.

Wir konstruieren eine Folge $H_0, \dots, H_n$ disjunkter zusammenhängender und gerader Teilgraphen von G, sowie eine Folge $F_1, \dots, F_n$ nicht leerer Kantenmengen zwischen diesen Teilgraphen. Die F_i werden jeweils nur eine oder zwei Kanten enthalten, und zwar zwischen H_i und $H_0 \cup \dots \cup H_{i-1}$. Wir schreiben $H_i =: (V_i, E_i)$, $H_0, \dots, H_n$ $F_1, \dots, F_n$ V_i, E_i

$$H^i := (H_0 \cup \dots \cup H_i) + (F_1 \cup \dots \cup F_i) \qquad H^i$$

und $H^i =: (V^i, E^i)$. Beachte, dass jedes $H^i = (H^{i-1} \cup H_i) + F_i$ zusammenhängend ist (Induktion nach i). Aus unserer Annahme, dass H_i gerade sei, folgt nach Proposition 5.4.1 (oder direkt mit Proposition 0.2.1), dass H_i keine Brücke hat. V^i, E^i

Als H_0 wählen wir einen beliebigen K^1 in G. Für ein $i > 0$ seien nun $H_0, \dots, H_{i-1}$ und $F_1, \dots, F_{i-1}$ bereits definiert. Ist $V^{i-1} = V$, so beenden wir die Konstruktion und setzen $i - 1 =: n$. Anderenfalls sei $X_i \subseteq \overline{V^{i-1}}$ minimal mit $X_i \neq \emptyset$ und n X_i

$$\left|E(X_i, \overline{V^{i-1}} \setminus X_i)\right| \leqslant 1 \qquad (1)$$

(Abb. 5.6.2); ein solches X_i existiert, da $\overline{V^{i-1}}$ ein Kandidat ist. Da G 2-kantenzusammenhängend ist, folgt aus (1) $E(X_i, V^{i-1}) \neq \emptyset$. Wegen der Minimalität von X_i ist $G[X_i]$ zusammenhängend und brückenlos, also 2-kantenzusammenhängend oder ein K^1. Als Elemente von F_i wählen wir beliebig eine oder zwei Kanten aus $E(X_i, V^{i-1})$, wenn möglich zwei. Als H_i wählen wir einen beliebigen zusammenhängenden geraden Teilgraphen von $G[X_i]$, der die Endecken der Kanten aus F_i in X_i enthält. F_i

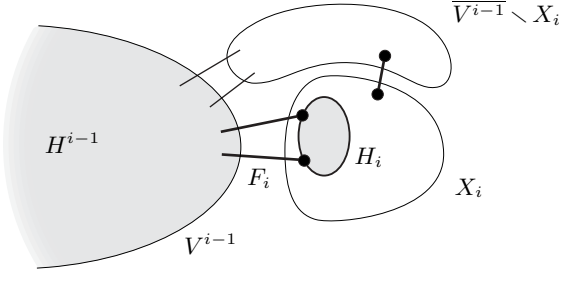


Abb. 5.6.2. Konstruktion der H_i und F_i

H
E'

Zum Schluss unserer Konstruktion setzen wir $H^n =: H$ und $E' := E \setminus E(H)$. Nach Definition von n ist H ein aufspannender zusammenhängender Teilgraph von G.

$f_n, \dots, f_0$
$\vec{C_e}$
f_e
f_n

Wir definieren jetzt rückwärts-induktiv eine Folge $f_n, \dots, f_0$ von $\mathbb{Z}_3$-Rundflüssen auf G. Für jede Kante $e \in E'$ sei $\vec{C_e}$ ein e enthaltender Kreis mit Drehsinn in $H + e$, und f_e ein positiver Fluss um $\vec{C_e}$ herum; formal sei f_e ein $\mathbb{Z}_3$-Rundfluss auf G mit $f_e^{-1}(\overline{0}) = \vec{E} \setminus (\vec{C_e} \cup \overleftarrow{C_e})$. Es sei f_n die Summe all dieser f_e. Da jedes $e' \in E'$ nur auf einem der Kreise C_e liegt (nämlich auf $C_{e'}$), ist $f_n(\vec{e}) \neq \overline{0}$ für alle $\vec{e} \in \vec{E'}$.

Es seien nun $\mathbb{Z}_3$-Rundflüsse $f_n, \dots, f_i$ auf G für ein $i \leqslant n$ bereits definiert, und es gelte

$$f_i(\vec{e}) \neq \overline{0} \text{ für alle } \vec{e} \in \vec{E'} \cup \bigcup_{j>i} \vec{F_j}\,; \tag{2}$$

$\vec{F_j}$

hier sei $\vec{F_j} := \{ \vec{e} \in \vec{E} \mid e \in F_j \}$. Wir wollen f_{i-1} so definieren, dass (2) auch für $i-1$ gilt.

e

Dazu betrachten wir zuerst den Fall, dass $|F_i| = 1$ ist, etwa $F_i = \{e\}$. Wir setzen in diesem Fall $f_{i-1} := f_i$, müssen also zeigen, dass $f_i(\vec{e}) \neq \overline{0}$ ist für die beiden Richtungen $\vec{e}$ von e. Aus $|F_i| = 1$ folgt nach Wahl von F_i, dass G wirklich nur eine X_i–V^{i-1}-Kante enthält. Da G 2-kantenzusammenhängend ist, enthält G dann noch mindestens – und

e'

wegen (1) genau – eine Kante e' zwischen X_i und $\overline{V^{i-1}} \setminus X_i$. Wir zeigen, dass $f_i(\vec{e'}) \neq \overline{0}$ ist für die beiden Richtungen $\vec{e'}$ von e'; da $\{e, e'\}$ ein Schnitt in G ist, ist nach Proposition 5.1.1 dann auch jeweils $f_i(\vec{e}) \neq \overline{0}$.

Wir beweisen $f_i(\vec{e'}) \neq \overline{0}$ mit (2): wir zeigen, dass $e' \in E' \cup \bigcup_{j>i} F_j$ ist, d.h. dass e' in keinem H_k liegt und in keinem F_j mit $j \leqslant i$. Da beide Endecken von e' in $\overline{V^{i-1}}$ liegen, liegt e' sicher in keinem F_j mit $j \leqslant i$ und in keinem H_k mit $k < i$. Jedes H_k mit $k \geqslant i$ ist aber ein Teilgraph von $G[\overline{V^{i-1}}]$. Da e' eine Brücke von $G[\overline{V^{i-1}}]$ ist aber H_k keine Brücke hat, kann e' daher nicht in H_k liegen. Damit erfüllt f_{i-1} im betrachteten Fall in der Tat die Aussage (2) für $i-1$.

e_1, e_2
C

Wir betrachten nun den Fall $|F_i| = 2$, etwa $F_i = \{e_1, e_2\}$. Da sowohl H_i als auch H^{i-1} zusammenhängend ist, gibt es in $H^i = (H_i \cup H^{i-1}) + F_i$ einen Kreis C, der die Kanten e_1 und e_2 enthält. Ist f_i auf beiden Kanten nicht null, so setzen wir wieder $f_{i-1} := f_i$. Anderenfalls haben e_1 und e_2 Richtungen $\vec{e_1}$ und $\vec{e_2}$ mit oBdA $f_i(\vec{e_1}) = \overline{0}$ und $f_i(\vec{e_2}) \in \{\overline{0}, \overline{1}\}$. Es sei $\vec{C}$ der Drehsinn von C mit $\vec{e_2} \in \vec{C}$, und g ein Fluss der Stärke $\overline{1}$ um $\vec{C}$ herum (formal: ein $\mathbb{Z}_3$-Rundfluss auf G mit $g(\vec{e_2}) = \overline{1}$ und $g^{-1}(\overline{0}) = \vec{E} \setminus (\vec{C} \cup \overleftarrow{C})$). Wir setzen dann $f_{i-1} := f_i + g$. Nach Wahl der Richtungen $\vec{e_1}$ und $\vec{e_2}$ ist f_{i-1} auf beiden Kanten nicht null. Da f_{i-1} auf ganz $\vec{E'} \cup \bigcup_{j>i} \vec{F_j}$ mit f_i übereinstimmt und (2) für i gilt, gilt (2) somit wiederum auch für $i-1$.

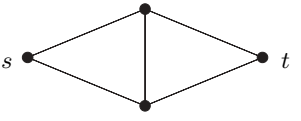
Mit f_0 erhalten wir schließlich einen $\mathbb{Z}_3$-Rundfluss auf G, der nirgends null ist außer möglicherweise auf Kanten der Teilgraphen H_i, $i = 0, \dots, n$. Durch Komposition mit der Abbildung $\overline{h} \mapsto \overline{2h}$ von $\mathbb{Z}_3$

nach $\mathbb{Z}_6$ ($h \in \{1,2\}$) wird f_0 zu einem $\mathbb{Z}_6$-Rundfluß f auf G mit Werten in $\{\overline{0},\overline{2},\overline{4}\}$ für alle Kanten, die in einem H_i liegen, und mit Werten in $\{\overline{2},\overline{4}\}$ für alle anderen Kanten. Addieren wir zu f einen 2-Fluss auf H_i für jedes i (formal: einen $\mathbb{Z}_6$-Rundfluss auf G mit Werten in $\{\overline{1},-\overline{1}\}$ auf den Kanten von H_i und $\overline{0}$ sonst; solche Flüsse existieren nach Proposition 5.4.1), so erhalten wir einen $\mathbb{Z}_6$-Rundfluss auf G, der nirgends null ist. Nach Satz 5.3.3 hat G damit einen 6-Fluss, wie behauptet. □ *f*

Übungen

1.$^-$ Beweise Proposition 5.2.1 mit Induktion nach $|S|$.

2. (i)$^-$ Finde zu jedem $n \in \mathbb{N}$ eine Kapazitätsfunktion für das abgebildete Netzwerk, bei der der Algorithmus aus dem Beweis des *max-flow min-cut theorem* bei ungünstiger Wahl der den Fluss erhöhenden Wege W mehr als n solcher Wege konstruiert.



(ii)$^+$ Zeige, dass bei der Wahl stets *kürzester* den Fluss erhöhender Wege W die Anzahl der Iterationen (d.h. der konstruierten Wege) durch eine Funktion in der Ecken- oder Kantenzahl des Netzwerks beschränkbar ist, und finde eine solche Schranke.

3.$^+$ Leite aus dem *max-flow min-cut theorem* den Satz von Menger (2.3.5) her.

(Tip: Die Kantenversion ist einfach. Simuliere die Eckenversion durch Anwendung der Kantenversion auf einen geeigneten Hilfsgraphen.)

4.$^-$ Es sei f ein H-Rundfluss auf G und $g\colon H \to H'$ ein Gruppenhomomorphismus. Zeige, dass $g \circ f$ ein H'-Rundfluss auf G ist. Ist $g \circ f$ auch ein H'-Fluss, wenn f ein H-Fluss ist?

5.$^-$ Zeige, dass ein Graph genau dann einen k-Fluss hat (zu gegebenem k), wenn jeder seiner Blöcke einen k-Fluss hat.

6.$^-$ Zeige, dass $\varphi(G/e) \leqslant \varphi(G)$ gilt für jeden Multigraphen G und jede Kante $e \in G$. Ist die Klasse aller Multigraphen mit einem k-Fluss (für festes k) somit unter Minorenbildung abgeschlossen?

7.$^-$ Bestimme die Flusszahl von K^4 direkt, ohne Resultate aus Abschnitt 5.4 zu verwenden.

8. Es sei H eine abelsche Gruppe, G ein Graph, und T ein Spannbaum in G. Zeige, dass jede Abbildung aus der Menge der Richtungen von $E(G) \setminus E(T)$ nach H, die (F1) erfüllt, eindeutig zu einem H-Rundfluss auf G fortsetzbar ist.

Die folgenden drei Übungen sollen ohne Zuhilfenahme des Sechsflusssatzes (5.6.1) gelöst werden.

9. Zeige, dass $\varphi(G) < \infty$ gilt für jeden brückenlosen Multigraphen G.

10. In einem Graphen G gebe es m Spannbäume, so dass keine Kante von G in jedem dieser Spannbäume liegt. Zeige $\varphi(G) \leqslant 2^m$.

11. Es sei G ein brückenloser zusammenhängender Graph mit n Ecken und m Kanten. Zeige anhand eines normalen Spannbaums von G, dass $\varphi(G) \leqslant m - n + 2$ ist.

12. Zeige, dass jeder Multigraph G mit einem *Hamiltonkreis* (einem Kreis in G, der alle Ecken von G enthält) einen 4-Fluss hat.

13. Eine Familie nicht notwendig verschiedener Kreise in einem Graphen G ist eine *doppelte Kreisüberdeckung* von G, wenn jede Kante von G auf genau zweien dieser Kreise liegt. Eine bekannte Vermutung, die *cycle double cover conjecture*, besagt, dass jeder brückenlose Multigraph eine doppelte Kreisüberdeckung hat. Zeige, dass jeder Multigraph mit einem 4-Fluss eine doppelte Kreisüberdeckung besitzt.

14.$^-$ Bestimme die Flusszahl von $C^5 * K^1$, des Rades mit 5 Speichen.

15. Finde brückenlose Graphen G und $H = G - e$ mit $2 < \varphi(G) < \varphi(H)$.

16. Beweise Proposition 5.4.1, ohne Satz 5.3.3 zu benutzen.

17.$^+$ Beweise den Satz von Heawood, dass ein ebener Dreiecksgraph genau dann 3-färbbar ist, wenn all seine Ecken geraden Grad haben.

18. Zeige, dass die Dreiflussvermutung für plättbare Multigraphen äquivalent ist zum Satz 4.1.3 von Grötzsch.

19. (i)$^-$ Zeige, dass der Vierfarbensatz äquivalent ist zu der Aussage, dass es keinen plättbaren Snark gibt, dass also jeder kubische brückenlose plättbare Multigraph einen 4-Fluss hat.

    (ii) Kann man in (i) „brückenlos“ durch „3-zusammenhängend“ ersetzen?

20.$^+$ Zeige, dass ein Graph $G = (V, E)$ genau dann einen k-Fluss hat, wenn eine Orientierung D von G existiert, in der für jedes $X \subseteq V$ mindestens $1/k$ der Kanten aus $E(X, \overline{X})$ von X nach $\overline{X}$ gerichtet sind.

21.$^-$ Leite aus dem Sechsflusssatz 5.6.1 die entsprechende Aussage für Multigraphen her.

Notizen

Die Theorie der Netzwerke ist eine der Anwendungen der Graphentheorie, aus denen diese in den letzten Jahrzehnten wesentliche Impulse erhalten hat. Das *max-flow min-cut theorem* (Satz 5.2.2) von Ford und Fulkerson steht am Anfang dieser Entwicklung; sie geht jedoch wesentlich darüber hinaus. Betrachtungen etwa zur Zuverlässigkeit von Netzwerken können auf interessante Zusammenhangsprobleme führen, oder auf Fragen aus der Theorie der Zufallsgraphen (siehe Kapitel 9).

Das klassische Buch zur frühen Netzwerktheorie ist L.R. Ford & D.R. Fulkerson, *Flows in Networks*, Princeton University Press 1962. Eine neuere umfassende Darstellung geben R.K. Ahuja, T.L. Magnanti & J.B. Orlin, *Network flows*, Prentice-Hall 1993; siehe auch das Kapitel von A. Frank im *Handbook of Combinatorics* (R.L. Graham, M. Grötschel & L. Lovász, Hrsg.), North-Holland 1995. Eine allgemeine Einführung in die algorithmische Graphentheorie, darunter in die Theorie der Netzwerke, gibt D. Jungnickel, *Graphen, Netzwerke und Algorithmen*, BI-Wissenschaftsverlag 1987. Fasst man das Problem, einen Fluss maximaler Stärke durch ein gegebenes Netzwerk zu finden, als Problem der Linearen Optimierung auf, so kann man das *max-flow min-cut theorem* aus deren Dualitätssatz herleiten. Dies ist bei Jungnickel angedeutet; siehe auch A. Schrijver, *Theory of integer and linear programming*, Wiley 1986.

Die algebraische Flusstheorie wurde im Wesentlichen von Tutte entwickelt und ist von ihm in W.T. Tutte, *Graph Theory*, Addison-Wesley 1984, in einem allgemeineren algebraischen Rahmen dargestellt. Eine Übersicht gibt F. Jaeger, Nowhere-zero flow problems, in L.W. Beineke & R.J. Wilson (Hrsg.), *Selected Topics in Graph Theory 3*, Academic Press 1988. Dass auch die Anzahl der k-Flüsse eines Multigraphen ein Polynom in k ist, bewies M. Kochol, Polynomials associated with nowhere-zero flows, *J. Comb. Theory B* **84** (2002), 260–269. Dort finden sich auch auf den Werten des Flusspolynoms basierende Schranken für dieses Polynom.

Eingehende Darstellungen der Tutteschen Flussvermutungen geben Jaeger (s.o.) und T.R. Jensen & B. Toft, *Graph Coloring Problems*, Wiley 1995. Robertson, Sanders, Seymour und Thomas kündigten 1998 einen Beweis der Vierflussvermutung für kubische Graphen an.

Der Sechsflusssatz 5.6.1 ist von P.D. Seymour, Nowhere-zero 6-flows, *J. Comb. Theory B* **30** (1981), 130–135; dort ist auch die Zurückführung der Tutteschen Fünfflussvermutung auf Snarks angedeutet. Unser Beweis, dass alle vollständigen Graphen gerader Ordnung > 4 einen 3-Fluss haben (Proposition 5.4.3), stammt von Jensen.

Schließlich sei noch das *Tutte-Polynom* eines Graphen erwähnt, eine gemeinsame Verallgemeinerung seines chromatischen Polynoms und seines Flusspolynoms. Dies ist nur die Spitze eines Eisbergs: das Tutte-Polynom hat weitreichende Beziehungen bis hin zur Knotentheorie und statistischen Physik; siehe D.J.A. Welsh, *Complexity: knots, colourings and counting* (LMS Lecture Notes **186**), Cambridge University Press 1993.

6 Extremale Graphentheorie

Leitfaden dieses Kapitels ist die Frage, inwieweit globale Annahmen über einen Graphen, etwa zu seinem Durchschnittsgrad oder seiner chromatischen Zahl, die Existenz einer konkret vorgegebenen Teilstruktur erzwingen können. Wieviele Kanten etwa müssen wir einem Graphen auf n Ecken geben, um sicher sein zu können, dass irgendwo in ihm ein vollständiger Graph K^r liegt, zu vorgegebenem r? Oder zumindest ein MK^r, und damit ein K^r-Minor? Oder ein TK^r, ein topologischer K^r-Minor? Reicht die Annahme einer hohen chromatischen Zahl aus, um die eine oder andere dieser Teilstrukturen zu erzwingen?

Fragen dieser Art gehören zu den klassischen Problemstellungen der Graphentheorie; man fasst sie unter der Bezeichnung *extremale Graphentheorie* zusammen.[1]

extremale Graphentheorie

Die extremale Graphentheorie zerfällt ganz grob in zwei Bereiche: in „magere“ und „dichte“ extremale Graphentheorie. Wollen wir durch globale Annahmen erzwingen, dass ein Graph G einen gegebenen Graphen H als *Minor* (oder topologischen Minor) enthält, so reicht es dazu aus, eine Mindestkantenzahl vorzuschreiben, die linear mit der Eckenzahl von G wächst. Anders ausgedrückt: es reicht, $\varepsilon(G)$ genügend groß zu machen. Graphen, deren Kantenzahl größenordnungsmäßig[2] höchstens linear in ihrer Eckenzahl ist, heißen *mager*. Abschnitt 6.2 beschäftigt sich mit solch „magerer“ extremaler Graphentheorie.

mager

Besonders spannend ist die Erzwingung eines gewünschten Minors H durch die Annahme einer hohen chromatischen Zahl von G. Aus

[1] Wie es zu dieser Namensgebung kam, wird in Abschnitt 6.1 deutlich werden.

[2] Formal betrachtet sind die Begriffe mager und dicht (s.u.) nur für Klassen von Graphen sinnvoll, deren Ordnung gegen unendlich geht, nicht für einzelne Graphen.

Korollar 4.2.3 wissen wir, dass dies grundsätzlich möglich ist: ist etwa $\chi(G) \geqslant k+1$, so hat G einen Teilgraphen G' mit $2\varepsilon(G') \geqslant \delta(G') \geqslant k$, und hinreichend großes ε erzwingt jeden gewünschten Minor. Es stellt sich jedoch die Frage, ob die Auswirkungen hoher chromatischer Zahl von G auf diesen indirekten Einfluss über ε beschränkt sind, oder ob die Annahme von $\chi \geqslant k+1$ größere Minoren erzwingen kann, als die Annahme von $2\varepsilon \geqslant k$ es vermag. Die *Hadwiger-Vermutung*, welche wir in Abschnitt 6.3 kennenlernen werden, besagt, dass hohes χ solche weitergehenden Auswirkungen hat. Man kann die Vermutung als eine Verallgemeinerung des Vierfarbensatzes sehen, und sie gilt weithin als das weitreichendste offene Problem der Graphentheorie.

Fragen wir, welche globalen Annahmen das Auftreten eines gegebenen Graphen H als *Teilgraphen* implizieren, so wird es nicht helfen, Invarianten wie ε oder χ zu erhöhen – ganz zu schweigen von anderen Invarianten, die wir in Kapitel 0 betrachtet haben. Denn sobald H einen Kreis enthält, gibt es Graphen mit beliebig hoher chromatischer Zahl, die H nicht als Teilgraphen enthalten (Satz 4.2.5). Ist H nicht bipartit, so muss insbesondere jede Funktion f, für die $f(n)$ Kanten auf n Ecken einen H-Teilgraphen erzwingen, quadratisch mit n wachsen. (Warum?)

dicht

Kantendichte

Graphen, deren Kantenanzahl größenordnungsmäßig quadratisch in der Anzahl ihrer Ecken ist, nennt man *dicht*; die Zahl $\|G\| / \binom{|G|}{2}$, der in G tatsächlich vorhandene Anteil seiner potentiellen Kanten, ist die *Kantendichte* von G. Die Frage, welche Kantendichte erforderlich ist, um einen gewünschten Teilgraphen zu erzwingen, ist der Urtyp aller Fragestellungen in der extremalen Graphentheorie. Diese Frage wird auch unser erstes Thema sein, in Abschnitt 6.1. Zuerst beweisen wir dort den Prototyp aller Sätze der extremalen Graphentheorie überhaupt: den Satz von Turán, der die zur Erzwingung eines K^r-Teilgraphen nötige Kantenzahl beziffert. Nach diesem typischen aber speziellen Resultat betrachten wir den sehr allgemeinen Satz von Erdős und Stone; dieser bestimmt jene Kantenzahl asymptotisch für alle Graphen H.

Obwohl man den Satz von Erdős und Stone auch elementar beweisen kann, nutzen wir diese Gelegenheit zur Einführung in eine moderne Beweistechnik, die die extremale Graphentheorie in den letzten Jahren zunehmend geprägt hat: Szemerédis *Regularitätslemma*. Dieses Lemma lernen wir in Abschnitt 6.4 kennen und anwenden. Eine weitere Anwendung wird es in Kapitel 7.2 geben.

6.1 Teilgraphen

Es sei H ein Graph. Wieviele Kanten reichen aus, um in einem Graphen gegebener Eckenzahl einen zu H isomorphen Teilgraphen zu erzwingen? Umgekehrt ausgedrückt: was ist die größtmögliche Kantenzahl eines Graphen auf n Ecken, der H nicht als Teilgraphen enthält? Wie

sieht ein solcher Graph mit maximaler Kantenzahl aus? Ist er eindeutig bestimmt?

Einen Graphen G wie oben nennt man *extremal* mit der Eigenschaft $H \not\subseteq G$; seine Kantenzahl bezeichnet man mit $\mathrm{ex}(n, H)$. Ein Graph G ist also genau dann extremal ohne H-Teilgraphen, wenn $H \not\subseteq G$ gilt aber $H \subseteq G'$ für jeden Graphen G' mit $|G|$ Ecken und mehr als $\|G\|$ Kanten.

extremal

$\mathrm{ex}(n, H)$

Ist G extremal ohne H-Teilgraphen, so ist G insbesondere kantenmaximal mit $H \not\subseteq G$. Die Umkehrung braucht jedoch nicht zu gelten (Abb. 6.1.1); Extremalität ist also allgemein eine stärkere Eigenschaft als Kantenmaximalität.

Abb. 6.1.1. Zwei mit $P^3 \not\subseteq G$ kantenmaximale Graphen G. Der rechte ist sogar extremal – warum?

Betrachten wir unser eingangs formuliertes allgemeines Problem, zu gegebenem Graphen H die mit $H \not\subseteq G$ extremalen Graphen G und ihre Kantenzahl zu bestimmen, zunächst exemplarisch für $H = K^r$ (mit $r > 1$). Offensichtliche Kandidaten für Extremalität ohne K^r-Teilgraphen sind die vollständig $(r-1)$-partiten Graphen; diese sind jedenfalls schon einmal kantenmaximal ohne K^r. Welche unter den vollständig $(r-1)$-partiten Graphen mit gegebener Eckenzahl aber haben die meisten Kanten? Offensichtlich diejenigen, bei denen die Ecken so gleichmäßig wie möglich auf die Partitionsmengen verteilt sind, sich deren Mächtigkeiten also um höchstens 1 unterscheiden: sind nämlich V_1, V_2 zwei Partitionsmengen mit $|V_1| - |V_2| \geqslant 2$, so erhöht sich die Anzahl der Kanten in unserem vollständig $(r-1)$-partiten Graphen um mindestens 1, wenn wir eine Ecke von V_1 nach V_2 versetzen.

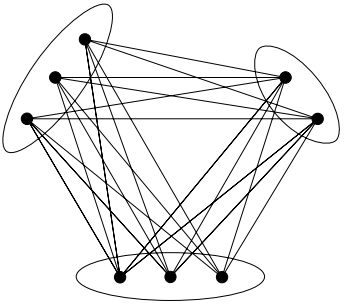


Abb. 6.1.2. Der Turángraph $T^3(8)$

Den eindeutig bestimmten vollständig $(r-1)$-partiten Graphen auf $n \geqslant r-1$ Ecken, dessen Partitionsmengen sich in ihrer Mächtigkeit um höchstens 1 unterscheiden, nennt man einen *Turángraphen*; wir bezeichnen ihn mit $T^{r-1}(n)$ und seine Kantenzahl mit $t_{r-1}(n)$ (Abb. 6.1.2). Für $n < r-1$ übernehmen wir diese Definition mit der Maßgabe, dass die Partitionsmengen ausnahmsweise auch leer sein dürfen; offenbar gilt dann $T^{r-1}(n) = K^n$ für alle $n \leqslant r-1$.

$T^{r-1}(n)$
$t_{r-1}(n)$

Wie der folgende Satz zeigt, ist der Turángraph $T^{r-1}(n)$ in der Tat extremal ohne K^r; insbesondere gilt also $\mathrm{ex}(n, K^r) = t_{r-1}(n)$. Er ist als Extremalgraph sogar eindeutig bestimmt:

[6.1.2]
[7.2.2]

Satz 6.1.1. (Turán 1941)
Für alle $r, n \in \mathbb{N}$ mit $r > 1$ ist jeder Graph $G \not\supseteq K^r$ mit n Ecken und $\mathrm{ex}(n, K^r)$ Kanten ein $T^{r-1}(n)$.

Wir geben zwei Beweise für den Satz von Turán: einen Induktionsbeweis, und einen ganz kurzen direkten Beweis.

Erster Beweis. Wir verwenden Induktion nach n. Für $n \leqslant r-1$ gilt $G = K^n = T^{r-1}(n)$ wie behauptet. Zum Induktionsschritt sei jetzt $n \geqslant r$.

Da G kantenmaximal ohne K^r-Teilgraph ist, hat G einen Teilgraphen $K = K^{r-1}$, etwa mit Ecken $x_1, \dots, x_{r-1}$. Nach Induktionsannahme hat $G - K$ höchstens $t_{r-1}(n-r+1)$ Kanten, und jede Ecke von $G - K$ hat höchstens $r-2$ Nachbarn in K. Somit gilt

K
$x_1, \dots, x_{r-1}$

$$\|G\| \leqslant t_{r-1}(n-r+1) + (n-r+1)(r-2) + \binom{r-1}{2} = t_{r-1}(n)\,; \quad (1)$$

die Gleichheit rechts folgt sofort aus einer Betrachtung des Turángraphen $T^{r-1}(n)$ (Abb. 6.1.3).

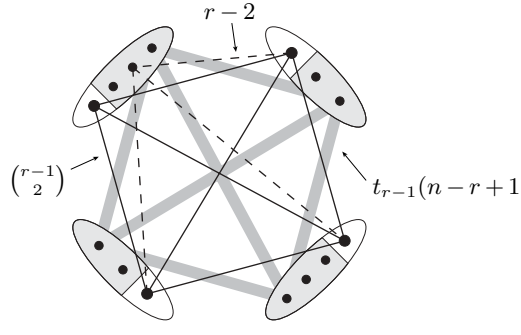


Abb. 6.1.3. Die Gleichung aus (1) für $r = 5$ und $n = 14$

Da G extremal ohne K^r ist und auch $T^{r-1}(n)$ keinen K^r enthält, gilt Gleichheit in (1). Jede Ecke von $G - K$ hat daher *genau* $r-2$ Nachbarn in K, wie die Ecken aus K selbst. Für $i = 1, \dots, r-1$ sei

$$V_i := \{\, v \in V(G) \mid vx_j \in E(G) \Leftrightarrow i \neq j \,\} \qquad V_1, \dots, V_{r-1}$$

die Menge aller Ecken von G, deren $r-2$ Nachbarn in K genau die Ecken außer x_i sind. Wegen $K^r \not\subseteq G$ sind die Eckenmengen V_i unabhängig, und sie partitionieren ganz $V(G)$. G ist also $(r-1)$-partit. Da unter den $(r-1)$-partiten Graphen mit n Ecken der Turángraph $T^{r-1}(n)$, und nur dieser, die größtmögliche Kantenzahl hat, folgt $G = T^{r-1}(n)$ aus der Extremalität von G. □

Unser zweiter Beweis des Satzes von Turán verwendet die Operation der *Verdopplung* einer Ecke $v \in G$. Darunter verstehen wir die Hinzufügung einer neuen Ecke v', die mit genau den Nachbarn von v (aber nicht mit v selbst) verbunden wird.

Eckenverdopplung

Zweiter Beweis. Wie wir bereits sahen, haben unter den vollständig k-partiten Graphen mit n Ecken die Turángraphen $T^k(n)$ die meisten Kanten, und $T^{r-1}(n)$ hat mehr Kanten als alle $T^k(n)$ mit $k < r-1$ (betrachte die Eckengrade). Es reicht daher zu zeigen, dass G vollständig multipartit ist.

Anderenfalls ist Nichtbenachbartheit keine Äquivalenzrelation auf $V(G)$, d.h. es gibt Ecken y_1, x, y_2 mit $y_1x, xy_2 \notin E(G)$ aber $y_1y_2 \in E(G)$. Ist $d(y_1) > d(x)$, so erhalten wir durch Löschen von x und Verdoppeln von y_1 einen wiederum K^r-freien Graphen mit mehr Kanten als G, im Widerspruch zur Wahl von G. Also gilt $d(y_1) \leqslant d(x)$, und entsprechend $d(y_2) \leqslant d(x)$. Nun aber können wir sowohl y_1 als auch y_2 löschen und dafür x zweimal verdoppeln, und erhalten wiederum mit Widerspruch einen K^r-freien Graphen mit mehr Kanten als G. □

Der Turángraph $T^{r-1}(n)$ hat größenordnungsmäßig n^2 Kanten: für alle n und r gilt

$$t_{r-1}(n) \leqslant \tfrac{1}{2}n^2 \, \frac{r-2}{r-1}\,,$$

mit Gleichheit immer dann, wenn n durch $r-1$ teilbar ist (Übung). Es ist daher bemerkenswert, dass für hinreichend großes n nur ϵn^2 mehr Kanten als $t_{r-1}(n)$ nicht nur einen K^r-Teilgraphen erzwingen (wie nach dem Satz von Turán), sondern sogar einen K^r_s mit beliebig großem s – einen Graphen also, in dem es von K^r-Teilgraphen nur so wimmelt:

Satz 6.1.2. (Erdős & Stone 1946)
Zu jedem $r \in \mathbb{N}$ mit $r \geqslant 2$, jedem $s \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und jedem $\epsilon > 0$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft, dass jeder Graph mit $n \geqslant n_0$ Ecken und mindestens

$$t_{r-1}(n) + \epsilon n^2$$

Kanten einen K^r_s als Teilgraphen enthält.

Den Beweis von Satz 6.1.2 verschieben wir auf den Abschnitt 6.4: dort werden wir ein mächtiges Beweismittel der extremalen Graphentheorie kennenlernen, das Regularitätslemma von Szemerédi. Den Satz von Erdős und Stone werden wir aus diesem Lemma herleiten.

Der Satz von Erdős und Stone ist nicht nur an sich interessant, er hat auch ein ganz erstaunliches Korollar. Eigentlich war es erst dieses vollkommen unerwartete Korollar, das den Satz als eine Art Meta-Theorem der dichten extremalen Graphentheorie überhaupt etabliert und dadurch berühmt gemacht hat.

Betrachten wir zu gegebenem Graphen H und $n \in \mathbb{N}$ die Zahl $h_n := \operatorname{ex}(n, H)/\binom{n}{2}$. Ist G ein Graph auf n Ecken, so hat G höchstens $\binom{n}{2}$ Kanten. Die Zahl h_n bezeichnet also den maximalen Anteil an seinen *möglichen* Kanten, die G haben kann, ohne H als Teilgraphen zu enthalten.

Könnte es sein, dass diese Zahl h_n im wesentlichen nur von H abhängt, dass der kleinste einen H-Teilgraphen erzwingende Kantenanteil für wachsende Eckenzahl konvergiert? Aus Satz 6.1.2 folgt nicht nur dieses. Es folgt sogar, dass h_n asymptotisch durch eine einfache Invariante von H bestimmt ist: durch seine chromatische Zahl!

Korollar 6.1.3. *Für jeden Graphen H mit mindestens einer Kante gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{ex}(n, H)\binom{n}{2}^{-1} = \frac{\chi(H)-2}{\chi(H)-1}\,.$$

Zum Beweis von Korollar 6.1.3 brauchen wir als Lemma, dass $t_{r-1}(n)$ auch für Werte von n, die kein Vielfaches von $r-1$ sind, nicht zu stark von seinem sonstigen Wert $\frac{1}{2}n^2(r-2)/(r-1)$ abweicht und $t_{r-1}(n)/\binom{n}{2}$ entsprechend konvergiert. Ein Tip zum Beweis des Lemmas findet sich bei den Übungen.

[6.1.2] **Lemma 6.1.4.**

$$\lim_{n\to\infty} t_{r-1}(n)\binom{n}{2}^{-1} = \frac{r-2}{r-1}\,.$$

□

Beweis von Korollar 6.1.3. Es sei $r := \chi(H)$. Da H nicht mit $r-1$ Farben färbbar ist, gilt $H \not\subseteq T^{r-1}(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und somit

$$t_{r-1}(n) \leqslant \mathrm{ex}(n, H)\,.$$

Andererseits gilt $H \subseteq K_s^r$ für hinreichend große s, und daher

$$\mathrm{ex}(n, H) \leqslant \mathrm{ex}(n, K_s^r)$$

für alle diese s. Im Folgenden sei ein solches s fest gewählt. Nach Satz 6.1.2 gilt nun für jedes $\epsilon > 0$ schließlich, d.h. wenn n groß genug ist,

$$\mathrm{ex}(n, K_s^r) < t_{r-1}(n) + \epsilon n^2\,,$$

insgesamt also

$$\begin{aligned} t_{r-1}(n)/\tbinom{n}{2} &\leqslant \mathrm{ex}(n, H)/\tbinom{n}{2} \\ &\leqslant \mathrm{ex}(n, K_s^r)/\tbinom{n}{2} \\ &< t_{r-1}(n)/\tbinom{n}{2} + \epsilon n^2/\tbinom{n}{2} \\ &= t_{r-1}(n)/\tbinom{n}{2} + 2\epsilon/(1-\tfrac{1}{n}) \\ &\leqslant t_{r-1}(n)/\tbinom{n}{2} + 4\epsilon \qquad (\text{für } n \geqslant 2). \end{aligned}$$

Mit $t_{r-1}(n)/\binom{n}{2}$ konvergiert daher $\mathrm{ex}(n, H)/\binom{n}{2}$ gegen $(r-2)/(r-1)$ (Lemma 6.1.4), wie behauptet. □

Für bipartite Graphen H sagt uns Korollar 6.1.3, dass deutlich weniger als $\binom{n}{2}$ Kanten ausreichen, um H als Teilgraphen zu erzwingen. Wie man zeigen kann, gilt

$$c_1 n^{2-\frac{2}{r+1}} \leqslant \mathrm{ex}(n, K_{r,r}) \leqslant c_2 n^{2-\frac{1}{r}}$$

mit von r abhängigen Konstanten c_1, c_2. Ist H ein Wald, so folgt $H \subseteq G$ bereits aus hinreichend großem $\varepsilon(G)$, d.h. $\mathrm{ex}(n, H)$ ist höchstens linear in n (Übung **13**). Erdős und Sós vermuteten bereits 1963, dass $\mathrm{ex}(n, T) \leqslant \frac{1}{2}(k-1)n$ gilt für alle Bäume mit $k \geqslant 2$ Kanten; als allgemeine Schranke für alle n wäre dies für jedes T bestmöglich. Einzelheiten finden sich in den Übungen **14**–**16**.

Erdős-Sós-Vermutung

Eine ganz andere Frage ist, ob große Werte von ε oder χ einen Graphen G zwingen können, einen gegebenen Baum T als *Untergraphen* zu enthalten, also induziert. Natürlich brauchen wir noch zusätzliche Annahmen, damit diese Frage sinnvoll wird – etwa um zu verhindern, dass G einfach ein großer vollständiger Graph wird. Die schwächste vernünftige solche Annahme ist, dass G beschränkte Cliquenzahl haben soll, dass also $G \not\supseteq K^r$ für ein festes r gilt. Dann erzwingt hoher Durchschnittsgrad zwar immer noch keinen T-Untergraphen – man betrachte etwa vollständig bipartite Graphen – aber hohe chromatische Zahl könn-

te dies bewirken: eine bemerkenswerte Vermutung von Gyárfás (1975) jedenfalls besagt, dass es zu jedem $r \in \mathbb{N}$ und jedem Baum T ein $k \in \mathbb{N}$ gibt mit der Eigenschaft, dass jeder Graph G mit $\chi(G) \geqslant k$ und $\omega(G) < r$ diesen Baum T als Untergraphen enthält.

6.2 Minoren

In diesem und dem nächsten Abschnitt fragen wir, wie globale Annahmen über einen Graphen – zu seinem Durchschnittsgrad, seiner chromatische Zahl, oder auch nur seiner Taillenweite – ihn dazu zwingen können, einen gegebenen Graphen als Minor oder topologischen Minor zu enthalten.

Betrachten wir etwa das Analogon zum Satz von Turán: wie viele Kanten auf n Ecken erzwingen einen K^r als Minor oder topologischen Minor? Aus Kapitel 2.5 wissen wir, dass topologische K^r-Minoren bereits in mageren Graphen erzwingbar sind, dass also eine lineare Anzahl von $c_r n$ Kanten genügt. Was aber können wir über c_r als Funktion von r aussagen? Die obere Schranke $h(r)$, die wir für c_r im Beweis von Lemma 2.5.1 gefunden haben, war $2^{\binom{r}{2}}$; eine einfache untere Schranke ist $\frac{1}{8}r^2$ (Übung 25).

Erst seit 1996 ist bekannt, dass die untere Schranke größenordnungsmäßig richtig liegt. Mit Hilfe von Satz 2.5.3 ist der Beweis jetzt nur noch wenige Zeilen lang:

Satz 6.2.1. *Es existiert ein $c \in \mathbb{R}$, so dass für jedes $r \in \mathbb{N}$ jeder Graph G mit Durchschnittsgrad $d(G) \geqslant cr^2$ einen K^r als topologischen Minor enthält.*

(0.4.3) (2.5.3)

Beweis. Wir zeigen den Satz mit $c = 10$. Dazu sei G mit $d(G) \geqslant 10r^2$ gegeben. Nach Satz 0.4.3 mit $k = r^2$ hat G einen Teilgraphen H mit $\kappa(H) \geqslant r^2$ und $\varepsilon(H) > \varepsilon(G) - r^2 \geqslant 4r^2$. Für einen TK^r in H wählen wir in H eine Menge X von r Ecken als Verzweigungsecken, jeweils mit $r-1$ Nachbarn als erste Unterteilungsecken. Dies sind insgesamt r^2 Ecken; wir können sie verschieden wählen wegen $\delta(H) \geqslant \kappa(H) \geqslant r^2$. Die Menge der $r(r-1)$ gewählten Nachbarn von X bezeichnen wir mit Y.

Wir wollen nun die Ecken aus Y in $H' := H - X$ durch disjunkte Wege verbinden, entsprechend den Kanten des K^r. Dazu zeigen wir mit Satz 2.5.3, dass H' k-verbunden ist für $k = \frac{1}{2}r(r-1)$, und somit Y in H' verbunden. Nun ist $\kappa(H') \geqslant \kappa(H) - r \geqslant r(r-1)$, und da H' höchstens $r|H|$ Kanten weniger hat als H, ist $\varepsilon(H') \geqslant \varepsilon(H) - r \geqslant 4r(r-1)$. Die Voraussetzungen von Satz 2.5.3 sind also erfüllt. □

Satz 6.2.1 gibt bereits eine recht gute obere Schranke für die zur Erzwingung eines topologischen K^r-Minors erforderliche Kantenzahl eines Graphen. Diese Zahl genau zu bestimmen scheint selbst für kleine r nicht

leicht zu sein. Für $r = 4$ beträgt sie $2n-2$ (Korollar 6.3.2). Für $r = 5$ geben plättbare Graphen eine untere Schranke: sie können auf n Ecken bis zu $3n-6$ Kanten haben, enthalten aber keinen TK^5. Dass andererseits $3n-5$ oder mehr Kanten nicht nur einen TK^5 *oder* $TK_{3,3}$ erzwingen (was sie nach Korollar 3.2.10 und dem Satz von Kuratowski tun), sondern stets einen TK^5, ist bereits ein tiefes Resultat von Mader (1998).

Nachdem wir bisher topologische Minoren betrachtet haben, wenden wir uns jetzt allgemeinen Minoren zu. Der Durchschnittsgrad, den man braucht, um einen K^r-Minor zu erzwingen, ist sehr genau bekannt. Thomason (2001) bestimmte asymptotisch die kleinste Konstante c, die den folgenden Satz wahr macht, als $\alpha + o(1)$; hier steht $o(1)$ für eine Funktion von r, die gegen null geht für $r \to \infty$, und $\alpha = 0.53131\ldots$ ist eine explizite Konstante.

Satz 6.2.2. (Kostochka 1982)
Es existiert ein $c \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass jeder Graph G mit Durchschnittsgrad $d(G) \geqslant c\, r\sqrt{\log r}$ einen K^r als Minor enthält. Diese Schranke ist größenordnungsmäßig als Funktion von r bestmöglich.

Dass ein Durchschnittsgrad von mindestens $c\, r\sqrt{\log r}$ zur Erzwingung eines K^r-Minors notwendig ist, folgt aus der Betrachtung von Zufallsgraphen (Kapitel 9). Dass ein solcher Durchschnittsgrad auch ausreicht, beweist man mit ähnlichen Methoden wie im Beweis von Satz 2.5.3.

Statt Satz 6.2.2 zu beweisen, widmen wir daher den Rest dieses Abschnitts einem fast paradox anmutenden weiteren Resultat: solange wir nicht lediglich Kanten unterteilen, können wir die Existenz eines beliebig großen vollständigen Minors auch durch hinreichend hohe Taillenweite erzwingen!

Betrachtet man dieses Ergebnis auf dem Umweg über die Erzwingung eines Minors mit hohem Durchschnittsgrad (der dann seinerseits einen großen vollständigen Minor enthalten muss), so ist es bei etwas genauerem Hinsehen gar nicht mehr so überraschend. Ist die Taillenweite g eines Graphen groß, so induziert jede Kugel $\{\, v \mid d(x,v) < \lfloor g/2 \rfloor \,\}$ um eine feste Ecke x einen Baum mit vielen Blättern, deren inzidente Kanten aus G bis auf eine alle aus dem Baum herausführen. Die Kontraktion hinreichend vieler solcher Bäume könnte also durchaus geeignet sein, einen Minor mit hohem Durchschnittsgrad zu gewinnen.

Das folgende Lemma führt diese Idee durch.

Lemma 6.2.3. *Es seien $d, k \in \mathbb{N}$ gegeben, $d \geqslant 3$, sowie ein Graph G mit Minimalgrad $\delta(G) \geqslant d$ und Taillenweite $g(G) \geqslant 8k+3$. Dann hat G einen Minor H mit Minimalgrad $\delta(H) \geqslant d(d-1)^k$.*

Beweis. Es sei $X \subseteq V(G)$ maximal mit $d(x,y) > 2k$ für je zwei Ecken $x, y \in X$. Für jedes $x \in X$ sei $T_x^0 := \{x\}$. Zu gegebenem $i < 2k$ nehmen wir nun an, dass wir bereits disjunkte Bäume $T_x^i \subseteq G$ definiert X

haben (zu jedem $x \in X$ einen), deren Ecken zusammen genau die Ecken mit Abstand höchstens i von X in G sind. Verbinden wir jede Ecke des Abstands $i+1$ von X mit einem ihrer Nachbarn des Abstands i von X, so erhalten wir eine Familie erweiterter disjunkter Bäume T_x^{i+1}. Da jede Ecke von G den Abstand höchstens $2k$ von X hat (wegen der Maximalität von X), partitionieren die so erhaltenen Bäume $T_x := T_x^{2k}$ die gesamte Eckenmenge von G. Es sei H der Minor von G, der durch Kontraktion aller Bäume T_x entsteht.

T_x

Um $\delta(H) \geqslant d(d-1)^k$ zu zeigen, halten wir zunächst fest, dass jedes T_x wegen $\operatorname{diam} T_x \leqslant 4k$ und $g(G) > 4k+1$ sogar ein Untergraph von G ist. Weiter enthält G zwischen je zwei Bäumen T_x und T_y höchstens eine Kante: zwei solche Kanten ergäben zusammen mit den ihre Endecken verbindenden Wegen in T_x und T_y einen Kreis der Länge höchstens $8k+2 < g(G)$. Somit bleiben alle Kanten zwischen T_x und $G - T_x$ bei der Kontraktion erhalten.

Wieviele solche Kanten gibt es? Für jede Ecke $v \in T_x^{k-1}$ liegen all ihre $d_G(v) \geqslant d$ Nachbarn aus G in T_x, da diese Nachbarn zu jedem anderen $x' \in X$ einen größeren Abstand haben als zu x (wegen $d(x,x') > 2k$ nach Wahl von X) und daher bei der Definition der Bäume dem Baum T_x zugeordnet wurden. Somit hat T_x^k, und daher auch T_x, mindestens $d(d-1)^{k-1}$ Blätter. Da nun von jedem Blatt von T_x aus mindestens $d-1$ Kanten T_x verlassen, hat G mindestens $d(d-1)^k$ aus T_x herausführende Kanten, und H hat mindestens diesen Minimalgrad. □

Lemma 6.2.3 versieht Satz 6.2.2 mit folgendem Korollar:

Satz 6.2.4. (Thomassen 1983)
Es gibt eine Funktion $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, für die jeder Graph mit Minimalgrad mindestens 3 und Taillenweite mindestens $f(r)$ einen K^r-Minor enthält (für alle $r \in \mathbb{N}$).

Beweis. Wir beweisen den Satz mit $f(r) := 8\log r + 4\log\log r + c$, für eine geeignete Konstante $c \in \mathbb{R}$. Es sei $k = k(r) \in \mathbb{N}$ minimal mit $3 \cdot 2^k \geqslant c' r\sqrt{\log r}$, wobei $c' \in \mathbb{R}$ die Konstante aus Satz 6.2.2 ist. Für eine geeignete Konstante $c \in \mathbb{R}$ gilt dann $8k+3 \leqslant 8\log r + 4\log\log r + c$, und die Behauptung folgt mit Lemma 6.2.3 und Satz 6.2.2. □

Mit grosser Taillenweite kann man auch einen topologischen K^r-Minor erzwingen. Natürlich brauchen wir nun Ecken vom Grad mindestens $r-1$, die uns als Verzweigungsecken dienen können. Doch wenn wir deren Existenz dadurch sichern, dass wir einen Minimalgrad von mindestens $r-1$ annehmen, kommen wir für die Taillenweite sogar mit einer Schranke aus, die unabhängig von r ist:

[6.3.9] **Satz 6.2.5.** (Kühn & Osthus 2002)
Es existiert eine Konstante g, so dass $G \supseteq TK^r$ gilt für jeden Graphen G mit $\delta(G) \geqslant r-1$ und $g(G) \geqslant g$.

6.3 Die Hadwiger-Vermutung

Betrachten wir nun die Frage, inwieweit eine hohe chromatische Zahl – wie der Durchschnittsgrad ebenfalls eine „globale“ Invariante – die Existenz konkreter Unterstrukturen erzwingt. Vergleicht man die Wirkung dieser beiden Invarianten aufeinander, so ist die Annahme hoher chromatischer Zahl eindeutig stärker als die Annahme hohen Durchschnittsgrads: nach Korollar 4.2.3 hat jeder Graph der chromatischen Zahl $> k$ einen Teilgraphen vom Minimalgrad mindestens k, während umgekehrt bereits bipartite Graphen beliebig hohen Durchschnittsgrad haben können aber all ihre Teilgraphen 2-chromatisch sind.

Vergleichen wir jedoch die Wirkung der beiden Invarianten direkt hinsichtlich der Erzwingung von Minoren, so ist das Bild weniger klar. Natürlich ist auch hier die Annahme hoher chromatischer Zahl „mindestens so stark“ wie die Annahme hohen Durchschnittsgrads: alle nach Abschnitt 6.2 durch einen Durchschnittsgrad $\geqslant k$ erzwingbaren Minoren oder topologischen Minoren können wir wegen Korollar 4.2.3 auch durch die Annahme einer chromatischer Zahl $> k$ erzwingen. Doch reicht dazu vielleicht schon eine geringere chromatische Zahl?

Für die Erzwingung vollständiger Minoren oder topologischer Minoren heißt dies konkret: reicht eine größenordnungsmäßig kleinere chromatische Zahl als r^2 zur Erzwingung eines TK^r (vgl. Satz 6.2.1), oder eine größenordnungsmäßig kleinere chromatische Zahl als $r\sqrt{\log r}$ zur Erzwingung eines K^r-Minors (Satz 6.2.2)? Da beide Funktionen für den Durchschnittsgrad geringstmöglich sind (Übung **25**; Satz 6.2.2), hätte eine positive Antwort of diese noch offenen Fragen ganz erhebliche Folgen für unser Bild der bislang nur ansatzweise verstandenen Invariante χ.

Die folgende Vermutung von Hadwiger bejaht die Frage im Falle gewöhnlicher Minoren. Die Vermutung gilt als eines der tiefsten offenen Probleme der Graphentheorie.

Vermutung. (Hadwiger 1943)
Für jedes $r \in \mathbb{N}$ und jeden Graphen G gilt die Implikation

$$\chi(G) \geqslant r \;\Rightarrow\; G \succcurlyeq K^r.$$

Die Hadwiger-Vermutung ist trivial für $r \leqslant 2$, leicht für $r = 3$ und $r = 4$ (Übungen), und äquivalent zum Vierfarbensatz für $r = 5$ und $r = 6$. Für $r \geqslant 7$ ist die Vermutung offen. Sie ist wahr für Graphen großer Taillenweite (Übung **33**; vgl. auch Korollar 6.3.9), und in der Formulierung $G \succcurlyeq K^{\chi(G)}$ gilt sie für fast alle Graphen.[3] Allgemein folgt der Fall r der Vermutung aus dem Fall $r+1$ (Übung).

[3] Siehe Kapitel 9 zum Begriff „fast alle“.

Äquivalent zur Hadwiger-Vermutung für gegebenes $r \in \mathbb{N}$ ist die Aussage, dass jeder Graph ohne K^r-Minor $(r-1)$-färbbar ist. Dies wirft die allgemeinere Frage nach der Struktur dieser Graphen auf: aus einem hinreichend detaillierten Struktursatz über alle Graphen ohne K^r-Minor sollte auch folgen, ob diese Graphen $(r-1)$-färbbar sind oder nicht.

Für $r = 3$ beispielsweise sind die Graphen ohne K^r-Minor gerade die Wälder (warum?), und diese sind 2-färbbar. Für $r = 4$ haben wir den folgenden Struktursatz für die Graphen ohne K^4-Minor:

[10.4.2] **Proposition 6.3.1.** *Ein Graph mit mindestens drei Ecken ist genau dann kantenmaximal ohne K^4-Minor, wenn er rekursiv aus Dreiecken durch Zusammenkleben[4] entlang von K^2s konstruiert werden kann.*

(0.7.2) (3.4.4) *Beweis.* Wir erinnern zunächst an die Tatsache, dass wegen $\Delta(K^4) = 3$ jeder MK^4 einen TK^4 enthält (Proposition 0.7.2); die Graphen ohne K^4-Minor sind also genau die Graphen ohne topologischen K^4-Minor.

Den Beweis, dass ein wie angegeben konstruierter Graph G keinen K^4-Minor enthält und überdies mit dieser Eigenschaft kantenmaximal ist, lassen wir als Übung; zum Beweis der Hadwiger-Vermutung für $r = 4$ ist ohnehin nur die andere Richtung nötig. Diese zeigen wir mit Induktion nach $|G|$.

Sei also G gegeben, kantenmaximal ohne K^4-Minor. Ist $|G| = 3$, so ist G selbst ein Dreieck. Zum Induktionsschritt sei jetzt $|G| \geqslant 4$. Dann ist G nicht vollständig; es sei S eine trennende Eckenmenge kleinster Mächtigkeit, und C_1, C_2 zwei Komponenten von $G - S$. Wegen der Minimalität von S hat jede Ecke aus S in beiden Komponenten einen Nachbarn. Ist $|S| \geqslant 3$, so enthält G drei kreuzungsfreie Wege P_1, P_2, P_3 zwischen einer Ecke $v_1 \in C_1$ und einer Ecke $v_2 \in C_2$. Wegen $\kappa(G) = |S| \geqslant 3$ ist $G - \{v_1, v_2\}$ zusammenhängend und enthält somit einen (kürzesten) Weg P zwischen zwei verschiedenen P_i. Dann ist jedoch $P \cup P_1 \cup P_2 \cup P_3$ ein TK^4 in G, mit Widerspruch.

Es gilt somit $\kappa(G) \leqslant 2$, und die Behauptung folgt mit der Induktionsannahme aus Lemma 3.4.4.[5] □

Eine interessante Folgerung aus Proposition 6.3.1 ist, dass alle kantenmaximalen Graphen ohne K^4-Minor die gleiche Kantenzahl haben und daher alle „extremal“ sind:

Korollar 6.3.2. *Jeder kantenmaximale Graph G ohne K^4-Minor hat $2|G| - 3$ Kanten.*

Beweis. Induktion nach $|G|$. □

[4] Dies hatten wir in Kapitel 4.5 formal definiert.

[5] Der Beweis des Lemmas ist elementar und unabhängig vom Rest des Kapitels 3 lesbar.

Korollar 6.3.3. *Die Hadwiger-Vermutung ist wahr für $r = 4$.*

Beweis. Entsteht G aus G_1 und G_2 durch Zusammenkleben entlang eines vollständigen Graphen, so ist $\chi(G) = \max\{\chi(G_1), \chi(G_2)\}$ (siehe den Beweis von Proposition 4.5.2). Aus Proposition 6.3.1 folgt daher mit Induktion nach $|G|$, dass alle kantenmaximalen (und somit alle) Graphen ohne K^4-Minor 3-färbbar sind. □

Korollar 6.3.3 lässt sich auch einfach direkt zeigen (Übung **34**).

Der Beweis der Hadwiger-Vermutung für $r = 5$ lässt sich mit Hilfe des Vierfarbensatzes aus einem ähnlichen – wenn auch wesentlich gröberen – Struktursatz für die Graphen ohne K^5-Minor herleiten. Der Beweis dieses Satzes gleicht von der Art her dem von Proposition 6.3.1, ist jedoch etwas komplizierter und wesentlich länger. Wir zitieren den Satz daher ohne Beweis:

Satz 6.3.4. (Wagner 1937)
Jeder mindestens 4-eckige kantenmaximale Graph ohne K^5-Minor ist rekursiv durch Zusammenkleben entlang von Dreiecken und K^2s konstruierbar aus ebenen Dreiecksgraphen und Exemplaren des Graphen W (Abb. 6.3.1).

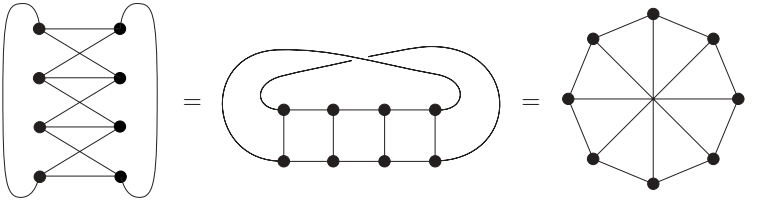


Abb. 6.3.1. Drei Darstellungen des Wagner-Graphen W

Mit Korollar 3.2.10 errechnet man aus Satz 6.3.4 leicht die höchstmögliche Kantenzahl eines Graphen ohne K^5-Minor: (3.2.10)

Korollar 6.3.5. *Ein Graph mit n Ecken und ohne K^5-Minor hat höchstens $3n - 6$ Kanten.* □

Wie man leicht sieht, ist $\chi(W) = 3$. Nehmen wir mit dem Vierfarbensatz an, dass alle ebenen Dreiecksgraphen 4-färbbar sind, so erhalten wir analog zu Korollar 6.3.3:

Korollar 6.3.6. *Die Hadwiger-Vermutung ist wahr für $r = 5$.* □

Der Beweis der Hadwiger-Vermutung für $r = 6$ ist noch einmal wesentlich schwieriger als der Fall $r = 5$. Auch er stützt sich auf den Vierfarbensatz: der Beweis zeigt (ohne den Vierfarbensatz zu benutzen), dass jedes Gegenbeispiel minimaler Ordnung aus einem plättbaren Graphen durch Hinzufügung einer Ecke entsteht und deshalb – nach dem Vierfarbensatz – kein Gegenbeispiel sein kann.

Satz 6.3.7. (Robertson, Seymour & Thomas 1993)
Die Hadwiger-Vermutung ist wahr für $r = 6$.

Wie bereits geschildert, liegt die Herausforderung der Hadwiger-Vermutung darin, eine Beweistechnik zu entwickeln, die die Annahme von $\chi \geqslant r$ besser nutzt, als lediglich ihre Folgerung zu verwenden, dass $\delta \geqslant r-1$ in einem geeigneten Teilgraphen gilt (was nach der zweiten Aussage in Satz 6.2.2 keinen K^r-Minor erzwingen kann). Bisher ist keine derartige Technik bekannt.

Beschränken wir uns jedoch bewusst darauf, lediglich $\delta \geqslant r-1$ zu verwenden, so können wir andererseits fragen, welche zusätzlichen Annahmen helfen könnten, einen K^r-Minor zu erzwingen. Satz 6.2.5 besagt, dass die Annahme einer großen Taillenweite diese Auswirkung hat; siehe auch Übung **33**. Tatsächlich reicht aber bereits eine viel schwächere Annahme aus: für jedes feste $s \in \mathbb{N}$ und hinreichend große d abhängig von s kann man zeigen, dass die Graphen $G \not\supseteq K_{s,s}$ mit Durchschnittsgrad mindestens d einen K^r-Minor enthalten für wesentlich größes r als $r = d$. Für die Hadwiger-Vermutung folgt daraus:

Satz 6.3.8. (Kühn & Osthus 2005)
Für jedes $s \in \mathbb{N}$ existiert ein $r_s \in \mathbb{N}$, so dass die Hadwiger-Vermutung für alle Graphen $G \not\supseteq K_{s,s}$ und $r \geqslant r_s$ gilt.

Die Verschärfung der Hadwiger-Vermutung, dass Graphen mit chromatischer Zahl mindestens r einen K^r als *topologischen* Minor enthalten, ist als *Vermutung von Hajós* bekannt geworden. Im allgemeinen ist sie falsch, doch Satz 6.2.5 impliziert sie für Graphen großer Taillenweite:

Korollar 6.3.9. *Es gibt eine Konstante g, so dass für alle Graphen G mit $g(G) \geqslant g$ und alle r die Implikation $\chi(G) \geqslant r \Rightarrow G \supseteq TK^r$ gilt.*

(4.2.3) (6.2.5)

Beweis. Es sei g die Konstante aus Satz 6.2.5. Ist $\chi(G) \geqslant r$, so hat G nach Korollar 4.2.3 einen Teilgraphen H mit $\delta(H) \geqslant r-1$. Dann gilt $g(H) \geqslant g(G) \geqslant g$, und Satz 6.2.5 ergibt $G \supseteq H \supseteq TK^r$. □

6.4 Szemerédis Regularitätslemma

Bereits vor fast 30 Jahren entwickelte Szemerédi im Rahmen einer aufsehenerregenden Arbeit über Ramseyeigenschaften arithmetischer Progressionen ein graphentheoretisches Hilfsmittel, dessen Bedeutung für die extremale Graphentheorie erst in den letzten Jahren mehr und mehr erkannt wird: das sogenannte *Regularitätslemma*. Grob gesprochen besagt dieses Lemma, dass alle Graphen in einem gewissen Sinne durch Zufallsgraphen[6] approximierbar sind: jeder hinreichend große Graph G gestattet eine Zerlegung seiner Eckenmenge in wenige Teile, so dass seine meisten Kanten zwischen verschiedenen Teilen verlaufen und die Kanten zwischen je zwei Teilen besonders gleichmäßig verteilt sind – etwa so, wie wir es bei einer zufälligen Auswahl der Kanten erwarten würden.

Wollen wir nun beispielsweise zeigen, dass eine gewisse Kantendichte die Existenz eines gewünschten Teilgraphen zur Folge hat, und ist die Anzahl der uns gegebenen Kanten so großzügig bemessen, dass es weniger auf jede einzelne Kante ankommt als auf die Größenordung ihrer Anzahl, so erlaubt uns das Regularitätslemma, statt mit der unbekannten Lokalstruktur von G mit der viel genauer bestimmbaren *erwarteten* Lokalstruktur zwischen je zwei Partitionsmengen zu arbeiten.

Wir werden das Regularitätslemma in diesem Abschnitt vorstellen, aber nicht beweisen.[7] Stattdessen leiten wir als Beispiel einer typischen Anwendung des Lemmas den Satz 6.1.2 von Erdős und Stone aus ihm her. Eine weitere Anwendung, ebenfalls ein durch das Lemma ganz einfach erscheinender Beweis eines interessanten Satzes, geben wir in Kapitel 7.2.

Zur Formulierung des Regularitätslemmas brauchen wir zwei Begriffe. Ist $G = (V, E)$ ein Graph, und sind $X, Y \subseteq V$ zwei disjunkte Eckenmengen in G, so bezeichnen wir mit $\|X, Y\|$ die Anzahl der X–Y-Kanten von G und nennen

$$d(X,Y) := \frac{\|X,Y\|}{|X| \cdot |Y|} \qquad d(X,Y)$$

die *Dichte* des Paares (X, Y). (Dies ist also stets eine reelle Zahl zwischen 0 und 1.) Zu gegebenem $\epsilon > 0$ nennen wir ein Paar (A, B) disjunkter Eckenmengen $A, B \subseteq V$ *ϵ-regulär*, wenn für alle $X \subseteq A$ und $Y \subseteq B$ mit

Dichte

ϵ-regulär

$$|X| \geqslant \epsilon\,|A| \quad \text{und} \quad |Y| \geqslant \epsilon\,|B|$$

gilt:

$$|d(X,Y) - d(A,B)| \leqslant \epsilon\,.$$

Die Kanten innerhalb eines ϵ-regulären Paars von Eckenmengen sind also recht gleichmäßig verteilt: um so gleichmäßiger, je kleiner ϵ ist.

[6] siehe Kapitel 9

[7] Die englische Ausgabe dieses Buches enthält den Beweis.

[6.1.2]
[7.2.2]

Satz 6.4.1. (Regularitätslemma)
Zu jedem $\epsilon > 0$ und $\ell \in \mathbb{N}$ gibt es natürliche Zahlen L und N mit der folgenden Eigenschaft: zu jedem Graphen $G = (V, E)$ mit $n \geqslant N$ Ecken existiert eine Partition $\{V_0, V_1, \dots, V_k\}$ von V mit

(i) $\ell \leqslant k \leqslant L$;

(ii) $|V_0| < \epsilon n$;

(iii) $|V_1| = \ldots = |V_k|$;

(iv) *alle bis auf höchstens ϵk^2 der Paare (V_i, V_j) mit $1 \leqslant i < j \leqslant k$ sind ϵ-regulär.*

Das Wichtigste an der vom Lemma versprochenen Partition ist neben der gleichmäßigen Verteilung der Kanten gemäß (iv) die Anzahl der Partitionsklassen: diese ist nach oben durch eine im wesentlichen nur von ϵ abhängige Konstante L beschränkt. Dadurch werden mit den partitionierten Graphen G auch deren Partitionsklassen beliebig groß: die ϵ-regulären Paare aus (iv) bilden beliebig große bipartite Graphen mit besonders gleichmäßig verteilten Kanten. Solche Graphen enthalten aber (bei positiver Kantendichte) jeden vorgegebenen bipartiten Graphen als Teilgraphen. Ist nun die Kantendichte von G insgesamt groß genug, so werden hinreichend viele der ϵ-regulären Paare (V_i, V_j) eine gewisse Mindestdichte d aufweisen, dass geeignete bipartite Teilgraphen zwischen ihnen zu einer Vielzahl erwünschter Teilstrukturen von G kombiniert werden können – siehe dazu den Beweis von Lemma 6.4.3.

Neben der oberen Schranke L enthält das Lemma noch eine untere Schranke ℓ für die Anzahl der Partitionsmengen. Diese stellt sicher, dass wir genug Partitionsmengen bekommen, dass die Anzahl der Kanten innerhalb dieser Mengen – über die wir ja gar nichts wissen – vernachlässigbar wird; siehe dazuÜbung 39.

Die Partitionsmenge V_0 schließlich spielt nur die Rolle eines Abfalleimers: indem wir einige wenige Ecken fortwerfen, erreichen wir, dass die übrigen Partitionsmengen alle genau gleich groß sind.

Das Regularitätslemma ist nützlich vor allem für dichte Graphen: für Graphen mit größenordungsmäßig weniger als n^2 Kanten auf n Ecken, wie wir sie etwa in Abschnitt 6.2 betrachtet haben, wird die Aussage des Lemmas für große n trivial – einfach weil alle betrachteten Dichten, und damit auch die Unterschiede zwischen ihnen, für hinreichend großes ϵn beliebig klein werden (Übung 40).

Im Rest dieses Abschnitts schauen wir uns jetzt näher an, wie man das Regularitätslemma anwenden kann. Nehmen wir einmal an, wir wollten beweisen, dass eine gewisse Kantendichte von G ausreicht, das Auftreten eines gegebenen Graphen H als Teilgraphen von G zu erzwingen. Betrachten wir dazu eine ϵ-reguläre Partition von G. Für die meisten der Paare (V_i, V_j) von Partitionsmengen sind die Kanten zwischen V_i und V_j gleichmäßig verteilt; ihre Dichte hingegen ist unterschiedlich von Paar zu

Paar. Da G viele Kanten hat, kann diese Dichte aber nicht für alle Paare gleich null sein: ein beträchtlicher Anteil der Paare wird positive Dichte haben. Wenn G nun groß ist, so sind es die Paare auch: die Anzahl der Partitionsmengen ist ja beschränkt, und sie haben alle die gleiche Größe. Doch jeder hinreichend große bipartite Graph mit gleich großen Partitionsmengen, fester positiver Kantendichte und gleichmäßig verteilten Kanten enthält jeden beliebig gegebenen bipartiten Teilgraphen.[8] (Wir werden dies noch präzisieren.) Wenn demnach genügend viele Paare in unserer Partition von G positive Dichte besitzen, dass H als Vereinigung bipartiter Graphen geschrieben werden kann, von denen jeder in einem dieser Paare auftritt, so können wir hoffen, dass wie gewünscht $H \subseteq G$ gilt.

All dies werden wir in Lemma 6.4.3 formalisieren und dann genau beweisen. So gerüstet werden wir dann mit dem Regularitätslemma den Satz von Erdős und Stone aus Abschnitt 6.1 beweisen; eine weitere Anwendung folgt im Beweis von Satz 7.2.2. Wir beenden den Abschnitt mit einem informellen Rückblick auf die Anwendung des Regularitätslemmas, die wir kennengelernt haben – speziell mit Blick darauf, was wir daraus an Technik für ähnliche Anwendungen lernen können. Insbesondere schauen wir uns noch einmal an, wie die verschiedenen beteiligten Parameter voneinander abhängen, und in welcher Reihenfolge man sie wählen muss, damit das Lemma funktioniert.

Wir beginnen damit, eine einfache Folge der ϵ-Regularität eines Paares (A, B) zu notieren. Für jede Teilmenge $Y \subseteq B$, die nicht zu klein ist, haben die meisten Ecken von A etwa die erwartete Anzahl an Nachbarn in Y:

Lemma 6.4.2. *Es sei (A, B) ein ϵ-reguläres Paar der Dichte d, und $Y \subseteq B$ enthalte mindestens $|Y| \geqslant \epsilon\,|B|$ Ecken. Dann haben alle bis auf weniger als $\epsilon\,|A|$ der Ecken in A jeweils mindestens $(d-\epsilon)|Y|$ Nachbarn in Y.*

Beweis. Es sei $X \subseteq A$ die Menge der Ecken mit weniger als $(d-\epsilon)|Y|$ Nachbarn in Y. Dann gilt $\|X, Y\| < |X|(d-\epsilon)|Y|$, und somit

$$d(X,Y) = \frac{\|X,Y\|}{|X|\,|Y|} < d - \epsilon = d(A,B) - \epsilon\,.$$

Da (A, B) ϵ-regulär ist und $|Y| \geqslant \epsilon\,|B|$, folgt $|X| < \epsilon\,|A|$. □

Eine Eckenpartition von G wie im Regularitätslemma veranschaulichen wir uns durch einen Hilfsgraphen R. Die Ecken von R seien die Partitionsmengen $V_1, \dots, V_k$, und zu gegebenem $d \in [0, 1]$ seien zwei R

[8] Leser, die Zufallsgraphen bereits kennen, mögen diese Aussage mit Proposition 9.3.1 vergleichen.

Regularitätsgraph

dieser Ecken benachbart, wenn sie ein ϵ-reguläres Paar der Dichte $\geqslant d$ bilden. Ist $m := |V_1| = \ldots = |V_k|$, so nennen wir R einen *Regularitätsgraphen* von G mit Parametern ϵ, m und d. Ersetzen wir zu gegebenem $s \in \mathbb{N}$ jede Ecke V_i von R durch eine Menge V_i^s von s Ecken, und die Kanten V_iV_j von R durch vollständig bipartite Graphen zwischen den entsprechenden Mengen V_i^s und V_j^s, so bezeichnen wir den erhaltenen Graphen mit R_s. (Für $R = K^r$ ist also $R_s = K_s^r$.)

V_i^s

R_s

Das folgende Lemma liefert den Schlüssel zu einer ganzen Reihe von Anwendungen des Regularitätslemmas. Es besagt, dass wir Teilgraphen von R_s auch in G finden können, sofern ϵ hinreichend klein ist, die V_i hinreichend groß, und $d > 0$. Die benötigten Werte von ϵ und m hängen dabei nur von (d und) dem Maximalgrad jener Teilgraphen ab:

[7.2.2] **Lemma 6.4.3.** *Zu allen $d \in (0,1]$ und $\Delta \geqslant 1$ gibt es ein $\epsilon_0 > 0$ mit der folgenden Eigenschaft. Ist G irgendein Graph und H ein Graph mit $\Delta(H) \leqslant \Delta$, und ist $s \in \mathbb{N}$ und R ein Regularitätsgraph von G mit Parametern $\epsilon \leqslant \epsilon_0$, $m \geqslant 2s/d^\Delta$ und d, so gilt*

$$H \subseteq R_s \;\Rightarrow\; H \subseteq G\,.$$

d, Δ, ϵ_0

Beweis. Zu gegebenem d und Δ wählen wir $\epsilon_0 < d$ positiv aber so klein, dass

$$(d-\epsilon_0)^\Delta - \Delta\epsilon_0 \geqslant \tfrac{1}{2}d^\Delta \tag{1}$$

G, H, R, R_s
V_i
ϵ, k, m

gilt; das ist möglich, da $(d-\epsilon)^\Delta - \Delta\epsilon \to d^\Delta$ für $\epsilon \to 0$. Sind nun G, H, s und R gegeben, und ist $\{V_0, V_1, \ldots, V_k\}$ die Eckenpartition von G, aus der R hervorging, so haben wir damit ein $\epsilon \leqslant \epsilon_0$, $V(R) = \{V_1, \ldots, V_k\}$, und $|V_1| = \ldots = |V_k| = m \geqslant 2s/d^\Delta$. Wir dürfen annehmen, dass H selbst ein Teilgraph von R_s ist (nicht nur isomorph dazu), sagen wir mit

u_i, h
σ
v_i

Ecken $u_1, \ldots, u_h$. Die Lage eines jeden u_i in einer der s-Mengen V_j^s von R_s definiert dann eine Abbildung $\sigma\colon i \mapsto j$. Unser Ziel ist es, jedes u_i auf eine Ecke v_i in „seinem“ V_j abzubilden, also mit $v_i \in V_{\sigma(i)}$, so dass diese Abbildung eine Einbettung von H in G wird: mit $v_iv_j \in E(G)$ wann immer u_iu_j eine Kante von H ist.

Wir werden die Ecken $v_1, \ldots, v_h$ der Reihe nach wählen. Zu jedem Zeitpunkt wird es für jedes i eine „Zielmenge“ $Y_i \subseteq V_{\sigma(i)}$ von Ecken geben, die noch als v_i in Frage kommen. Zu Beginn ist Y_i die gesamte Menge $V_{\sigma(i)}$. Im Verlauf der Einbettung wird Y_i dann immer kleiner (bis hin zu $Y_i = \{v_i\}$, wenn v_i schließlich gewählt ist): jedesmal, wenn wir eine Ecke v_j mit $j < i$ und $u_ju_i \in E(H)$ festlegen, löschen wir alle Ecken aus Y_i, die nicht zu v_j benachbart sind. Die Menge Y_i entwickelt sich somit als

$$V_{\sigma(i)} = Y_i^0 \supseteq \ldots \supseteq Y_i^i = \{v_i\}\,,$$

wobei Y_i^j die Version von Y_i nach der Festlegung von v_j und der daraus resultierenden Löschung von Ecken aus Y_i^{j-1} ist.

Damit die Zielmengen Y_i in diesem Prozess nicht zu schnell zu klein werden, müssen wir die v_j mit $j < i$ geeignet wählen. Bei der Festlegung eines v_j sind dabei nur die höchstens Δ Mengen Y_i mit $u_j u_i \in E(H)$ im Auge zu behalten. Für jedes dieser $i > j$ wollen wir v_j so wählen, dass

$$Y_i^j = N(v_j) \cap Y_i^{j-1} \tag{2}$$

um höchstens den konstanten Faktor $(d - \epsilon)$ kleiner ist als Y_i^{j-1}. Das aber ist möglich nach Lemma 6.4.2 (mit $A = V_{\sigma(j)}$, $B = V_{\sigma(i)}$ und $Y = Y_i^{j-1}$): hat Y_i^{j-1} noch mindestens ϵm Ecken (was wir induktiv werden annehmen können), so haben höchstens ϵm Ecken von $V_{\sigma(j)}$ weniger als $(d-\epsilon)|Y_i^{j-1}|$ Nachbarn in Y_i^{j-1} und scheiden deshalb als Wahl von v_j aus. Insgesamt (für alle i) kommen also höchstens $\Delta\epsilon m$ Ecken aus Y_j^{j-1} nicht als v_j in Frage; alle anderen Wahlen von $v_j \in Y_j^{j-1}$ implizieren mit (2)

$$|Y_i^j| \geqslant (d-\epsilon)|Y_i^{j-1}|\,. \tag{3}$$

Damit ist nur noch zu zeigen, dass die Mengen Y aus der obigen Anwendung von Lemma 6.4.2 in der Tat nie kleiner werden als ϵm, und dass wir bei der Festlegung von v_j stets mindestens s geeignete Ecken zur Wahl haben: da vor u_j höchstens $s-1$ andere Ecken u in $V_{\sigma(j)}$ eingebettet worden sind, können wir v_j dann davon verschieden wählen.

All dies folgt aber aus unserer Wahl von ϵ_0. Da jedes Y_i mit m Ecken beginnt und höchstens Δ mal um einen Faktor von $d - \epsilon$ schrumpft, gilt

$$|Y_i^{j-1}| - \Delta\epsilon m \underset{(3)}{\geqslant} (d-\epsilon)^\Delta m - \Delta\epsilon m \geqslant (d-\epsilon_0)^\Delta m - \Delta\epsilon_0 m \underset{(1)}{\geqslant} \tfrac{1}{2}d^\Delta m \geqslant s$$

für alle $j \leqslant i$; insbesondere haben wir wie gewünscht $|Y_i^{j-1}| \geqslant \epsilon m$ und $|Y_j^{j-1}| - \Delta\epsilon m \geqslant s$. □

Wir kommen jetzt zum Beweis des Satzes von Erdős und Stone.

(6.1.1)
(6.1.4)

Beweis von Satz 6.1.2. Wie im Satz seien $r \geqslant 2$ und s gegeben. Für $s = 1$ folgt die Behauptung aus dem Satz von Turán; es sei also $s \geqslant 2$. Weiter sei $\gamma > 0$ gegeben; das γ wird die Rolle des ϵ des Satzes spielen. r, s, γ
Gibt es überhaupt einen Graphen G mit $|G| =: n$ und

$$\|G\| \geqslant t_{r-1}(n) + \gamma n^2, \qquad \|G\|$$

so ist sicher $\gamma < 1$. Wir wollen zeigen, dass $K_s^r \subseteq G$ gilt sofern n groß genug ist.

Unser Plan ist wie folgt. Mit dem Regularitätslemma zeigen wir, dass G aufgrund seiner hohen Kantenzahl einen Regularitätsgraphen R

hat, der nach dem Satz von Turán einen K^r enthält. Offenbar enthält R_s dann einen K^r_s, und mit Lemma 6.4.3 schließen wir hieraus auf $K^r_s \subseteq G$.

d, Δ Mit Lemma 6.4.3 erhalten wir zu $d := \gamma$ und $\Delta := \Delta(K^r_s)$ eine Zahl
ϵ_0, ℓ $\epsilon_0 > 0$. Für die Anwendung des Regularitätslemmas wählen wir $\ell > 1/\gamma$
ϵ beliebig und $\epsilon > 0$ klein genug, dass $\epsilon \leqslant \epsilon_0$ gilt,

$$\epsilon < \gamma/2 < 1 \tag{1}$$

und

δ
$$\delta := 2\gamma - \epsilon^2 - 4\epsilon - d - \frac{1}{\ell} > 0\,;$$

wegen $2\gamma - d - \frac{1}{\ell} > 0$ ist dies möglich. Das Regularitätslemma liefert
L, N uns zu diesen ϵ und ℓ zwei Größen L und N. Wir nehmen

n
$$n \geqslant \max\left\{ N\,,\ \frac{2sL}{d^\Delta(1-\epsilon)} \right\}$$

k an. Unser Graph G hat damit eine Eckenpartition wie im Regularitäts-
m lemma beschrieben. Für $m := |V_1| = \ldots = |V_k|$ gilt dann

$$n \geqslant km\,, \tag{2}$$

sowie

$$m = \frac{n - |V_0|}{k} \geqslant \frac{n - \epsilon n}{L} = n\,\frac{1-\epsilon}{L} \geqslant \frac{2s}{d^\Delta}$$

nach (i)–(ii) des Lemmas und Wahl von n. Es sei R der der Partition von G entsprechende Regularitätsgraph mit Parametern ϵ, m, d. Wegen $\epsilon \leqslant \epsilon_0$ und $m \geqslant 2s/d^\Delta$ erfüllt R die Voraussetzungen von Lemma 6.4.3, und nach Definition von Δ gilt $\Delta(K^r_s) = \Delta$. Damit wir mit Lemma 6.4.3 wie gewünscht auf $K^r_s \subseteq G$ schließen können, brauchen wir somit nur noch nachzuweisen, dass $K^r \subseteq R$ gilt (und damit $K^r_s \subseteq R_s$).

Wir zeigen dies wie geplant mit dem Satz von Turán. Dazu müssen wir sicherstellen, dass R genug Kanten hat, dass also genügend viele der ϵ-regulären Paare (V_i, V_j) in G eine Dichte $\geqslant d$ haben. Dies sollte aus unserer Annahme folgen, dass G mindestens $t_{r-1}(n) + \gamma n^2$ Kanten hat, also eine Kantendichte von etwa $\frac{r-2}{r-1} + 2\gamma$: dieser Wert liegt ja deutlich über der Kantendichte von (etwa) $\frac{r-2}{r-1}$ des Turángraphen $T^{r-1}(k)$, und damit deutlich über der Kantendichte, die G aus lediglich $t_{r-1}(k)$ dichten Paaren ableiten könnte, selbst wenn all diese Paare die Dichte 1 hätten.

Bestimmen wir also $\|R\|$ genauer. Wieviele Kanten von G liegen außerhalb ϵ-regulärer Paare? Höchstens $\binom{|V_0|}{2}$ Kanten liegen innerhalb von V_0, und nach (ii) des Regularitätslemmas sind dies weniger als $\frac{1}{2}(\epsilon n)^2$ Kanten. Höchstens $|V_0|km \leqslant \epsilon nkm$ Kanten verbinden V_0 mit anderen Partitionsmengen. In den höchstens ϵk^2 nicht ϵ-regulären Paaren (V_i, V_j) liegen jeweils nicht mehr als m^2, zusammen also höchstens $\epsilon k^2 m^2$ Kanten. In ϵ-regulären Paaren zu geringer Dichte ($< d$) liegen jeweils weniger

als dm^2 Kanten, insgesamt also weniger als $\frac{1}{2}k^2dm^2$. Und schließlich liegen höchstens je $\binom{m}{2}$ Kanten innerhalb einer der Partitionsmengen $V_1, \dots, V_k$, zusammen also nicht mehr als $\frac{1}{2}m^2k$ Kanten. Alle *anderen* Kanten von G liegen in ϵ-regulären Paaren der Dichte $\geqslant d$, tragen also zu Kanten von R bei. Da jeder Kante von R höchstens m^2 Kanten von G entsprechen, gilt somit insgesamt

$$\|G\| \leq \tfrac{1}{2}\epsilon^2 n^2 + \epsilon nkm + \epsilon k^2 m^2 + \tfrac{1}{2}k^2 dm^2 + \tfrac{1}{2}km^2 + \|R\|\, m^2.$$

Für hinreichend große n folgt

$$\begin{aligned}
\|R\| &\geq \tfrac{1}{2}k^2\, \frac{\|G\| - \frac{1}{2}\epsilon^2 n^2 - \epsilon nkm - \epsilon k^2 m^2 - \frac{1}{2}dk^2 m^2 - \frac{1}{2}km^2}{\frac{1}{2}k^2 m^2} \\
&\underset{(1,2)}{\geq} \tfrac{1}{2}k^2 \left(\frac{t_{r-1}(n) + \gamma n^2 - \frac{1}{2}\epsilon^2 n^2 - \epsilon nkm}{n^2/2} - 2\epsilon - d - \frac{1}{k} \right) \\
&\underset{(2)}{\geq} \tfrac{1}{2}k^2 \left(\frac{t_{r-1}(n)}{n^2/2} + 2\gamma - \epsilon^2 - 4\epsilon - d - \frac{1}{\ell} \right) \\
&= \tfrac{1}{2}k^2 \big(t_{r-1}(n) \binom{n}{2}^{-1} \Big(1 - \frac{1}{n}\Big) + \delta \big) \\
&> \tfrac{1}{2}k^2\, \frac{r-2}{r-1} \\
&\geqslant t_{r-1}(k)\,.
\end{aligned}$$

(Zur vorletzten Ungleichung beachte, dass $t_{r-1}(n)\binom{n}{2}^{-1}$ nach Lemma 6.1.4 gegen $\frac{r-2}{r-1}$ konvergiert und $(1 - \frac{1}{n})$ gegen 1.) Nach Satz 6.1.1 gilt somit $K^r \subseteq R$, wie gewünscht. □

Nachdem wir nun eine typische Anwendung des Regularitätslemmas im Detail gesehen haben, wollen wir noch einmal einen Schritt zurücktreten und uns auf die wichtigsten Leitlinien besinnen: wo lagen die eigentlichen Ideen, was war lediglich Technik, wie hängen all die verschiedenen Parameter voneinander ab, und in welcher Reihenfolge wählt man sie in der Praxis?

Unsere Aufgabe im letzten Beweis war es, für hinreichend große G zu zeigen, dass γn^2 mehr Kanten, als zur Erzwingung eines K^r-Teilgraphen nötig sind, bereits einen K^r_s erzwingen. Dazu wollten wir Lemma 6.4.3 einsetzen, welches die Eingabe von zwei Parametern verlangt: d und Δ. Da wir ein Exemplar von $H = K^r_s$ in G finden wollten, war die Wahl von $\Delta := \Delta(K^r_s)$ bereits vorgegeben; die Wahl von d jedoch ist zunächst gar nicht klar. Dazu unten mehr.

Zu gegebenem d und Δ sagt uns Lemma 6.4.3, wie klein wir ϵ wählen müssen, damit das Regularitätslemma uns eine geeignete Partition liefert. Weiter verlangt das Regularitätslemma nach der Eingabe einer

Mindestanzahl ℓ von Partitionsklassen. Auch die Wahl von ℓ werden wir später diskutieren, zusammen mit d.

Was bleibt, ist, G groß genug zu wählen: größer als das vom Regularitätslemma ausgegebene N, aber vor allem auch groß genug, dass die Partitionsklassen mindestens $2s/d^\Delta$ Ecken enthalten, wie von Lemma 6.4.3 verlangt. (Das s des Lemmas hängt allgemein von dem zu findenden Teilgraphen H ab, wobei $s := |H|$ in jedem Fall groß genug ist. In unserem Falle reicht das s aus dem K_s^r.) Ab welcher Ordnung G groß genug ist, folgt damit direkt aus der oberen Schranke L für die Anzahl der Partitionsklassen, die das Regularitätslemma auswirft: vernachlässigen wir V_0, so reicht $|G| \geqslant 2Ls/d^\Delta$.

Bis hierhin war die Wahl der Parameter einfach und mechanisch: eben so muss man es bei jeder Anwendung des Regularitätslemma von diesem Typ machen. Nun aber kommen wir zum interessanten Teil, der in jeder Anwendung anders ist: der Wahl von d. In unserem Beweis des Satzes von Erdős und Stone ist die entscheidende Beobachtung, dass d nur klein genug zu sein braucht, damit unsere γn^2 „zusätzlichen“ Kanten ausreichen zur Erzwingung mindestens eines „zusätzlichen“ dichten Paares (V_i, V_j) (wobei „dicht“ heißt „von der Dichte mindestens d“), insgesamt damit von mehr als $t_{r-1}(k)$ dichten Paaren, und damit eines K^r in R und eines K_s^r in R_s.

Warum aber reichen die γn^2 zusätzlichen Kanten dazu aus? Nehmen wir einmal an, wir hätten nur $t_{r-1}(k)$ dichte ϵ-reguläre Paare. Innerhalb dieser Paare hat G höchstens

$$\tfrac{1}{2}k^2 \frac{r-2}{r-1}\, m^2 \leqslant \tfrac{1}{2}n^2 \frac{r-2}{r-1}$$

Kanten, selbst wenn diese Paare bis zu ihrer vollen Kapazität von je m^2 Kanten gesättigt sind. (Hier ist m wieder die gemeinsame Eckenzahl aller Partitionsklassen außer V_0, d.h. km ist fast n.) Wir haben somit, etwas gerundet, gerade wieder unsere γn^2 Zusatzkanten übrig. Diese müssen wir verteilen auf die anderen ϵ-regulären Partitionspaare, die der Dichte $< d$, oder sie „irregulär“ unterbringen: in irregulären Paaren, oder mit einer Endecke in V_0, oder innerhalb einer Partitionsklasse. Die Gesamtanzahl von Kanten in ϵ-regulären Paaren geringer Dichte ist geringer als

$$\tfrac{1}{2}k^2 dm^2 \leqslant \tfrac{1}{2}dn^2,$$

also weniger als die Hälfte unserer γn^2 Zusatzkanten falls wir $d := \gamma$ wählen. Die andere Hälfte, also weitere $\frac{1}{2}\gamma n^2$ Kanten, ist aber zu groß, um sie „irregulär“ unterzubringen – sofern wir nur ℓ groß genug und ϵ klein genug wählen. Welche Werte von ℓ und ϵ dies leisten, muss man jetzt nur noch ausrechnen.

Übungen

1.$^-$ Zeige, dass $K_{1,3}$ extremal ist ohne P^3.

2.$^-$ Bestimme für jedes $k > 0$ die extremalen Graphen mit chromatischer Zahl höchstens k.

3. Bestimme den Wert von $\mathrm{ex}(n, K_{1,r})$ für alle $r, n \in \mathbb{N}$.

4. Gibt es einen Graphen, der kantenmaximal ist ohne K^3-Minor aber nicht extremal?

5.$^+$ Bestimme für jedes $k > 0$ die extremalen Graphen ohne k unabhängige Kanten.

(Tip: Satz 1.2.3 und Übung **17**, Kapitel 1.)

6. Zeige ohne den Satz von Turán, dass die maximale Anzahl von Kanten in einem dreiecksfreien Graphen der Ordnung $n > 1$ gleich $\lfloor n^2/4 \rfloor$ ist.

7. Zeige, dass stets

$$t_{r-1}(n) \leqslant \tfrac{1}{2} n^2 \, \frac{r-2}{r-1}$$

gilt, mit Gleichheit wenn n durch $r-1$ teilbar ist.

8. Zeige, dass $t_{r-1}(n) / \binom{n}{2}$ für $n \to \infty$ gegen $(r-2)/(r-1)$ konvergiert.

(Tip: $t_{r-1}\big((r-1)\lfloor \frac{n}{r-1} \rfloor\big) \leqslant t_{r-1}(n) \leqslant t_{r-1}\big((r-1)\lceil \frac{n}{r-1} \rceil\big)$.)

9. Zeige, dass ein $K_{m,n}$ nach Löschung von höchstens $(m-s)(n-t)/s$ Kanten stets noch einen $K_{s,t}$ als Teilgraphen enthält.

10. Zu $0 < s \leqslant t \leqslant n$ bezeichne $z(n, s, t)$ die größtmögliche Kantenzahl eines bipartiten Graphen, dessen Partitionsmengen beide genau n Ecken enthalten und der keinen $K_{s,t}$ enthält. Beweise die Ungleichung $2\,\mathrm{ex}(n, K_{s,t}) \leq z(n, s, t) \leq \mathrm{ex}(2n, K_{s,t})$.

11.$^+$ Zu gegebenen natürlichen Zahlen $1 \leqslant r \leqslant n$ sei G ein bipartiter Graph mit Eckenpartition $\{A, B\}$ für $|A| = |B| = n$, und $K_{r,r} \not\subseteq G$. Zeige

$$\sum_{x \in A} \binom{d(x)}{r} \leqslant (r-1)\binom{n}{r}.$$

Folgere mit Hilfe der vorigen Übung, dass $\mathrm{ex}(n, K_{r,r}) \leqslant cn^{2-1/r}$ gilt für eine Konstante c, die nur von r abhängt.

12. Die *obere Kantendichte* eines unendlichen Graphen G ist das Infimum aller reellen Zahlen α, so dass die endlichen Graphen $H \subseteq G$ mit $\|H\| \big/ \binom{|H|}{2} > \alpha$ beschränkte Ordnung haben. Zeige, dass diese Zahl stets einen der abzählbar vielen Werte $0, 1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots$ annimmt.

(Tip: Erdős-Stone.)

13. Finde zu gegebenem Baum T eine in n lineare obere Schranke für $\mathrm{ex}(n, T)$, die nicht von der Struktur von T abhängt sondern nur von $|T|$.

14. Zeige, dass die in der Erdős-Sós-Vermutung behauptete Schranke für $\mathrm{ex}(n, T)$ als allgemeine Schranke für beliebige n für jeden Baum T bestmöglich ist. Ist sie sogar für jedes n und jedes T bestmöglich?

15.$^-$ Beweise die Erdős-Sós-Vermutung für den Fall, dass der betrachtete Baum ein Stern ist.

16. Beweise die Erdős-Sós-Vermutung für den Fall, dass der betrachtete Baum ein Weg ist.

(Tip: Übung **7** aus Kapitel 0.)

17.$^+$ Für welche Bäume T gibt es eine gegen unendlich gehende Funktion $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft, dass jeder Graph G mit $\chi(G) < f(d(G))$ den Baum T als Untergraphen enthält? (Mit anderen Worten: können wir durch hohen Durchschnittsgrad dann eine hohe chromatische Zahl erzwingen, wenn wir zusätzlich fordern, dass T nicht als Untergraph auftritt? Oder analog zur Vermutung von Gyárfás: können wir durch hohen Durchschnittsgrad $d(G)$ zumindest dann T als Untergraphen erzwingen, wenn G eine niedrige chromatische Zahl hat?)

18. Für zwei Grapheninvarianten i_1 und i_2 schreibe $i_1 \leqslant i_2$, wenn wir in beliebigen Graphen G beliebig hohe Werte von i_2 für einen geeigneten Teilgraphen $H \subseteq G$ dadurch erzwingen können, dass wir $i_1(G)$ als hinreichend groß voraussetzen. (Formal: es existiert eine Funktion $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, so dass für jedes $k \in \mathbb{N}$ jeder Graph G mit $i_1(G) \geqslant f(k)$ einen Teilgraphen H mit $i_2(H) \geqslant k$ enthält.) Gilt sowohl $i_1 \leqslant i_2$ als auch $i_1 \geqslant i_2$, so schreibe $i_1 \sim i_2$. Zeige, dass dies eine Äquivalenzrelation für Grapheninvarianten ist, und ordne die Äquivalenzklassen der folgenden Invarianten durch $<$: Minimalgrad; Durchschnittsgrad; Zusammenhang; Arborizität; chromatische Zahl; Reihenzahl; listenchromatische Zahl; $\max\{\, r \mid K^r \subseteq G \,\}$; $\max\{\, r \mid TK^r \subseteq G \,\}$; $\max\{\, r \mid K^r \preccurlyeq G \,\}$; $\min \max d^+(v)$, wobei das Maximum über alle Ecken v des Graphen variiert und das Minimum über all seine Orientierungen.

19.$^+$ Beweise ohne Zuhilfenahme eines anderen Satzes den Satz von Wagner (1964), dass jeder Graph mit chromatischer Zahl mindestens 2^r einen K^r als Minor enthält.

(Tip: Induktion nach r. Kontrahiere für den Induktionsschritt einen zusammenhängenden Teilgraphen, der so gewählt wurde, dass der verbleibende Graph immer noch mindestens halb so viele Farben braucht wie der ursprüngliche Graph.)

20. Es sei G ein Graph mit Durchschnittsgrad $\geqslant 2^{r-2}$. Zeige durch Betrachten der Nachbarschaft einer Ecke in einem minimalen Minor $H \preccurlyeq G$ mit $\varepsilon(H) \geqslant \varepsilon(G)$ den Satz von Mader (1967), dass $G \succcurlyeq K^r$.

21.$^-$ Leite den Satz von Wagner (Übung **19**) aus dem Satz von Mader (Übung **20**) her.

22.$^+$ Finde in einem beliebigen Graphen G mit $\varepsilon(G) \geqslant k \in \mathbb{N}$ einen Minor $H \preccurlyeq G$, der sowohl $\delta(H) \geqslant k$ als auch $\delta(H) \geqslant |H|/2$ erfüllt.

23.$^+$ Finde eine Konstante c, so dass jeder Graph mit n Ecken und mindestens $n + 2k(\log k + \log\log k + c)$ Kanten k kantendisjunkte Kreise enthält (für alle $k \in \mathbb{N}$). Leite daraus ein Kanten-Analogon des Satzes 1.3.2 von Erdős und Pósa ab.

(Tip: Lösche, für $\delta \geqslant 3$, die Kanten eines kurzen Kreises und wende Induktion an. Die Rechnungen ähneln dem Beweis von Lemma 1.3.1.)

24. Vereinfache den Beweis von Satz 6.2.1 durch Verwendung von Übung 23 aus Kapitel 2.

25.$^+$ Zeige, dass jede Funktion h wie in Lemma 2.5.1 für alle geraden r die Ungleichung $h(r) > \frac{1}{8}r^2$ erfüllt, und Satz 6.2.1 daher bis auf die Konstante c bestmöglich ist.

26. Charakterisiere die Graphen mit n Ecken und mehr als $3n-6$ Kanten, die keinen $TK_{3,3}$ enthalten. Bestimme insbesondere $\mathrm{ex}(n, TK_{3,3})$.

(Tip: Verwende den Satz von Wagner, dass alle kantenmaximalen Graphen ohne $K_{3,3}$-Minor rekursiv aus maximal plättbaren Graphen und Exemplaren von K^5 konstruierbar sind, durch Zusammenkleben entlang von K^2s.)

27.$^-$ Leite den Vierfarbensatz aus der Hadwiger-Vermutung für $r = 5$ her.

28.$^-$ Führe die Hadwiger-Vermutung für r auf die Hadwiger-Vermutung für $r+1$ zurück.

29.$^-$ Leite aus einem Satz des Kapitels die folgende Abschwächung der Hadwiger-Vermutung her: für jedes $\epsilon > 0$ hat jeder Graph der chromatischen Zahl $\geqslant r^{1+\epsilon}$ einen K^r-Minor, falls nur r groß genug ist.

30. Zeige, dass jeder wie in Proposition 6.3.1 konstruierte Graph kantenmaximal ohne K^4-Minor ist.

31. Beweise die Implikation $\delta(G) \geqslant 3 \Rightarrow G \supseteq TK^4$.

(Tip: Proposition 6.3.1.)

32. Ein Multigraph heißt *series-parallel*, wenn er rekursiv aus einem K^2 konstruiert werden kann durch folgende Schritte: (i) Verdoppelung einer Kante; (ii) Unterteilung einer Kante. Zeige, dass ein 2-zusammenhängender Multigraph genau dann *series-parallel* ist, wenn er keinen (topologischen) K^4-Minor enthält.

33. (i) Beweise ohne Zuhilfenahme von Satz 6.3.8 die Hadwiger-Vermutung für Graphen der Taillenweite mindestens 11 und hinreichend großes r.

(ii) Zeige ohne Korollar 6.3.9 die Existenz einer Konstante $g \in \mathbb{N}$, so dass alle Graphen der Taillenweite mindestens g die Hadwiger-Vermutung erfüllen (für alle r).

34.$^+$ Beweise die Hadwiger-Vermutung für $r = 4$ direkt, ohne Benutzung von Proposition 6.3.1.

35.$^+$ Beweise die Hadwiger-Vermutung für Kantengraphen.

36. Beweise Korollar 6.3.5.

37.$^-$ Wozu dient in der Definition eines ϵ-regulären Paares die Bedingung „$|X| \geqslant \epsilon\,|A|$ und $|Y| \geqslant \epsilon\,|B|$“?

38.$^-$ Zeige, dass jedes in einem Graphen G ϵ-reguläre Paar (V_i, V_j) auch in $\overline{G}$ ϵ-regulär ist.

39. Betrachte eine Partition $\{V_1 \dots V_k\}$ einer endlichen Menge V. Zeige, dass der vollständige Graph auf V ungefähr $(k-1)$-mal so viele Kanten zwischen verschiedenen Partitionsmengen hat wie Kanten innerhalb von Partitionsmengen. Erkläre, wie dies zur Wahl von $m := 1/\gamma$ im Beweis des Satzes von Erdős und Stone führt.

40. Beweise das Regularitätslemma für nicht-dichte Graphen, d.h. für jede Folge $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Graphen der Ordnung n mit $\|G_n\|/n^2 \to 0$ für $n \to \infty$.

Notizen

Das Standard-Referenzwerk für Resultate und offene Probleme der extremalen Graphentheorie ist B. Bollobás, *Extremal Graph Theory*, Academic Press 1978; hier nicht gegebene Quellenverweise finden sich dort. Neuere Ergänzungen finden sich in dem von Bollobás geschriebenen Kapitel des *Handbook of Combinatorics* (R.L. Graham, M. Grötschel & L. Lovász, Hrsg.), North-Holland 1995. In L.W. Beineke & R.J. Wilson, *Selected Topics in Graph Theory 2*, Academic Press 1983, findet sich ein Übersichtsartikel von Simonovits zur extremalen Graphentheorie im engeren Sinne, der unter anderem die besondere Rolle der Turángraphen anschaulich herausarbeitet; einen neueren Überblick gibt Simonovits in (R.L. Graham & J. Nešetřil, Hrsg.) *The Mathematics of Paul Erdős*, Vol. 2, Springer 1996.

Der Satz von Turán ist nicht einfach ein extremaler Satz von vielen: er ist das klassische Ursprungsresultat der Extremalen Graphentheorie. Unser erster Beweis ist im wesentlichen der Originalbeweis; der zweite geht auf Zykov zurück und ist in dieser Form von Brandt. Unsere Version des Satzes von Erdős & Stone ist eine leichte Vereinfachung des Originalresultates. Ein direkter Beweis des Satzes (ohne Verwendung des Regularitätslemmas) findet sich in L. Lovász, *Combinatorial Problems and Exercises* (2. Auflage), North-Holland 1993. Das Korollar des Satzes, dem dieser seine in der extremalen Graphentheorie so herausragende Stellung verdankt, wurde erst 20 Jahre später gefunden: von Erdős und Simonovits (1966).

Von unseren zwei Schranken für $\mathrm{ex}(n, K_{r,r})$ gilt die obere als die größenordnungsmäßig vermutlich richtige. Für vollständig bipartite Graphen mit Eckenpartition in sehr unterschiedlich große Mengen wurde dies bestätigt von J. Kollár, L. Rónyai & T. Szabó, Norm-graphs and bipartite Turán numbers, *Combinatorica* **16** (1996), 399–406; dort ist gezeigt, dass $\mathrm{ex}(n, K_{r,s}) \geqslant c_r n^{2-\frac{1}{r}}$ gilt für $s > r!$.

Ein Beweis der Erdős-Sós-Vermutung für große k wurde 2006 angekündigt von M. Ajtai, J. Komlós, M. Simonovits und E. Szemerédi. Der Fall, dass der betrachtete Baum T ein Weg ist (Übung **16**), wurde 1959 von Erdős & Gallai bewiesen. Es war dieses Ergebnis, das, zusammen mit dem einfachen anderen

Extremfall eines Sterns (Übung **15**), die Vermutung als ein möglicherweise vereinendes Resultat anregte.

Satz 6.2.1 ist von B. Bollobás & A.G. Thomason, Proof of a conjecture of Mader, Erdős and Hajnal on topological complete subgraphs, *Eur. J. Comb.* **19** (1998), 883–887, sowie unabhängig von J. Komlós & E. Szemerédi, Topological cliques in graphs II, *Comb. Probab. Comput.* **5** (1996), 79–90. Für große G zeigen die letzten beiden Autoren, dass die Konstante c aus dem Satz auf ungefähr $\frac{1}{2}$ gesenkt werden kann, was nicht weit ist von der unteren Schranke von $\frac{1}{8}$ aus Übung **25**.

Satz 6.2.2 wurde zuerst 1982 von Kostochka bewiesen, und 1984 mit einer besseren Konstante von Thomason. Die Quellen, sowie weitere Einblicke auch in die frühen Beweise, finden sich in A.G. Thomason, The extremal function for complete minors, *J. Comb. Theory B* **81** (2001), 318–338. Dort wird auch der Wert von α bestimmt. Überraschenderweise liegt auch der Durchschnittsgrad, der zur Erzwingung eines *un*vollständigen Minors H notwendig ist, bei $cr\sqrt{\log r}$; hier ist $c = \alpha\sqrt{\epsilon} + o(1)$ für fast alle H mit r Ecken und $r^{1+\epsilon}$ Kanten, für jedes feste $\epsilon \in (0, 1)$. Siehe J.S. Myers & A.G. Thomason, The extremal function for noncomplete minors, erscheint in *Combinatorica*.

Da Satz 6.2.2 bestmöglich ist, gibt es keine Konstante c, so dass alle Graphen mit Durchschnittsgrad mindestens cr einen K^r-Minor haben. Verschärft man diese Annahme jedoch zu $\kappa \geqslant cr$, so kann man damit einen K^r-Minor in allen hinreichend großen Graphen erzwingen; siehe T. Böhme, K. Kawarabayashi, J. Maharry und B. Mohar, Linear connectivity forces large complete bipartite minors, preprint 2004.

Dass hinreichend hohe Taillenweite Minoren mit beliebig hohem Minimalgrad und somit große vollständige Minoren erzwingen kann, wurde bereits 1983 von Thomassen entdeckt. Unser Lemma 6.2.3 ist implizit enthalten in W. Mader, Topological subgraphs in graphs of large girth, *Combinatorica* **18** (1998), 405–412. Die Voraussetzung einer Taillenweite von mindestens $8k + 3$ im Lemma haben D. Kühn & D. Osthus, Minors in graphs of large girth, *Random Struct. Alg.* **22** (2003), 213–225, auf etwa $4k$ senken können; dies ist vermutlich bestmöglich.

Die Originalquelle für Satz 6.2.5 findet sich in D. Kühn und D. Osthus, Improved bounds for topological cliques in graphs of large girth (preprint 2005), wo die Autoren ihren Satz mit $g \leqslant 27$ neu beweisen. Vergleiche auch D. Kühn & D. Osthus, Subdivisions of K_{r+2} in graphs of average degree at least $r + \varepsilon$ and large but constant girth, *Comb. Probab. Comput.* **13** (2004), 361–371.

Der in den Übungen angedeutete Beweis der Hadwiger-Vermutung für r =4 findet sich bereits in Hadwigers Originalarbeit von 1943. Ein Gegenbeispiel zur Vermutung von Hajós wurde 1979 von Catlin gefunden; etwas später bewiesen Erdős und Fajtlowicz sogar, dass die Hajós-Vermutung für „fast alle" Graphen (siehe Kapitel 9) falsch ist.

Beweise des Satzes von Wagner 6.3.4 (mit der Hadwiger-Vermutung für $r = 5$ als Korollar) finden sich in Bollobás's *Extremal Graph Theory* (s.o.) und in Halins *Graphentheorie* (2. Auflage), Wissenschaftliche Buchgesellschaft 1989. Die Hadwiger-Vermutung für $r = 6$ wurde bewiesen von N. Robertson, P.D. Seymour und R. Thomas, Hadwiger's conjecture for K_6-free graphs, *Combinatorica* **13** (1993), 279–361.

Die Untersuchung von Graphen, die einen gegebenen Graphen nicht als Minor oder topologischen Minor enthalten, hat eine lange Geschichte. Ausgangspunkt war, wie so oft, das Vierfarbenproblem. Um das Problem zu „enttopologisieren“, stellte Wagner bereits 1935 die Frage nach der Struktur der Graphen ohne K^5- oder ohne $K_{3,3}$-Minor – in der Hoffnung, durch einen entsprechenden Struktursatz vielleicht die Graphen in der einen oder der anderen dieser beiden Klassen (und damit insbesondere die plättbaren Graphen) als vierfärbbar zu erweisen. Wagners Struktursatz für die Graphen ohne K^5-Minor (Satz 6.3.4) war das Ergebnis seiner Bemühungen, der Ansatz also gescheitert: im Gegensatz zu seinem Struktursatz für die Graphen ohne K^4-Minor (Proposition 6.3.1), der an Genauigkeit keinen Wunsch offenläßt, beschreibt Satz 6.3.4 die Struktur der Graphen ohne K^5-Minor zwar auch wunderschön – aber eben nur *modulo* der Struktur der in ihm als weiterhin ungeknackte Nuß enthaltenen plättbaren Graphen! Zu Einzelheiten der Wagnerschen Struktursätze für die Graphen ohne K^5- bzw. $K_{3,3}$-Minor, und zu weiteren Sätzen dieses Typs, siehe R. Diestel, *Graph Decompositions*, Oxford 1990.

Trotz seines Scheiterns im Hinblick auf das Vierfarbenproblem hatte Wagners Satz 6.3.4 Folgen wie kaum ein anderer Satz der Graphentheorie: er inspirierte Hadwiger zu seiner Vermutung, und Robertson & Seymour zu ihrer Minorentheorie (Kapitel 10), insbesondere dem Begriff der Baumzerlegungen und dem Struktursatz für Graphen ohne K^n-Minor (Satz 10.4.5). Wagner selbst reagierte 1964 auf Hadwigers Vermutung mit dem Beweis, dass immerhin eine Funktion $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ existiert mit der Eigenschaft, dass jeder Graph mit chromatischer Zahl mindestens $f(r)$ einen K^r-Minor hat (Übung **19**). Dieser Satz und sein Analogon für topologische Minoren, das unabhängig von Dirac und Jung bewiesen wurde, führten dann direkt auf die Frage nach dem geringsten Durchschnittsgrad, der einen gewünschten Minor erzwingt.

Satz 6.3.8 ist Folge des umfassenderen Ergebnisses von D. Kühn und D. Osthus, Complete minors in $K_{s,s}$-free graphs, *Combinatorica* **25** (2005) 49–64, dass jeder Graph ohne $K_{s,s}$ Teilgraphen und mit Durchschnittsgrad $r \geqslant r_s$ einen K^p-Minor hat für $p = \lfloor r^{1+\frac{1}{2(s-1)}}/(\log r)^3 \rfloor$.

Wie in der Vermutung von Gyárfás kann man fragen, unter welchen zusätzlichen Annahmen hoher Durchschnittsgrad einen *Untergraphen* erzwingt, der isomorph ist zu einer Unterteilung eines gegebenen Graphen H. Diese Frage wurde für beliebige H beantwortet von D. Kühn und D. Osthus, Induced subdivisions in $K_{s,s}$-free graphs of large average degree, *Combinatorica* **24** (2004) 287–304. Dort ist gezeigt, dass es für alle $r, s \in \mathbb{N}$ ein $d \in \mathbb{N}$ gibt, so dass jeder Graph $G \not\supseteq K_{s,s}$ mit $d(G) \geqslant d$ einen TK^r als Untergraphen enthält.

Abschnitt 6.4, und insbesondere Lemma 6.4.3, entstammen dem Übersichtsartikel zum Regularitätslemma von J. Komlós & M. Simonovits in *Paul Erdős is 80*, Proc. Colloq. Math. Soc. János Bolyai (1994). Dort findet sich eine Fülle weiterer Details und Anwendungen des Lemmas. Eine—unabhängig auch von Rödl entwickelte—Adaption des Lemmas auf magere Graphen gibt Y. Kohayakawa, Szemerédi's regularity lemma for sparse graphs, in (F. Cucker & M. Shub, Hrsg.) *Foundations of Computational Mathematics*, Selected papers of a conference held at IMPA in Rio de Janeiro, January 1997, Springer-Verlag 1997. Das Regularitätslemma selbst stammt aus E. Szemerédi, Regular partitions of graphs, *Colloques Internationaux CNRS* **260** – *Problèmes Combinatoires et Théorie des Graphes, Orsay* (1976), 399–401.

7 Ramseytheorie für Graphen

In diesem Kapitel betrachten wir eine Problemstellung, die der Leitfrage von Kapitel 6 oberflächlich ähnelt: welche Teilstrukturen finden sich notwendigerweise in einem Graphen, wenn dieser nur groß genug ist?

Das Regularitätslemma aus Kapitel 6.4 bietet eine mögliche Antwort auf diese Frage: jeder (hinreichend große) Graph G enthält große Untergraphen, die in wesentlichen Teilen typischen Zufallsgraphen ähneln. Fragen wir andererseits nach einem konkreten Untergraphen H, der uns besonders wichtig ist, so ähnelt unser Problem mehr den Sätzen von Turán (6.1.1) und Wagner (6.3.4), oder der Hadwiger-Vermutung: natürlich können wir nicht erwarten, dass G ausgerechnet diesen Graphen H enthält, doch enthält es ihn nicht, so folgt daraus vielleicht eine interessante Strukturaussage über G.

Die für dieses Kapitel typische Art einer solchen Strukturaussage ist einfach die Existenz eines anderen konkreten Untergraphen. Enthält etwa zu gegebenem $r \in \mathbb{N}$ jeder hinreichend große Graph entweder einen K^r oder einen induzierten $\overline{K^r}$? Enthält jeder hinreichend große *zusammenhängende* Graph entweder einen K^r, oder einen langen Weg oder einen großen Stern induziert?

Trotz der oberflächlichen Ähnlichkeit zu den Fragestellungen aus Kapitel 6 führt die Betrachtung von Fragen wie der obigen zu Mathematik ganz anderer Art: die Beweise der wichtigsten Sätze dieses Kapitels haben mehr gemeinsam mit denen verwandter Sätze etwa in der Algebra als mit anderen Teilen der Graphentheorie. Das genaue Studium dieser Beweistechniken ist denn auch ein eigenständiges – und faszinierendes – Gebiet der Kombinatorik: das Gebiet der *Ramseytheorie*.

7.1 Der Satz von Ramsey

Der Satz von Ramsey besagt, in seiner einfachsten Version, dass es in jedem hinreichend großen Graphen G entweder einen vollständigen oder einen kantenlosen Untergraphen vorgegebener Ordnung r gibt.

Zunächst mag das durchaus überraschen: immerhin benötigen wir zur Erzwingung eines K^r-Teilgraphen in G einen Anteil von etwa $\frac{(r-2)}{(r-1)}$ der $\binom{n}{2}$ möglichen Kanten von G (Korollar 6.1.3), aber G und $\overline{G}$ könnten ja beide nur etwa die Hälfte der möglichen Kanten enthalten. Oder anders ausgedrückt: bei der Suche nach einem K^r in G oder $\overline{G}$ hilft es offenbar entscheidend, uns die Wahl zwischen G und $\overline{G}$ offenzuhalten, statt den K^r nur in dem dichteren dieser beiden Graphen zu suchen.

Auf den zweiten Blick ist der Satz von Ramsey dann auch schon weniger überraschend: gerade der Satz von Turán zeigt ja, dass man nur dadurch viele Kanten in G unterbringen kann ohne einen K^r zu erzeugen, dass man diese Kanten ganz speziell anordnet – was dann eben einen großen vollständigen Teilgraphen von $\overline{G}$ erzwingt, im extremalen Fall von $G = T^{r-1}(n)$ sogar einen $K^{\lceil n/(r-1)\rceil} \subseteq \overline{G}$.

Wie könnte man den Satz von Ramsey beweisen? Beginnen wir einfach, versuchsweise, die Konstruktion des gesuchten Untergraphen mit einer beliebigen Ecke $v_1 \in V_1 := V(G)$. Können wir v_1 als die erste Ecke eines K^r oder $\overline{K^r}$ in G auffassen? Ist $|G|$ groß, so gibt es jedenfalls eine große Menge V_2 von Ecken, die entweder alle zu v_1 benachbart oder alle nicht zu v_1 benachbart sind. Entsprechend könnte v_1 die erste Ecke eines K^r bzw. $\overline{K^r}$ sein, dessen weitere Ecken alle in V_2 liegen. Wählen wir also für unseren K^r oder $\overline{K^r}$ eine zweite Ecke v_2 aus dieser Menge V_2. Da auch V_2 groß ist, gibt es eine immer noch relativ große Teilmenge $V_3 \subseteq V_2$ von Ecken, die bezüglich v_2 alle „vom gleichen Typ“ sind, d.h. zu v_2 entweder alle benachbart oder alle nicht benachbart (und entsprechend bezüglich v_1, wegen $V_3 \subseteq V_2$). Wir setzen nun unsere Suche nach Ecken eines K^r oder $\overline{K^r}$ in V_3 fort, usw. (Abb. 7.1.1).

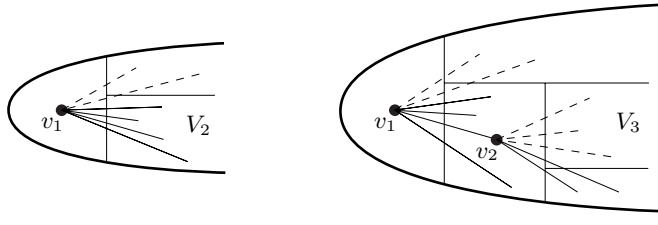


Abb. 7.1.1. Konstruktion der Eckenfolge $v_1, v_2, \ldots$

Wie lange können wir so fortfahren? Dies hängt offenbar davon ab, wie groß unsere erste Eckenmenge V_1 war: jedes V_i ist mindestens noch etwa halb so groß wie sein Vorgänger V_{i-1}, d.h. wir werden s Konstruktionsschritte vollziehen können, wenn G mindestens etwa 2^s Ecken hatte.

Und wie der folgende Beweis zeigt, reichen $s = 2r-3$ Ecken v_i aus, um unter ihnen in der Tat die Ecken eines K^r oder $\overline{K^r}$ in G zu finden.

Satz 7.1.1. (Ramsey 1930) [7.2.2]
Zu jedem $r \in \mathbb{N}$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft, dass jeder Graph mit mindestens n Ecken einen K^r oder einen $\overline{K^r}$ als Untergraphen enthält.

Beweis. Die Behauptung ist trivial für $r = 0, 1$; im Folgenden sei $r \geqslant 2$. Es sei $n := 2^{2r-3}$, und G ein Graph mit mindestens n Ecken. Wir definieren rekursiv Eckenmengen $V_1, \dots, V_{2r-2}$ und Ecken $v_i \in V_i$ in G mit den folgenden Eigenschaften:

(i) $|V_i| = 2^{2r-2-i}$ $(i = 1, \dots, 2r-2)$;

(ii) $V_i \subseteq V_{i-1} \setminus \{v_{i-1}\}$ $(i = 2, \dots, 2r-2)$;

(iii) v_{i-1} ist entweder zu jeder oder zu keiner Ecke in V_i benachbart $(i = 2, \dots, 2r-2)$.

Es sei $V_1 \subseteq V(G)$ irgendeine Menge von 2^{2r-3} Ecken, und $v_1 \in V_1$ beliebig. Damit ist (i) für $i = 1$ erfüllt; (ii) und (iii) sind trivialerweise wahr. Zu gegebenem i mit $1 < i \leqslant 2r-2$ seien nun V_{i-1} und $v_{i-1} \in V_{i-1}$ bereits so gewählt, dass (i)–(iii) für $i-1$ gelten. Da

$$|V_{i-1} \setminus \{v_{i-1}\}| = 2^{2r-1-i} - 1$$

ungerade ist, hat V_{i-1} eine Teilmenge V_i, die (i)–(iii) erfüllt; wir wählen $v_i \in V_i$ beliebig.

Unter den $2r-3$ Ecken $v_1, \dots, v_{2r-3}$ gibt es $r-1$ Ecken v_{i-1}, die in (iii) vom gleichen Typ sind: entweder jeweils zu allen Ecken in V_i benachbart oder zu keiner. Da V_i die Ecken $v_i, \dots, v_{2r-2}$ enthält, induzieren diese $r-1$ Ecken zusammen mit v_{2r-2} entsprechend einen K^r oder einen $\overline{K^r}$ in G. □

Die kleinste zu r gehörige Zahl n aus Satz 7.1.1 nennt man die *Ramseyzahl von r*; nach unserem Beweis des Satzes ist $n \leqslant 2^{2r-3}$. In Kapitel 9 werden wir auch eine untere Schranke für die Ramseyzahl von r finden (Satz 9.1.3). *Ramseyzahl von r*

Im Zusammenhang mit dem Satz von Ramsey drückt man der Anschaulichkeit halber Partitionen häufig als Färbungen aus: eine *Färbung* einer Menge X *mit c Farben*, kurz eine *c-Färbung* (der Elemente) von X, ist dann nichts weiter als eine Partition von X in c Teilmengen – die halt mit den verschiedenen Farben indiziert werden. (Insbesondere muss eine Färbung der Kantenmenge eines Graphen keine Auflagen erfüllen wie in Kapitel 4: benachbarte Kanten dürfen gleich gefärbt sein, d.h. der gleichen Partitionsmenge angehören.) Haben wir die Menge $[X]^k$ aller *c-Färbung* $[X]^k$

k-elementigen Teilmengen einer Menge X mit c Farben gefärbt, so nennen wir eine Menge $Y \subseteq X$ *einfarbig*, wenn alle Elemente von $[Y]^k$ die gleiche Farbe haben.[1]

einfarbig

Satz 7.1.1 sagt in dieser Sprechweise folgendes: zu jedem r gibt es ein n mit der Eigenschaft, dass jede n-elementige Menge X bei beliebiger 2-Färbung von $[X]^2$ eine einfarbige Teilmenge Y mit mindestens r Elementen hat. Es ist ein interessantes Phänomen, dass der Beweis der entsprechenden Aussage über c-Färbungen von $[X]^k$ für beliebig große $c, k \in \mathbb{N}$ fast identisch ist mit dem oben bewiesenen Fall $k = c = 2$. Um diesen Beweis nicht lediglich zu wiederholen, beweisen wir die – einfachere – unendliche Version des Satzes zuerst und leiten die endliche dann daraus her.

[10.1.1] **Satz 7.1.2.** *Sind $k, c \geqslant 1$ natürliche Zahlen, ist X eine unendliche Menge, und ist $[X]^k$ mit c Farben gefärbt, so hat X eine unendliche einfarbige Teilmenge.*

Beweis. Wir beweisen den Satz für festes c mit Induktion nach k. Für $k = 1$ ist die Aussage trivial; es sei daher $k > 1$, und die Aussage sei wahr für kleinere k.

Es sei X eine unendliche Menge, und $[X]^k$ sei mit c Farben gefärbt. Wir definieren rekursiv eine unendliche Folge $X_0, X_1, \dots$ unendlicher Teilmengen $X_i \subseteq X$, sowie Elemente $x_i \in X_i$, mit den folgenden Eigenschaften (für alle i):

(i) $X_{i+1} \subseteq X_i \setminus \{x_i\}$;

(ii) alle k-elementigen Mengen $\{x_i\} \cup Z$ mit $Z \in [X_{i+1}]^{k-1}$ tragen die gleiche Farbe; diese Farbe sei mit x_i *assoziiert*.

assoziiert

Wir beginnen mit $X_0 := X$ und wählen $x_0 \in X_0$ beliebig. Nach Annahme ist X_0 unendlich. Sind für ein $i \in \mathbb{N}$ bereits eine unendliche Menge X_i und ein $x_i \in X_i$ gewählt, so betrachten wir die c-Färbung von $[X_i \setminus \{x_i\}]^{k-1}$, in der jede Menge Z mit der Farbe von $\{x_i\} \cup Z$ aus unserer c-Färbung von $[X]^k$ gefärbt ist. Nach Induktionsannahme hat $X_i \setminus \{x_i\}$ eine unendliche einfarbige Teilmenge bezüglich dieser Färbung, und diese Teilmenge sei unser X_{i+1}. Offenbar sind die Bedingungen (i) und (ii) damit erfüllt. Schließlich wählen wir $x_{i+1} \in X_{i+1}$ beliebig.

Da c endlich ist, gibt es unter unseren c Farben eine, die mit unendlich vielen x_i assoziiert ist. Die Menge dieser x_i ist eine einfarbige unendliche Teilmenge von X. □

Um aus Satz 7.1.2 seine endliche Version abzuleiten, verwenden wir ein über die Graphentheorie hinaus bekanntes Hilfsmittel: das Unendlichkeitslemma von König.

[1] Beachte, dass zwar Y einfarbig heißt, aber nicht die Elemente von Y sondern seine k-Teilmengen gefärbt sind.

Lemma 7.1.3. (Königs Unendlichkeitslemma)
Es sei $V_0, V_1, \dots$ eine unendliche Folge disjunkter, nicht leerer, endlicher Mengen, und G ein Graph auf ihrer Vereinigung. Für jedes $n \geqslant 1$ habe jede Ecke $v \in V_n$ einen Nachbarn $f(v)$ in V_{n-1}. Dann enthält G einen unendlichen Weg $v_0 v_1 \dots$ mit $v_n \in V_n$ für alle n.

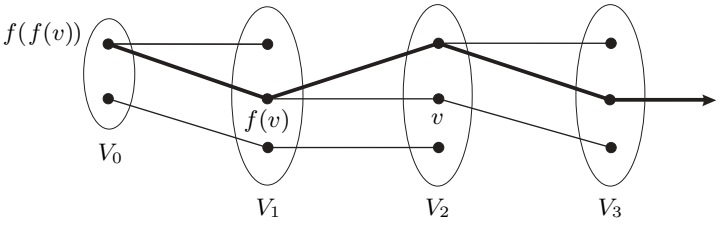


Abb. 7.1.2. Königs Unendlichkeitslemma

Beweis. Es sei $\mathcal{P}$ die Menge aller in V_0 endenden Wege der Form $v\, f(v)\, f(f(v)) \dots$ Wir definieren unseren unendlichen Weg $v_0 v_1 \dots$ induktiv. Gleichzeitig mit der Folge $v_0, v_1, \dots$ seiner Ecken konstruieren wir eine Folge $\mathcal{P}_0 \supseteq \mathcal{P}_1 \supseteq \dots$ unendlicher Teilmengen von $\mathcal{P}$, so dass für alle n jeder Weg aus $\mathcal{P}_n$ mit dem Teilweg $v_n \dots v_0$ endet.

Offenbar ist $\mathcal{P}$ unendlich. Da V_0 endlich ist und jeder Weg aus $\mathcal{P}$ in V_0 endet, liegt eine Ecke $v_0 \in V_0$ auf unendlich vielen nicht trivialen Wegen aus $\mathcal{P}$; es sei $\mathcal{P}_0$ die Menge dieser in v_0 endenden Wege.

Für $n \geqslant 1$ seien nun $v_0, \dots, v_{n-1}$ und $\mathcal{P}_{n-1} \subseteq \mathcal{P}$ bereits so gewählt, dass $v_{n-1} \dots v_0 \subsetneqq P$ gilt für alle $P \in \mathcal{P}_{n-1}$ und $\mathcal{P}_{n-1}$ unendlich ist. Da jeder Weg aus $\mathcal{P}_{n-1}$ (genau) eine Ecke aus V_n enthält, gibt es wie oben eine Ecke $v_n \in V_n$, die im Innern unendlich vieler Wege aus $\mathcal{P}_{n-1}$ liegt; die Menge dieser mit $v_n \dots v_0$ endenden Wege nennen wir $\mathcal{P}_n$.

Da die Mengen $\mathcal{P}_n$ trotz ihres Abnehmens stets unendlich bleiben, können wir diese Konstruktion für alle $n \in \mathbb{N}$ durchführen. Da v_n jeweils zu v_{n+1} benachbart ist, definiert die Folge $v_0, v_1, \dots$ in der Tat einen unendlichen Weg in G. □

Satz 7.1.4. *Zu $k, c, r \geqslant 1$ existiert stets ein $n \geqslant k$ mit der Eigenschaft, dass jede n-elementige Menge X bei jeder c-Färbung von $[X]^k$ eine einfarbige r-elementige Teilmenge hat.* [7.3.3]

Beweis. Wie in der Mengenlehre üblich, bezeichne $n \in \mathbb{N}$ (auch) die Menge $\{0, \dots, n-1\}$. Angenommen, die Behauptung sei falsch für gewisse k, c, r. Dann gibt es zu jedem $n \geqslant k$ eine n-elementige Menge, oBdA die Menge n, und eine c-Färbung $[n]^k \to c$, so dass n keine einfarbige r-elementige Teilmenge hat. Solche Färbungen nennen wir *schlecht*; nach Annahme gibt es also zu jedem $n \geqslant k$ eine schlechte Färbung von $[n]^k$. Wir werden aus all diesen Färbungen eine schlechte Färbung von $[\mathbb{N}]^k$ konstruieren, im Widerspruch zu Satz 7.1.2.

k, c, r

schlechte Färbung

Für jedes $n \geqslant k$ sei $V_n \neq \emptyset$ die Menge aller schlechten Färbungen von $[n]^k$. Jede Färbung $g \in V_{n+1}$ induziert durch Restriktion auf $[n]^k$ eine Färbung $f(g) \in V_n$. Nach dem Unendlichkeitslemma gibt es eine unendliche Folge $g_k, g_{k+1}, \ldots$ schlechter Färbungen $g_n \in V_n$ mit $f(g_{n+1}) = g_n$ für alle $n \geqslant k$. Da für jedes $m \geqslant k$ alle Färbungen g_n mit $n \geqslant m$ auf $[m]^k$ übereinstimmen, ist für jedes $Y \in [\mathbb{N}]^k$ der Wert $g_n(Y)$ für alle $n > \max Y$ gleich. Definieren wir $g(Y)$ als diesen gemeinsamen Wert $g_n(Y)$, so ist g eine schlechte Färbung von $[\mathbb{N}]^k$: jede r-elementige Teilmenge $S \subseteq \mathbb{N}$ ist in einem hinreichend großen n enthalten, und da g auf $[n]^k$ mit der schlechten Färbung g_n übereinstimmt, kann S nicht einfarbig sein. □

Ramseyzahl $R(k, c, r)$

Die kleinste zu k, c, r gehörige Zahl n aus Satz 7.1.4, die *Ramseyzahl* dieser Parameter, bezeichnen wir mit $R(k, c, r)$.

7.2 Ramseyzahlen von Graphen

Der Satz von Ramsey lässt sich wie folgt umformulieren: ist $H = K^r$ gegeben und G ein Graph mit hinreichend vielen Ecken, so hat entweder G selbst oder sein Komplement $\overline{G}$ einen zu H isomorphen Teilgraphen. Gilt die entsprechende Aussage auch für nicht vollständige Graphen H? Selbstverständlich: wegen $H \subseteq K^{|H|}$ folgt sie sofort aus dem obigen Spezialfall.

Ramseyzahl $R(H)$

Fragen wir jedoch nach dem *kleinstmöglichen* n, so dass jeder Graph G mit n Ecken die genannte Eigenschaft hat – dies ist die *Ramseyzahl* $R(H)$ von H – so wird die Frage interessant: je weniger Kanten H hat, desto eher wird H in G oder in $\overline{G}$ einbettbar sein, und um so geringer sollte $R(H)$ ausfallen. Zu erwarten ist also, dass für magere Graphen H die Ramseyzahl von H weit unter der Ramseyzahl von $|H|$ liegt.

$R(H_1, H_2)$

Etwas allgemeiner bezeichne $R(H_1, H_2)$ die kleinste natürliche Zahl n, so dass für jeden Graphen G auf n Ecken entweder $H_1 \subseteq G$ oder $H_2 \subseteq \overline{G}$ gilt. Der genaue Wert von $R(H_1, H_2)$ ist für die meisten Graphen H_1, H_2 nur in ausgesprochen schlechter Näherung bekannt. Interessant dabei ist, dass die besten bekannten unteren Schranken nicht selten durch Zufallsgraphen erreicht werden (siehe etwa Satz 9.1.3), anstatt durch explizite Konstruktionen großer Graphen G mit $H_1 \not\subseteq G$ und $H_2 \not\subseteq \overline{G}$.

Die folgende Proposition gehört zu den wenigen Fällen, in denen Ramseyzahlen für eine größere Klasse von Graphen explizit bekannt sind:

Proposition 7.2.1. *Es seien $s, t \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, und T ein beliebiger Baum mit t Ecken. Dann ist $R(T, K^s) = (t-1)(s-1)+1$.*

Beweis. Die disjunkte Vereinigung von $s-1$ Graphen K^{t-1} enthält kein Exemplar von T, und das Komplement dieses Graphen, der vollständig $(s-1)$-partite Graph K_{t-1}^{s-1}, enthält keinen K^s-Teilgraphen. Damit ist $R(T,K^s) \geqslant (t-1)(s-1)+1$ gezeigt. (0.5.4) (4.2.3)

Umgekehrt sei nun G ein beliebiger Graph mit $n=(t-1)(s-1)+1$ Ecken, dessen Komplement keinen K^s enthält. Dann ist $s>1$, und bei Eckenfärbungen von G kann keine Farbklasse mehr als $s-1$ Ecken enthalten; wir brauchen daher stets $\chi(G) \geqslant \lceil n/(s-1)\rceil = t$ Farben. Nach Korollar 4.2.3 hat G einen Teilgraphen H mit $\delta(H) \geqslant t-1$, und dieser enthält T nach Korollar 0.5.4. □

Als Hauptergebnis dieses Abschnitts bringen wir einen der seltenen allgemeinen Sätze, die eine relativ niedrige obere Schranke für die Ramseyzahlen gewisser Graphen zum Inhalt haben. Der Satz behandelt magere Graphen: er besagt, dass für Graphen H mit beschränktem Maximalgrad ihre Ramseyzahlen höchstens linear in $|H|$ wachsen – eine enorme Verbesserung gegenüber unserer exponentiellen Schranke aus dem Beweis von Satz 7.1.1.

Satz 7.2.2. (Chvátal, Rödl, Szemerédi & Trotter 1983)
Zu jedem $\Delta \in \mathbb{N}$ gibt es eine Konstante c, so dass

$$R(H) \leqslant c\,|H|$$

gilt für alle Graphen H mit $\Delta(H) \leqslant \Delta$. (6.1.1) (6.4.1) (6.4.3) (7.1.1)

Beweis. Die Grundidee des Beweises ist wie folgt. Ist G hinreichend groß, so hat G nach dem Regularitätslemma (Satz 6.4.1) einen Regularitätsgraphen R mit kleinem ϵ, großem m und $d=0$. Letztere Bedingung besagt, dass R sämtliche Kanten hat, für die das entsprechende Paar von Eckenmengen in G ϵ-regulär ist – egal, ob die Dichte dieses Paares groß oder klein ist. Dadurch hat R viele Kanten, enthält nach dem Satz von Turán also einen K^r für großes r. Wir färben die Kanten dieses K^r mit zwei Farben, je nachdem ob das entsprechende ϵ-reguläre Paar in G eine Dichte größer oder kleiner als $1/2$ hat. Ist r groß genug (mindestens die Ramseyzahl von $\chi(H) \leqslant \Delta+1$), so enthält R_s (etwa für $s=|H|$; siehe Kapitel 6.4 zur Definition von R_s) ein „einfarbiges“ Exemplar von H. Da R auch ein Regularitätsgraph von $\overline{G}$ ist, finden wir H nach Lemma 6.4.3 entsprechend auch in G oder in $\overline{G}$.

Zum Beweis sei nun $\Delta \in \mathbb{N}$ gegeben. Lemma 6.4.3 liefert uns zu $d := 1/2$ und Δ ein ϵ_0. Es sei ℓ die Ramseyzahl von $\Delta+1$ (wie nach Satz 7.1.1 definiert). Weiter sei $\epsilon \leqslant \epsilon_0$ positiv aber so klein, dass für $k=\ell$ (und damit für alle $k \geqslant \ell$) Δ, d ϵ_0 ℓ, ϵ

$$2\epsilon < \frac{1}{\ell-1} - \frac{1}{k} \qquad (1)$$

gilt. (Insbesondere ist dann $\epsilon < 1$.) Das Regularitätslemma liefert uns
L, N zu diesen ϵ und ℓ zwei Größen L und N.

Alle bisher definierten Größen hängen lediglich von Δ ab. Wir beweisen nun die Aussage des Satzes für

c
$$c := \max\Big\{N\,,\ \frac{2^{\Delta+1}L}{1-\epsilon}\Big\}\,.$$

s Dazu sei H mit $\Delta(H) \leqslant \Delta$ gegeben; wir setzen $s := |H|$. Es sei nun G
G ein beliebiger Graph der Ordung

n
$$n \geqslant c\,|H| \geqslant N\,.$$

Wir zeigen, dass $H \subseteq G$ oder $H \subseteq \overline{G}$ gilt.

Wegen $n \geqslant N$ hat G nach dem Regularitätslemma eine Eckenpar-
k, m tition wie dort beschrieben. Für $m := |V_1| = \ldots = |V_k|$ gilt dann

$$m = \frac{n-|V_0|}{k} \geqslant n\,\frac{1-\epsilon}{L} \geqslant cs\,\frac{1-\epsilon}{L} \geqslant 2^{\Delta+1}s = 2s/d^\Delta$$

R nach (i)–(ii) des Lemmas und Definition von c. Es sei R der der Partition von G entsprechende Regularitätsgraph mit Parametern $\epsilon, m, 0$. R hat k Ecken und, nach (iv) des Regularitätslemmas, mindestens die folgende Anzahl von Kanten:

$$\begin{aligned}\binom{k}{2} - \epsilon k^2 &= \tfrac{1}{2}k^2\Big(1 - \frac{1}{k} - 2\epsilon\Big)\\ &\underset{(1)}{>} \tfrac{1}{2}k^2\Big(1 - \frac{1}{k} - \frac{1}{\ell-1} + \frac{1}{k}\Big)\\ &= \tfrac{1}{2}k^2\Big(\frac{\ell-2}{\ell-1}\Big)\\ &\geqslant t_{\ell-1}(k)\,.\end{aligned}$$

K Nach Satz 6.1.1 hat R damit einen Teilgraphen $K = K^\ell$.

Wir färben nun die Kanten von R mit zwei Farben: grün, wenn das der Kante entsprechende Paar (V_i, V_j) in der Zerlegung von G die Dichte $\geqslant 1/2$ hat, und rot sonst. Wir bezeichnen den von den grünen Kanten gebildeten aufspannenden Teilgraphen von R mit R', und den entsprechenden roten Teilgraphen plus die Kanten der Dichte genau $1/2$ mit R''. Offenbar ist R' ein Regularitätsgraph von G mit Parametern ϵ, m und $1/2$. Und R'' ist ein Regularitätsgraph von $\overline{G}$, mit den gleichen Parametern: wie man sofort nachrechnet, ist jedes in G ϵ-reguläre Paar (V_i, V_j) auch in $\overline{G}$ ϵ-regulär.

Nach Definition von ℓ enthält K einen grünen oder einen roten K^r, für $r := \chi(H) \leqslant \Delta + 1$. Entsprechend gilt $H \subseteq R'_s$ oder $H \subseteq R''_s$. Da R' und R'' wegen $\epsilon \leqslant \epsilon_0$ und $m \geqslant 2s/d^\Delta$ die Voraussetzungen von Lemma 6.4.3 erfüllen, folgt wie gewünscht $H \subseteq G$ oder $H \subseteq \overline{G}$. □

Wegen seines hübschen Beweises bringen wir noch einen Satz über die Anzahl von Graphen G, die minimal sind mit der Eigenschaft, dass G bei jeder 2-Kantenfärbung ein einfarbiges Exemplar eines vorgegebenen Graphen H enthält – einen zu H isomorphen Teilgraphen also, dessen Kanten alle die gleiche Farbe tragen. Solche Graphen G nennen wir *Ramsey-minimal* für H.

einfarbig

Ramsey-minimal

Proposition 7.2.3. *Ist T ein Baum aber kein Stern, so gibt es unendlich viele für T Ramsey-minimale Graphen.*

(0.5.4) (4.2.3) (4.2.5) (=9.2.2)

Beweis. Es sei $|T| =: r$. Wir zeigen, dass es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ einen für T Ramsey-minimalen Graphen mit mindestens n Ecken gibt.

Nach Satz 4.2.5 gibt es einen Graphen G mit chromatischer Zahl $\chi(G) > r^2$ und Taillenweite $g(G) > n$. Färben wir die Kanten von G mit grün und rot, so kann nicht sowohl der grüne als auch der rote Teilgraph eine Eckenfärbung mit höchstens r Farben haben (im Sinne von Kapitel 4): sonst färbten wir die Ecken von G mit dem kartesischen Produkt aus diesen Färbungen und hätten einen Widerspruch zu $\chi(G) > r^2$. Es sei also $G' \subseteq G$ einfarbig mit $\chi(G') > r$. Nach Korollar 4.2.3 hat G' einen Teilgraphen vom Minimalgrad $\geqslant r$, und dieser enthält T nach Korollar 0.5.4.

Wir wählen nun einen für T Ramsey-minimalen Teilgraphen G^* von G. Offenbar ist G^* kein Wald: jeder Wald hat nämlich eine 2-Kantenfärbung, bezüglich derer er keinen einfarbigen Weg der Länge 3 enthält, und somit erst recht kein einfarbiges T. Unser Graph G^* enthält also einen Kreis, und wegen $G^* \subseteq G$ beträgt dessen Länge mindestens $g(G) > n$. Insbesondere ist $|G^*| > n$, wie gewünscht. □

7.3 Ramsey induziert

Der Satz von Ramsey lässt sich auch wie folgt umformulieren. Zu jedem Graphen $H = K^r$ *existiert* ein Graph $G = K^n$ mit der folgenden Eigenschaft: wie immer wir die Kantenmenge von G mit zwei Farben färben, wir werden stets eine einfarbiges Exemplar von H in G finden (d.h. einen zu H isomorphen Teilgraphen, dessen Kanten alle die gleiche Farbe tragen). Wie bereits bemerkt, folgt dies wegen $H \subseteq K^{|H|}$ auch für nicht notwendig vollständige Graphen H und G sofort aus dem Satz von Ramsey selbst.

einfarbiger Teilgraph

Verlangen wir jedoch, dass das einfarbige Exemplar von H in G *induziert* sein soll, also ein Untergraph von G, so wird das Problem plötzlich hochgradig nicht-trivial. Gefordert ist jetzt kein „Aussonderungsbeweis“, sondern eine Konstruktion: die Konstruktion eines Graphen G, der für jede 2-Kantenfärbung eine einfarbiges Exemplar von H

Ramseygraph

als Untergraphen enthält. Einen solchen Graphen G nennen wir einen *Ramseygraphen* für H.

Dass solch ein Ramseygraph für jeden Graphen H existiert, ist einer der grundlegenden Sätze der Ramseytheorie für Graphen; es wurde um 1973 unabhängig von Deuber, von Erdős, Hajnal & Pósa, und von Rödl bewiesen.

Satz 7.3.1. *Jeder Graph hat einen Ramseygraphen. Mit anderen Worten, zu jedem Graphen H gibt es einen Graphen G mit der Eigenschaft, dass G zu jeder Kantenpartition $E(G) = E_1 \cup E_2$ einen zu H isomorphen Untergraphen enthält, dessen Kanten alle in E_1 oder alle in E_2 liegen.*

Wir geben zwei Beweise. Bei aller Verschiedenheit vermitteln beide eine Ahnung echter Ramseytheorie: Graphen tauchen eigentlich nur als Bausteine auf, aber das Gebäude hat es in sich.

Erster Beweis. Bei der Konstruktion des gesuchten Ramseygraphen werden wir iterativ Ecken eines bereits konstruierten Graphen $G = (V, E)$ durch Kopien eines anderen Graphen H ersetzen. Für eine Eckenmenge $U \subseteq V$ bezeichne $G[U \to H]$ den Graphen, den wir aus G erhalten, indem wir die Ecken $u \in U$ durch disjunkte Kopien $H(u)$ von H ersetzen und jedes $H(u)$ vollständig mit allen $H(u')$ mit $uu' \in E$ und allen Ecken $v \in V \setminus U$ mit $uv \in E$ verbinden (Abb. 7.3.1). Formal ist $G[U \to H]$ der Graph auf der Eckenmenge

$G[U \to H]$
$H(u)$

$$(U \times V(H)) \;\cup\; ((V \setminus U) \times \{\emptyset\})\,,$$

in dem zwei Ecken (v, w) und (v', w') genau dann benachbart sind, wenn entweder $vv' \in E$ ist oder aber $v = v' \in U$ und $ww' \in E(H)$.[2]

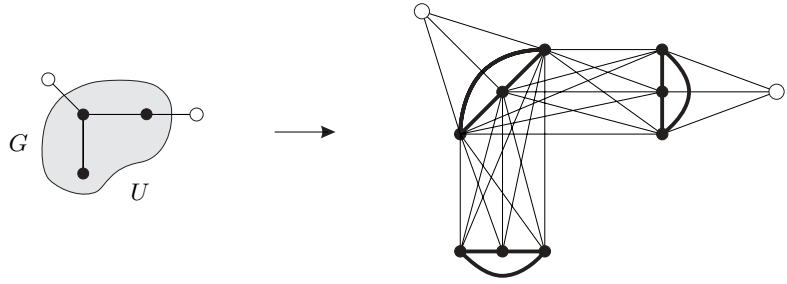


Abb. 7.3.1. Ein Graph $G[U \to H]$ mit $H = K^3$

[2] Die Ersetzung von $V \setminus U$ durch $(V \setminus U) \times \{\emptyset\}$ hat lediglich den Zweck, dass dann alle Ecken von $G[U \to H]$ einheitlich die Form (v, w) haben und $G[U \to H]$ formal zu G disjunkt ist.

Wir beweisen die folgende formale Verschärfung von Satz 7.3.1:

Zu je zwei Graphen H_1, H_2 gibt es einen Graphen $G = G(H_1, H_2)$ mit der Eigenschaft, dass G zu jeder Färbung seiner Kanten mit den Farben 1 und 2 entweder einen H_1 der Farbe 1 oder einen H_2 der Farbe 2 als Untergraphen enthält. (∗)

$G(H_1, H_2)$

Diese formale Verschärfung des Satzes ermöglicht einen Induktionsbeweis über $|H_1| + |H_2|$, wie folgt.

Ist H_1 oder H_2 kantenlos, so gilt (∗) mit jedem hinreichend großen kantenlosen G. Sowohl H_1 also auch H_2 habe daher eine Kante (und insbesondere $\geqslant 2$ Ecken), und (∗) gelte für alle Paare (H_1', H_2') mit kleinerer Eckensumme $|H_1'| + |H_2'|$.

Für jedes der beiden $i = 1, 2$ wählen wir beliebig eine nicht isolierte Ecke $x_i \in H_i$ und setzen $H_i' := H_i - x_i$. Weiter sei $H''_i \subseteq H_i'$ der von den Nachbarn von x_i in H_i induzierte Untergraph.

x_i

H_i', H''_i

Zum Induktionsschritt werden wir eine Folge $G^0, \dots, G^n$ disjunkter Graphen konstruieren; der Graph G^n wird unser gesuchter Ramseygraph $G(H_1, H_2)$ sein. Zusammen mit den Graphen G^i werden wir Eckenmengen $V^i \subseteq V(G^i)$ und eine Abbildung

$$f\colon V^1 \cup \dots \cup V^n \to V^0 \cup \dots \cup V^{n-1}$$

definieren, mit

$$f(V^i) = V^{i-1} \tag{1}$$

für alle $i \geqslant 1$. Schreiben wir $f^i := f \circ \dots \circ f$ für die i-fache Hintereinanderausführung von f und f^0 für die Identitätsabbildung auf $V^0 = V(G^0)$, so gilt dann $f^i(v) \in V^0$ für alle $v \in V^i$ und alle $i \geqslant 0$. Wir nennen $f^i(v)$ den *Ursprung* von v.

f^i

Ursprung

Die Untergraphen $G^i[V^i]$ werden die Struktur von G^0 im folgenden Sinne widerspiegeln:

Ecken in V^i verschiedenen Ursprungs sind genau dann benachbart, wenn ihre Ursprünge in G^0 benachbart sind. (2)

Technisch gesehen werden wir die Aussagen (1) und (2) für unseren Beweis nicht weiter verwenden. Sie sollen jedoch helfen, sich die Graphen G^i vorzustellen: jedes G^i (genauer: jedes $G^i[V^i]$; es wird noch einige Ecken $x \in G^i - V^i$ geben) ist im Wesentlichen eine aufgeblähte Kopie von G^0 – in der jede Ecke $w \in G^0$ ersetzt ist durch die Menge aller Ecken aus V^i mit Ursprung w – und die Abbildung f verbindet zwischen den verschiedenen G^i Ecken gleichen Ursprungs.

Nach Induktionsannahme gibt es Ramseygraphen

G_1, G_2 $$G_1 := G(H_1, H_2') \quad \text{und} \quad G_2 := G(H_1', H_2)\,.$$

Als G^0 wählen wir eine Kopie von G_1 und setzen $V^0 := V(G^0)$. Es
W_i' sei $W_0', \dots, W_{n-1}'$ eine Aufzählung der Teilmengen von V^0, die in G^0
n einen H_2' aufspannen. Damit ist n definiert, als die Anzahl der zu H_2' isomorphen Untergraphen von G^0. (Wir werden also noch zu jedem W_{i-1}' einen Graphen G^i konstruieren, $i = 1, \dots, n$.) Für jedes
W''_i $i = 0, \dots, n-1$ sei W''_i das Bild von $V(H''_2)$ unter irgendeinem Isomorphismus $H_2' \to G^0[W_i']$.

Nehmen wir nun an, $G^0, \dots, G^{i-1}$ und $V^0, \dots, V^{i-1}$ seien bereits definiert für ein $i \geqslant 1$, und es sei f definiert auf $V^1 \cup \dots \cup V^{i-1}$. Wir konstruieren G^i aus G^{i-1} in zwei Schritten. Für den ersten Schritt be-
U^{i-1} trachten wir die Menge U^{i-1} aller Ecken $v \in V^{i-1}$, deren Ursprung $f^{i-1}(v)$ in W''_{i-1} liegt. (Für $i = 1$ ergibt dies $U^0 = W''_0$.) Wir erweitern G^{i-1} zu einem neuen Graphen $\tilde{G}^{i-1}$ (disjunkt von G^{i-1}), indem wir
$G_2(u)$ jede Ecke $u \in U^{i-1}$ durch eine Kopie $G_2(u)$ des Graphen G_2 ersetzen:

$\tilde{G}^{i-1}$ $$\tilde{G}^{i-1} := G^{i-1}[U^{i-1} \to G_2]$$

(siehe Abbildungen). Wir setzen $f(u') := u$ für alle $u \in U^{i-1}$ und $u' \in G_2(u)$, sowie $f(v') := v$ für alle $v' = (v, \emptyset)$ mit $v \in V^{i-1} \setminus U^{i-1}$. (Zur Erinnerung: $(v, \emptyset)$ war einfach eine Kopie der Ecke $v \in G^{i-1}$ in $\tilde{G}^{i-1}$.)
V^i Als V^i wählen wir die Menge all der Ecken v' oder u' von $\tilde{G}^{i-1}$, für die wir f gerade definiert haben, die also entweder direkt einer Ecke v aus V^{i-1} entsprechen oder aber zur Erweiterung $G_2(u)$ einer solchen Ecke u gehören. Dieser Graph $\tilde{G}^{i-1}$ ist bereits der „wesentliche Teil“ von G^i: der Teil, der wie eine aufgeblähte Kopie von G^0 aussieht.

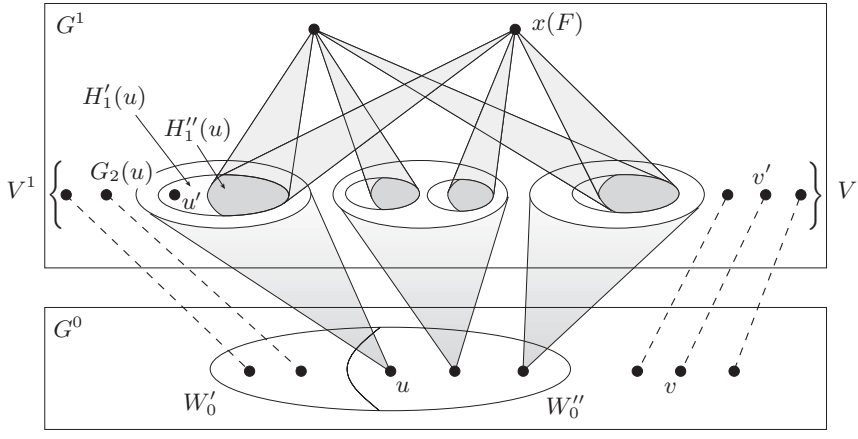


Abb. 7.3.2. Die Konstruktion von G^1

Im zweiten Schritt erweitern wir jetzt $\tilde{G}^{i-1}$ durch Hinzufügung einiger weiterer Ecken $x \notin V^i$ zu dem gesuchten Graphen G^i. Es bezeichne $\mathcal{F}$ die Menge aller Familien F der Form $\mathcal{F}$

$$F = \big(H_1'(u) \mid u \in U^{i-1}\big)\,,$$

wobei $H_1'(u)$ jeweils ein zu H_1' isomorpher Untergraph von $G_2(u)$ sei. $H_1'(u)$
(Salopp formuliert: $\mathcal{F}$ ist die Gesamtheit aller Möglichkeiten, gleichzeitig aus jedem $G_2(u)$ genau eine induzierte Kopie von H_1' auszuwählen.) Für jedes $F \in \mathcal{F}$ fügen wir zu $\tilde{G}^{i-1}$ eine neue Ecke $x(F)$ hinzu und verbinden $x(F)$
sie für jedes $u \in U^{i-1}$ mit allen Ecken von $H''_1(u)$ (Abb. 7.3.2); dabei bezeichne $H''_1(u)$ das Bild von H''_1 unter irgendeinem Isomorphismus $H''_1(u)$
von H_1' auf das durch F zu u gewählte $H_1'(u) \subseteq G_2(u)$. Den entstehenden Graphen bezeichnen wir mit G^i. Damit ist der Induktionsschritt in der G^i
Konstruktion der Graphen $G^0, \dots, G^n$ vollzogen.

Wir zeigen nun, dass $G := G^n$ die Behauptung aus $(*)$ erfüllt. Dazu beweisen wir die folgende Aussage $(**)$ über G^i für $i = 0, \dots, n$:

> *G^i enthält bei jeder Kantenfärbung mit den Farben 1 und 2 entweder einen Untergraphen H_1 der Farbe 1, oder einen Untergraphen H_2 der Farbe 2, oder einen Untergraphen H der Farbe 2, so dass $V(H) \subseteq V^i$ gilt und die Einschränkung von f^i auf $V(H)$ ein Isomorphismus ist zwischen H und $G^0[W_k']$ für ein $k \in \{i, \dots, n-1\}$.* $(**)$

Da für $i = n$ der dritte der genannten Fälle nicht eintreten kann, ist $(**)$ für n äquivalent zu $(*)$ mit $G := G^n$.

Für $i = 0$ folgt $(**)$ aus der Wahl von G^0 als einer Kopie von $G_1 = G(H_1, H_2')$ und der Definition der Mengen W_k'. Wir nehmen daher $1 \leqslant i \leqslant n$ an, und setzen $(**)$ für kleinere Werte von i als gültig voraus.

Sei also eine Kantenfärbung von G^i gegeben. Für jedes $u \in U^{i-1}$ enthält G^i eine Kopie von G_2:

$$G^i \supseteq G_2(u) \simeq G(H_1', H_2)\,.$$

Hat $G_2(u)$ für irgendein $u \in U^{i-1}$ einen zu H_2 isomorphen Untergraphen der Farbe 2, so sind wir fertig. Wenn nicht, so hat jedes $G_2(u)$ einen zu H_1' isomorphen Untergraphen $H_1'(u)$ der Farbe 1. Es sei F die Familie dieser Graphen $H_1'(u)$, einem für jedes $u \in U^{i-1}$, und es sei $x := x(F)$. x
Existiert ein $u \in U^{i-1}$, für das alle x–$H''_1(u)$-Kanten in G^i die Farbe 1 tragen, so haben wir einen H_1 der Farbe 1 in G^i und sind wiederum fertig. Wir nehmen daher an, dass jedes $H''_1(u)$ eine Ecke y_u enthält, y_u
für die die Kante xy_u die Farbe 2 trägt. Die Einschränkung $y_u \mapsto u$ von f auf

$$\hat{U}^{i-1} := \{\, y_u \mid u \in U^{i-1} \,\} \subseteq V^i \qquad \hat{U}^{i-1}$$

ist nun fortsetzbar durch $(v, \emptyset) \mapsto v$ zu einem Isomorphismus von

$\hat{G}^{i-1}$

$$\hat{G}^{i-1} := G^i \Big[\hat{U}^{i-1} \cup \big\{(v, \emptyset) \mid v \in V(G^{i-1}) \setminus U^{i-1}\big\} \Big]$$

nach G^{i-1}. Unsere Kantenfärbung von G^i induziert dadurch eine Kantenfärbung von G^{i-1}. Enthält G^{i-1} darin einen zu H_1 isomorphen Untergraphen der Farbe 1 oder einen zu H_2 isomorphen Untergraphen der Farbe 2, so haben wir entsprechende Untergraphen in $\hat{G}^{i-1} \subseteq G^i$ und sind wieder fertig.

Nach $(**)$ für $i-1$ dürfen wir daher annehmen, dass G^{i-1} einen H' Untergraphen H' der Farbe 2 hat, mit $V(H') \subseteq V^{i-1}$ und so, dass die Einschränkung von f^{i-1} auf $V(H')$ ein Isomorphismus von H' nach $\hat{H}'$ $G^0[W'_k] \simeq H'_2$ ist für ein $k \in \{i-1, \dots, n-1\}$. Es sei $\hat{H}'$ der H' entsprechende – und daher ebenfalls mit der Farbe 2 gefärbte – Untergraph von $\hat{G}^{i-1} \subseteq G^i$. Dann ist $V(\hat{H}') \subseteq V^i$, es gilt

$$f^i(V(\hat{H}')) = f^{i-1}(V(H')) = W'_k\,,$$

und $f^i \colon \hat{H}' \to G^0[W'_k]$ ist ein Isomorphismus.

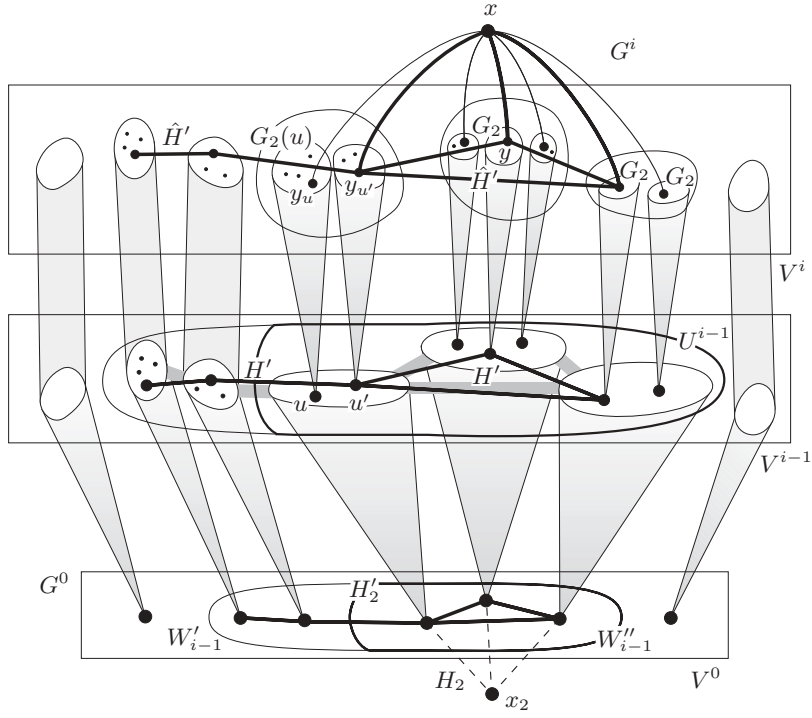


Abb. 7.3.3. Ein einfarbiges H_2 in G^i

Ist $k \geqslant i$, so setzen wir $H := \hat{H}'$ in $(**)$ und sind fertig. Betrachten wir somit den Fall $k < i$, also $k = i-1$ (Abb. 7.3.3). Nach Definition von U^{i-1} und $\hat{G}^{i-1}$ ist das Urbild von W''_{i-1} unter dem Isomorphismus $f^i\colon \hat{H}' \to G^0[W'_{i-1}]$ eine Teilmenge von $\hat{U}^{i-1}$. Da x zu allen Ecken von $\hat{U}^{i-1}$ durch eine Kante der Farbe 2 verbunden ist, spannen $\hat{H}'$ und x in G^i zusammen eine Kopie von H_2 der Farbe 2 auf, und der Beweis von $(**)$ ist vollendet.

Damit ist unser erster Beweis von Satz 7.3.1 vollständig. □

Kehren wir noch einmal zurück zu der am Anfang dieses Abschnitts betrachteten Umformulierung des Satzes von Ramsey: zu jedem Graphen H gibt es einen Graphen G, so dass G bei jeder Kantenfärbung mit zwei Farben eine einfarbiges Exemplar von H als Teilgraphen enthält. Der Graph G, für den diese Aussage sofort aus dem Satz von Ramsey folgt, ist ein vollständiger Graph hinreichend großer Ordnung. Verlangen wir jedoch, dass G keine größeren vollständigen Teilgraphen enthalten soll als H, so erhalten wir wiederum ein nicht triviales Problem – selbst wenn wir nicht fordern, dass H in G induziert sei.

Unser zweiter Beweis von Satz 7.3.1 löst dieses Problem nebenbei mit: der Graph G, den wir konstruieren, wird die gleiche Cliquenzahl haben wie der vorgegebene Graph H.

Für diesen Beweis, also den Rest dieses Abschnitts, fassen wir einen bipartiten Graphen P stets als Tripel (V_1, V_2, E) auf, wobei V_1 und V_2 seine beiden Eckenmengen sind und $E \subseteq V_1 \times V_2$ seine Kantenmenge. Der Grund hierfür ist, dass Einbettungen bipartiter Graphen ineinander stets mit ihren Eckenpartitionen verträglich sein sollen. Genauer: ist $P' = (V'_1, V'_2, E')$ ein weiterer bipartiter Graph, so heißt eine injektive Abbildung $\varphi\colon V_1 \cup V_2 \to V'_1 \cup V'_2$ eine *Einbettung* von P in P', wenn $\varphi(V_i) \subseteq V'_i$ ist für $i = 1, 2$ und $\varphi(v_1)\varphi(v_2)$ genau dann eine Kante von P' ist, wenn v_1v_2 eine Kante von P ist. (Einbettungen seien also stets „induziert“.) Statt $\varphi\colon V_1 \cup V_2 \to V'_1 \cup V'_2$ schreiben wir informell dann auch $\varphi\colon P \to P'$.

bipartit

Einbettung $P \to P'$

Wir brauchen zwei Lemmas.

Lemma 7.3.2. *Jeder bipartite Graph ist in einen bipartiten Graphen der Form* $(X, [X]^k, F)$ *mit* $F = \{\, xY \mid x \in Y \,\}$ *einbettbar.*

Beweis. Es sei $P = (\{a_1, \dots, a_n\}, \{b_1, \dots, b_m\}, E)$ ein beliebiger bipartiter Graph. Wir wählen eine Menge X mit $2n + m$ Elementen, etwa

$$X = \{x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_m\},$$

und definieren eine Einbettung $\varphi\colon P \to (X, [X]^{n+1}, F)$ wie folgt. Zunächst setzen wir $\varphi(a_i) := x_i$ für alle $i = 1, \dots, n$. Als Bild für eine Ecke

b_i eignen sich nun all die Ecken $Y \in [X]^{n+1}$, die zu den Bildern genau der Nachbarn von b_i benachbart sind, die also

$$Y \cap \{x_1, \dots, x_n\} = \varphi(N_P(b_i)) \tag{1}$$

erfüllen. Wegen $|Y| = n+1$ gibt es verschiedene solche Y. Da verschiedene Ecken b_i, b_j in P die gleiche Nachbarschaft haben können aber auf verschiedene Ecken Y abgebildet werden sollen, geben wir dem Bild Y von b_i außer den Ecken gemäß (1) noch die Ecke z_i als Element, sozusagen als Index. Damit gilt dann $\varphi(b_i) \neq \varphi(b_j)$ für $i \neq j$. Als letztes füllen wir jedes $Y = \varphi(b_i)$ noch mit beliebigen Elementen y_j auf, bis $|Y| = n+1$ gilt. □

Unser zweites Lemma hat bereits den bipartiten Fall von Satz 7.3.1 zum Inhalt: jeder bipartite Graph hat einen Ramseygraphen.

Lemma 7.3.3. *Zu jedem bipartiten Graphen P existiert ein bipartiter Graph P' mit der Eigenschaft, dass zu jeder 2-Färbung der Kanten von P' eine Einbettung $\varphi\colon P \to P'$ existiert, für die alle Kanten von $\varphi(P)$ gleich gefärbt sind.*

(7.1.4) *Beweis.* Mit Lemma 7.3.2 dürfen wir annehmen, dass P die Form P, X, k, F $(X, [X]^k, F)$ hat mit $F = \{\, xY \mid x \in Y \,\}$. Wir zeigen die Behauptung für P', X', k' den Graphen $P' := (X', [X']^{k'}, F')$, wobei $k' := 2k-1$ ist, X' beliebig mit

$$|X'| = R\left(k',\, 2\tbinom{k'}{k},\, k\,|X| + k - 1\right),$$

(dies ist die nach Satz 7.1.4 definierte Ramseyzahl) und

F'
$$F' := \{\, x'Y' \mid x' \in Y' \,\}.$$

α, β Färben wir also die Kanten von P' beliebig mit zwei Farben α und β. Von den $|Y'| = 2k-1$ mit einer Ecke $Y' \in [X']^{k'}$ inzidenten Kanten haben stets mindestens k die gleiche Farbe. Für jedes Y' können wir daher fest Z' ein $Z' \subseteq Y'$ mit $|Z'| = k$ so wählen, dass alle Kanten $x'Y'$ mit $x' \in Z'$ *assoziiert* gleichfarbig sind; diese Farbe nennen wir mit Y' *assoziiert*.

Die Mengen Z' können „auf $\binom{k'}{k}$ Weisen“ in ihren Obermengen Y' liegen. Um dies zu präzisieren, denken wir uns X' linear geordnet. Zu jedem $Y' \in [X']^{k'}$ gibt es dann eine eindeutig bestimmte ordnungserhal- $\sigma_{Y'}$ tende Bijektion $\sigma_{Y'}\colon Y' \to \{1, \dots, k'\}$, und unter $\sigma_{Y'}$ kann Z' genau $\binom{k'}{k}$ mögliche Bilder haben.

Wir färben nun $[X']^{k'}$ mit den $2\binom{k'}{k}$ Elementen der Menge

$$[\{1, \dots, k'\}]^k \times \{\alpha, \beta\}$$

als Farben, wie folgt: jedes $Y' \in [X']^{k'}$ erhält als Farbe das Paar $(\sigma_{Y'}(Z'), \gamma)$, wobei γ die mit Y' assoziierte Farbe α oder β ist. Nach

unserer Wahl von $|X'|$ als die Ramseyzahl mit Parametern k', $2\binom{k'}{k}$ und $k|X|+k-1$ hat X' eine einfarbige Teilmenge W der Mächtigkeit $k|X|+k-1$. Alle Z' mit $Y' \subseteq W$ liegen somit „gleich“ in ihrem Y', d.h. es gibt ein $S \in [\{1,\dots,k'\}]^k$ mit $\sigma_{Y'}(Z') = S$ für alle $Y' \in [W]^{k'}$, und alle $Y' \in [W]^{k'}$ sind mit der gleichen Farbe assoziiert, sagen wir mit α. W α

Wir konstruieren jetzt die gesuchte Einbettung φ von P in P'. Zunächst definieren wir φ auf $X =: \{x_1,\dots,x_n\}$. Wir wählen $\varphi(x_i) =: w_i \in W$ so, dass für $i<j$ stets $w_i < w_j$ gilt, in unserer Ordnung auf X'. Weiter gebe es in W jeweils genau $k-1$ Elemente u mit $u<w_1$, mit $w_i < u < w_{i+1}$ für $i=1,\dots,n-1$, und mit $w_n < u$. Dass wir φ so wählen können, folgt aus $|W| = kn+k-1$ (Abb. 7.3.4). $\varphi|_X$ $x_1,\dots,x_n$ $w_1,\dots,w_n$

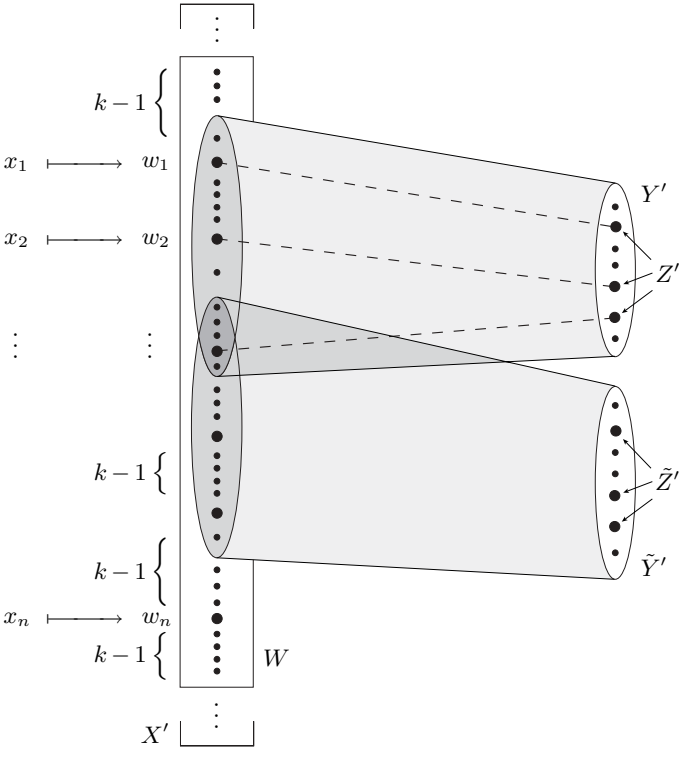


Abb. 7.3.4. Der Graph aus Lemma 7.3.3

Nun definieren wir φ auf $[X]^k$. Ist $Y \in [X]^k$ gegeben, so möchten wir $\varphi(Y) =: Y' \in [X']^{k'}$ so wählen, dass Y' unter den Ecken aus $\varphi(X)$ genau zu den Bildern der Nachbarn von Y benachbart ist, also zu den k Ecken $\varphi(x)$ mit $x \in Y$, und dass alle diese mit Y' inzidenten Kanten die Farbe α tragen. Dies ist jedoch nicht schwer: wir wählen zunächst Z' als $\{\,\varphi(x) \mid x \in Y\,\}$ (dies sind k Ecken des Typs w_i) und füllen dann Z' so durch $k'-k$ Ecken $u \in W \setminus \varphi(X)$ zu einer Menge $Y' \in [W]^{k'}$ auf, $\varphi|_{[X]^k}$ Z'

dass Z' richtig in Y' liegt, dass also $\sigma_{Y'}(Z') = S$ gilt. Dies ist deshalb möglich, weil zwischen je zwei Ecken w_i genügend viele Ecken u liegen, nämlich $k-1 = k'-k$ viele. Damit ist

$$Y' \cap \varphi(X) = Z' = \{\, \varphi(x) \mid x \in Y \,\},$$

d.h. Y' hat unter den Ecken in $\varphi(X)$ genau die richtigen Nachbarn, und alle Kanten von Y' zu diesen Nachbarn sind mit α gefärbt (da die Nachbarn in Z' liegen und Y' mit α assoziiert ist). Schließlich ist φ injektiv auf $[X]^k$: für verschiedene Ecken Y sind ihre Bilder, die Mengen Y', verschieden, da ihre Schnitte mit $\varphi(X)$ verschieden sind. Die Abbildung φ ist also in der Tat eine Einbettung von P in P'. □

Zweiter Beweis von Satz 7.3.1. Es sei H wie im Satz gegeben und
r, n $n := R(2,2,r)$ die Ramseyzahl von $r := |H|$. Für jede 2-Kantenfärbung
K eines Graphen $K = K^n$ finden wir in K also ein einfarbiges H, wenn auch nicht notwendig induziert.

Wir beginnen mit der Konstruktion eines Graphen G^0, die wir zunächst informell beschreiben. Wir denken uns die Ecken von K senkrecht untereinander gezeichnet und ersetzen jede Ecke durch eine Zeile von $\binom{n}{r}$ Ecken. Jede Spalte von Ecken assoziieren wir mit einer der $\binom{n}{r}$ möglichen Eckenmengen eines $H \subseteq K$. In dieser Spalte fügen wir statt der ursprünglichen Kanten von K genau die Kanten dieser Kopie von H ein. Der entstandene Graph G^0 besteht dann aus $\binom{n}{r}$ disjunkten Kopien von H und $(n-r)\binom{n}{r}$ isolierten Ecken (Abb. 7.3.5).

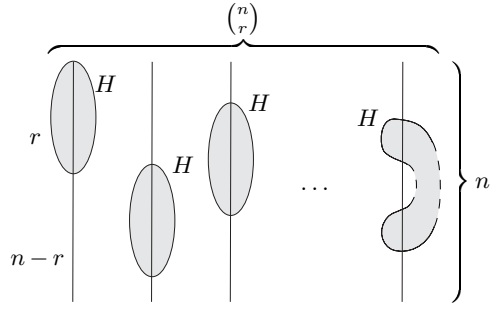


Abb. 7.3.5. Der Graph G^0

Um G^0 formal zu definieren, nehmen wir $V(K) = \{1, \dots, n\}$ an und wählen in K Kopien $H_1, \dots, H_{\binom{n}{r}}$ von H mit paarweise verschiedenen Eckenmengen. (Auf jeder Menge von r Ecken aus K haben wir damit

genau ein H_j fest gewählt.) Wir setzen dann

$$V(G^0) := \{\,(i,j) \mid i = 1,\dots,n;\ j = 1,\dots,\tbinom{n}{r}\,\}$$
$$E(G^0) := \bigcup_{j=1}^{\binom{n}{r}} \{\,(i,j)(i',j) \mid ii' \in E(H_j)\,\}\,. \qquad G^0$$

Die Idee des Beweises ist nun die folgende. Wir betten G^0 auf so viele Weisen induziert in einen großen Graphen G ein, dass bei jeder 2-Kantenfärbung von G für mindestens eines dieser $G^0 \subseteq G$ die Farben seiner Kanten nur davon abhängen, in welchen beiden Zeilen ihre Endecken liegen. Die Projektion dieses G^0 auf $\{1,\dots,n\}$ (durch Kontraktion seiner Zeilen) definiert dann eine 2-Kantenfärbung von K (ergibt die Kontraktion nicht alle Kanten von K, so färbe die fehlenden Kanten beliebig), zu der es nach Wahl von $n = |K|$ einen einfarbigen $K^r \subseteq K$ gibt. Das in diesem K^r liegende H_j liegt dann auch einfarbig in der j-ten Spalte unseres G^0, ist also auch Untergraph von G.

Wie finden wir einen solchen Graphen G? Durch iterierte Anwendung von Lemma 7.3.3, einmal für jeden der $m := \binom{n}{2}$ bipartiten Graphen $G^0[V_i^0 \cup V_{i'}^0]$, wobei m

$$V_i^0 := \{\,(i,j) \mid j = 1,\dots,\tbinom{n}{r}\,\} \qquad V_i^0$$

die i-te Zeile von G^0 ist ($i = 1,\dots,n$). Formal definieren wir induktiv eine Folge $G^0,\dots,G^m$ von n-partiten Graphen G^k und setzen am Ende $G := G^m$.

Dazu sei $e_1,\dots,e_m$ eine Aufzählung der Kanten von K. Angenommen, G^k sei für ein $k < m$ bereits definiert als ein n-partiter Graph mit Eckenmengen $V_1^k,\dots,V_n^k$. Es sei $e_{k+1} =: i_1 i_2$, und P sei der in G^k durch die Eckenmengen $V_{i_1}^k$ und $V_{i_2}^k$ induzierte bipartite Graph. Nach Lemma 7.3.3 hat P einen bipartiten Ramseygraphen $P' = (W_1, W_2, F)$. Wir möchten $G^{k+1} \supseteq P'$ so definieren, dass wir jede (einfarbige) Einbettung $P \to P'$ zu einer Einbettung $G^k \to G^{k+1}$ fortsetzen können, die jeweils die i-te Partitionsklasse von G^k in die i-te Partitionsklasse von G^{k+1} abbildet ($i = 1,\dots,n$). Dazu sei $\{\varphi_1,\dots,\varphi_q\}$ die Menge aller Einbettungen von P in P'. Wir setzen

e_k P P' W_1, W_2 q, φ_p

$$V(G^{k+1}) := V_1^{k+1} \cup \ldots \cup V_n^{k+1}\,,$$

wobei

$$V_i^{k+1} := \begin{cases} W_1 & \text{für } i = i_1; \\ W_2 & \text{für } i = i_2; \\ \bigcup_{p=1}^{q} (V_i^k \times \{p\}) & \text{für } i \notin \{i_1, i_2\}\,. \end{cases}$$

(Für $i \neq i_1, i_2$ besteht V_i^{k+1} also aus q disjunkten Kopien von V_i^k.) Die Kantenmenge von G^{k+1} definieren wir nun so, dass die natürlichen

Fortsetzungen der φ_p auf ganz $V(G^k)$ zu Einbettungen von G^k in G^{k+1} werden: für jedes $p = 1, \dots, q$ sei $\psi_p \colon V(G^k) \to V(G^{k+1})$ definiert vermöge ψ_p

$$\psi_p(v) := \begin{cases} \varphi_p(v) & \text{für } v \in P \\ (v,p) & \text{für } v \notin P, \end{cases}$$

und

$$E(G^{k+1}) := \bigcup_{p=1}^{q} \{\, \psi_p(v)\psi_p(v') \mid vv' \in E(G^k) \,\}.$$

Nach Konstruktion und Lemma 7.3.3 enthält G^{k+1} damit für jede 2-Kantenfärbung eine induzierte Kopie $\psi_p(G^k)$ von G^k, bei der alle Kanten aus P, d.h. alle Kanten zwischen der i_1-ten Zeile $V^k_{i_1}$ und der i_2-ten Zeile $V^k_{i_2}$, die gleiche Farbe haben: wir brauchen nur p so zu wählen, dass $\varphi_p(P)$ gerade die nach dem Lemma existierende einfarbige Kopie von P in P' ist.

Wir behaupten, dass $G := G^m$ dem Satz genügt. Färben wir also die Kanten von G^m mit zwei Farben. Nach der Konstruktion von G^m aus G^{m-1} finden wir in G^m eine induzierte Kopie von G^{m-1}, in der für $e_m = ii'$ alle Kanten zwischen der i-ten und der i'-ten Zeile gleichfarbig sind. In diesem G^{m-1} finden wir analog eine induzierte Kopie von G^{m-2}, in der auch für $ii' = e_{m-1}$ alle Kanten zwischen der i-ten und der i'-ten Zeile gleichfarbig sind. So fortfahrend gelangen wir schließlich zu einer Kopie von G^0, in der für jedes Paar (i, i') alle Kanten zwischen V^0_i und $V^0_{i'}$ gleichfarbig sind. Wie eingangs gezeigt, enthält G^0, und damit auch G, dann eine einfarbige Kopie H_j von H. □

7.4 Ramseysätze und Zusammenhang

Nach dem Satz von Ramsey enthält jeder hinreichend große Graph G einen ganz dichten oder einen ganz mageren Untergraphen vorgegebener Ordnung, einen K^r oder einen $\overline{K^r}$. Setzen wir G als zusammenhängend voraus, so können wir etwas mehr sagen:

Proposition 7.4.1. *Zu jedem $r \in \mathbb{N}$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft, dass jeder zusammenhängende Graph G mit mindestens n Ecken einen K^r, $K_{1,r}$ oder P^r als Untergraphen enthält.*

(0.3.3)

Beweis. Es sei $d+1$ die Ramseyzahl von r und $n \geqslant \frac{d}{d-2}(d-1)^r$. Hat G eine Ecke v vom Grad $\geqslant d+1$, so induziert nach Satz 7.1.1 entweder $N(v)$ einen K^r oder $\{v\} \cup N(v)$ einen $K_{1,r}$. Ist hingegen $\Delta(G) \leqslant d$, so hat G nach Proposition 0.3.3 einen Radius $> r$, enthält also sicher zwei Ecken vom Abstand $\geqslant r$. Da G zusammenhängend ist, sind diese Ecken durch einen induzierten Weg der Länge $\geqslant r$ verbunden. □

Im Prinzip könnte man nun für jedes $k \in \mathbb{N}$ nach einer entsprechenden Menge „unvermeidbarer“ k-zusammenhängender Unter- oder Teilgraphen fragen. Damit diese Mengen der Größe nach überschaubar bleiben, ist es sinnvoll, für größere k die Untergraphenrelation abzuschwächen – etwa zur Teilgraphenrelation, oder noch weiter zur topologischen oder gewöhnlichen Minorenrelation.

Für $k = 2$ etwa gibt es bereits unendlich viele unvermeidbare Typen 2-zusammenhängender Teilgraphen, aber nur zwei Typen unvermeidbarer topologischer Minoren:

Proposition 7.4.2. *Zu jedem $r \in \mathbb{N}$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft, dass jeder 2-zusammenhängende Graph mit mindestens n Ecken einen C^r oder $K_{2,r}$ als topologischen Minor enthält.*

Beweis. Es sei d das nach Proposition 7.4.1 zu r existierende n, und G ein 2-zusammenhängender Graph mit mindestens $\frac{d}{d-2}(d-1)^r$ Ecken. Nach Proposition 0.3.3 ist entweder $\operatorname{diam} G \geqslant \operatorname{rad} G > r$, oder G hat eine Ecke vom Grad $> d$. (0.3.3) (2.3.6)

Im ersten Fall seien $a, b \in G$ zwei Ecken vom Abstand $> r$. Nach dem Satz von Menger (2.3.6) enthält G zwei kreuzungsfreie a–b-Wege. Diese bilden einen Kreis der Länge $> r$.

Im zweiten Fall sei v eine Ecke vom Grad $> d$. Da G 2-zusammenhängend ist, ist $G - v$ zusammenhängend und enthält somit einen Spannbaum; es sei $T \subseteq G - v$ ein minimaler Baum, der alle Nachbarn von v enthält. Jedes Blatt von T ist dann ein Nachbar von v. Nach Wahl von d enthält T eine Ecke vom Grad $\geqslant r$ oder einen Weg der Länge $\geqslant r$, oBdA zwischen zwei Blättern. Ein solcher Weg ergibt zusammen mit v einen Kreis der Länge $\geqslant r$. Eine Ecke u vom Grad $\geqslant r$ in T ergibt zusammen mit v und geeigneten Verbindungswegen aus T einen $TK_{2,r}$. □

Ohne Beweis zitieren wir noch die entsprechenden Resultate für $k = 3$ und $k = 4$. Dazu schwächen wir die betrachtete Relation noch einmal ab, zur gewöhnlichen Minorenrelation. Beachte, dass die in den Sätzen 7.4.3 und 7.4.4 aufgeführten Graphen jeweils selbst 3- bzw. 4-zusammenhängend sind.

Satz 7.4.3. (Oporowski, Oxley & Thomas 1993)
Zu jedem $r \in \mathbb{N}$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft, dass jeder 3-zusammenhängende Graph mit mindestens n Ecken ein Rad der Ordnung r oder einen $K_{3,r}$ als Minor enthält.

Wir bezeichnen einen Graphen der Form $C^n * \overline{K^2}$ ($n \geqslant 4$) als *Doppelrad*, das 1-Skelett einer Triangulierung des Zylinders wie in Abb. 7.4.1 als *Krone*, und das 1-Skelett einer Triangulierung des Möbiusbandes wie in Abb. 7.4.1 als *Möbiuskrone*.

Satz 7.4.4. (Oporowski, Oxley & Thomas 1993)
Zu jedem $r \in \mathbb{N}$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft, dass jeder 4-zusammenhängende Graph mit mindestens n Ecken ein Doppelrad, eine Krone, eine Möbiuskrone, oder einen $K_{4,s}$ mit jeweils mindestens r Ecken als Minor enthält.

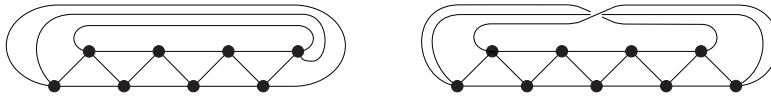


Abb. 7.4.1. Eine Krone und eine Möbiuskrone

Abschließend zeigen wir jetzt noch, dass die in den obigen vier Sätzen auftretenden Minimalstrukturen keineswegs willkürlich gewählt sind: vielmehr sind sie in einem leicht präzisierbaren Sinne eindeutig bestimmt.

nicht-triviale Eigenschaft

Dazu heiße eine Grapheneigenschaft *nicht-trivial*, wenn sie unendlich viele paarweise nicht isomorphe Graphen enthält. Sind $\mathcal{P}, \mathcal{P}'$ zwei nicht-triviale Eigenschaften, und ist $\leqslant$ eine Ordnungsrelation zwischen Graphen (z.B. die Teilgraphenrelation $\subseteq$, oder die Minorenrelation $\preccurlyeq$),

$\leqslant$

so schreiben wir $\mathcal{P} \leqslant \mathcal{P}'$, wenn es zu jedem $G \in \mathcal{P}$ ein $G' \in \mathcal{P}'$ gibt mit $G \leqslant G'$. Gilt sowohl $\mathcal{P} \leqslant \mathcal{P}'$ als auch $\mathcal{P} \geqslant \mathcal{P}'$, so nennen wir $\mathcal{P}$ und $\mathcal{P}'$

$\sim$

äquivalent und schreiben $\mathcal{P} \sim \mathcal{P}'$. Ist also beispielspielsweise $\mathcal{P}$ die Klasse aller Wege, $\mathcal{P}'$ die Klasse aller Wege gerader Länge, und $\mathcal{S}$ die Klasse beliebig unterteilter Sterne, so haben wir $\mathcal{P} \sim \mathcal{P}' \leqslant \mathcal{S} \not\leqslant \mathcal{P}$ bezüglich der Teilgraphenrelation.

Kuratowski-menge

Ist $\mathcal{C}$ eine Klasse nicht-trivialer Grapheneigenschaften, so nennen wir eine endliche Menge $\{\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_k\} \subseteq \mathcal{C}$ eine *Kuratowskimenge* für $\mathcal{C}$ (bezüglich $\leqslant$), wenn die $\mathcal{P}_i$ paarweise unvergleichbar sind (d.h. für $i \neq j$ stets $\mathcal{P}_i \not\leqslant \mathcal{P}_j$ gilt) und es zu jedem $\mathcal{P} \in \mathcal{C}$ ein i gibt mit $\mathcal{P}_i \leqslant \mathcal{P}$. Jede solche Kuratowskimenge $\{\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_k\}$ ist eindeutig bestimmt bis auf Äquivalenz: ist $\{\mathcal{Q}_1, \dots, \mathcal{Q}_\ell\}$ eine weitere Kuratowskimenge für $\mathcal{C}$, so gilt $\ell = k$ und, bei geeigneter Aufzählung, $\mathcal{Q}_i \sim \mathcal{P}_i$ für alle i. (Warum?)

Den wesentlichen Kern unserer vier obigen Sätze können wir nun wie folgt zusammenfassen. Als $\mathcal{C}$ betrachten wir, nacheinander für $k = 1, \dots, 4$, die Klasse aller nicht-trivialen Eigenschaften k-zusammenhängender Graphen.

Satz 7.4.5.

(i) *Die Sterne und die Wege bilden bezüglich der Teilgraphenrelation eine (zweielementige) Kuratowskimenge für die nicht-trivialen Eigenschaften zusammenhängender Graphen.*

(ii) *Die Kreise und die Graphen $K_{2,r}$ ($r \in \mathbb{N}$) bilden bezüglich der topologischen Minorenrelation eine (zweielementige) Kuratowskimenge für die nicht-trivialen Eigenschaften 2-zusammenhängender Graphen.*

(iii) *Die Räder und die Graphen $K_{3,r}$ ($r \in \mathbb{N}$) bilden bezüglich der Minorenrelation eine (zweielementige) Kuratowskimenge für die nicht-trivialen Eigenschaften 3-zusammenhängender Graphen.*

(iv) *Die Doppelräder, die Kronen, die Möbiuskronen und die Graphen $K_{4,r}$ ($r \in \mathbb{N}$) bilden bezüglich der Minorenrelation eine (vierelementige) Kuratowskimenge für die nicht-trivialen Eigenschaften 4-zusammenhängender Graphen.* □

Übungen

1.$^-$ Bestimme die Ramseyzahl von 3.

2.$^-$ Beweise den Fall $k = 2$ (aber c beliebig) von Satz 7.1.4 durch bloße Anwendung von Satz 7.1.1.

3. Kann man die exponentielle obere Schranke für die Ramseyzahl $R(n)$ für perfekte Graphen deutlich verbessern?

4.$^+$ Zeige, dass ein Graph auf $\mathbb{R}$ weder einen vollständigen noch einen kantenlosen Untergraphen auf $|\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$ Ecken zu haben braucht. (Der Satz von Ramsey ist also nicht auf überabzählbare Mengen verallgemeinerbar.)

5.$^+$ Beweise die Kantenversion des Satzes von Erdős und Pósa (1.3.2): es existiert eine Funktion $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, für die zu jedem $k \in \mathbb{N}$ jeder Graph entweder k kantendisjunkte Kreise enthält oder eine Menge von höchstens $g(k)$ Kanten, die alle Kreise des Graphen überdeckt.

(Tip: Betrachte in jeder Komponente einen normalen Spannbaum T. Gibt es genügend viele Fundamentalkreise, deren Wege im Spannbaum sich in ähnlicher Weise schneiden, so können wir daraus k kantendisjunkte Kreise bilden.)

6.$^+$ Zeige mit dem Satz von Ramsey, dass es zu $k, \ell \in \mathbb{N}$ stets ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, so dass jede Folge von n verschiedenen ganzen Zahlen eine aufsteigende Teilfolge der Länge $k+1$ oder eine absteigende Teilfolge der Länge $\ell+1$ enthält. Finde ein Beispiel, das $n > k\ell$ zeigt. Beweise dann den Satz von Erdős & Szekeres, dass $n > k\ell$ auch ausreicht.

7. Skizziere einen Beweis des folgenden Satzes von Erdős und Szekeres: zu jedem $k \in \mathbb{N}$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so dass aus n Punkten der Ebene, von denen keine drei kollinear sind, stets k Punkte auswählbar sind, die ein konvexes Polygon aufspannen (d.h. von denen keiner in der konvexen Hülle der übrigen liegt).

8. Beweise den folgenden Satz von Schur: zu jedem $k \in \mathbb{N}$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so dass für jede Partition von $\{1, \dots, n\}$ in k Teilmengen in mindestens einer dieser Teilmengen Zahlen x, y, z mit $x + y = z$ existieren.

9. Es sei $(X, \leqslant)$ eine vollständig geordnete Menge, und $G = (V, E)$ der Graph auf $V := [X]^2$ mit $E := \{ (x,y)(x',y') \mid x < y = x' < y' \}$.
   (i) Zeige, dass G kein Dreieck enthält.
   (ii) Zeige, dass $\chi(G)$ beliebig groß wird, wenn nur $|X|$ groß genug ist.

10. Eine Mengenfamilie heißt ein Δ-System, wenn je zwei dieser Mengen den gleichen Durchschnitt haben. Zeige, dass jede unendliche Familie von Mengen gleicher endlicher Kardinalität ein unendliches Δ-System enthält.

11. Zeige mit Hilfe des Unendlichkeitslemmas, dass ein abzählbar unendlicher Graph mit $k \in \mathbb{N}$ Farben eckenfärbbar ist (im Sinne von Kapitel 4), wenn all seine endlichen Teilgraphen es sind.

12. Es seien $m, n \in \mathbb{N}$, und $m-1$ sei ein Teiler von $n-1$. Zeige, dass für jeden Baum T mit m Ecken gilt: $R(T, K_{1,n}) = m+n-1$.

13. Beweise für jedes $c \in \mathbb{N}$ die Abschätzung $2^c < R(2, c, 3) \leqslant 3c!$.
   (Tip: Induktion nach c.)

14.$^-$ Leite die Aussage $(*)$ aus dem ersten Beweis von Satz 7.3.1 aus der Aussage des Satzes her (d.h. zeige, dass $(*)$ nur formal stärker ist als der Satz selbst).

15. Zeige, dass es zu je zwei Graphen H_1, H_2 einen Graphen $G = G(H_1, H_2)$ gibt mit der Eigenschaft, dass G zu jeder *Ecken*färbung mit den Farben 1 und 2 einen induzierten H_1 der Farbe 1 oder einen induzierten H_2 der Farbe 2 enthält.

16. Zeige, dass der im zweiten Beweis von Satz 7.3.1 konstruierte Ramseygraph G für H in der Tat $\omega(G) = \omega(H)$ erfüllt.

17. Zeige, dass jeder unendliche zusammenhängende Graph einen unendlichen Weg oder einen unendlichen Stern enthält.

18.$^-$ Zeige, dass eine Kuratowskimenge $\{\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_k\}$ einer gegebenen Klasse $\mathcal{C}$ nicht-trivialer Grapheneigenschaften stets bis auf Äquivalenz eindeutig bestimmt ist.

19. Leite Satz 7.4.5 (ii) aus Proposition 7.4.2 her und umgekehrt.

Notizen

Die grundlegenden Ramseysätze aus Abschnitt 7.1 finden sich in F.P. Ramsey, On a problem of formal logic, *Proc. Lond. Math. Soc.* **30** (1930), 264–286. Eine Einführung in allgemeine Ramseytheorie (und weitere Literaturhinweise) gibt R.L. Graham, B.L. Rothschild & J.H. Spencer, *Ramsey Theory*, 2. Aufl., Wiley 1990, einen neueren Überblick das Kapitel von J. Nešetřil im *Handbook of Combinatorics* (R.L. Graham, M. Grötschel & L. Lovász, Hrsg.), North-Holland 1995. Die Ramseytheorie unendlicher Mengen ist ein wesentlicher Teil der sogenannten kombinatorischen Mengenlehre, ausführlich dargestellt

in P. Erdős, A. Hajnal, A. Máté & R. Rado, *Combinatorial Set Theory*, North-Holland 1984. Auch das Kapitel über Ramseytheorie in B. Bollobás, *Graph Theory*, Springer-Verlag 1979, ist nicht beschränkt auf Graphen: es enthält überdies eine anregende Auswahl von Sätzen aus der algebraischen, geometrischen und mengentopologischen Ramseytheorie.

Das Unendlichkeitslemma findet sich im Klassiker der Graphentheorie, D. Königs *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen*, Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig 1936. Seine Verwendung nennt man etwas mysteriös einen *Kompaktheitsschluss*. Wie bei der hier dargestellten Anwendung des Lemmas schließt man dabei stets aus einer Eigenschaft aller endlichen Teile einer Struktur auf die gleiche Eigenschaft für die gesamte Struktur. Klassisches Beispiel einer solchen Eigenschaft ist die Eckenfärbbarkeit von Graphen mit einer gegebenen endlichen Anzahl von Farben: ist jeder endliche Teilgraph eines Graphen k-färbbar, so auch der Graph selbst. Mehr dazu, sowie eine Auflösung des Rätsels, was all dies mit Kompaktheit zu tun hat, findet sich in der englischen Ausgabe dieses Buchs ab der dritten Auflage (die ein eigenes Kapitel über unendliche Graphen enthält.)

Die obere Schranke für die Ramseyzahlen von Graphen beschränkten Maximalgrades, Satz 7.2.2, stammt aus V. Chvátal, V. Rödl, E. Szemerédi & W.T. Trotter, The Ramsey number of a graph with bounded maximum degree, *J. Comb. Theory B* **34** (1983), 239–243. Unser Beweis folgt dem Übersichtsartikel von J. Komlós & M. Simonovits, Szemerédi's Regularity Lemma and its applications in graph theory, in (D. Miklos, V.T. Sós und T. Szőnyi, Hrsg.) *Paul Erdős is 80*, Proc. Colloq. Math. Soc. János Bolyai (1994). Die Aussage des Satzes ist eine Abschwächung einer Vermutung von Burr und Erdős (1975), dass sogar die Graphen mit beschränktem *Durchschnitts*grad in allen Teilgraphen lineare Ramseyzahlen haben: zu jedem $d \in \mathbb{N}$, so die Vermutung, gibt es eine Konstante c so dass $R(H) \leqslant c\,|H|$ für alle Graphen H mit $d(H') \leqslant d$ für alle $H' \subseteq H$. Näherungsweise wurde dies bewiesen von Kostochka & Sudakov, On Ramsey numbers of sparse graphs, *Comb. Probab. Comput.* **12** (2003), 627–641; sie zeigten, dass $R(H) \leqslant |H|^{1+o(1)}$.

Unser erster Beweis von Satz 7.3.1 basiert auf W. Deuber, A generalization of Ramsey's theorem, in (A. Hajnal et al., Hrsg.): *Infinite and finite sets*, North-Holland 1975. Der gleiche Band erhält auch den Beweis von Erdős, Hajnal und Pósa. Rödl bewies den Satz in seiner Diplomarbeit 1973 an der Prager Karlsuniversität. Unser zweiter Beweis des Satzes, in dem auch die Cliquenzahl des gegebenen Graphen H bewahrt wird, ist aus J. Nešetřil & V. Rödl, A short proof of the existence of restricted Ramsey graphs by means of a partite construction, *Combinatorica* **1** (1981), 199–202.

Die Sätze 7.4.3 und 7.4.4 sind aus B. Oporowski, J. Oxley & R. Thomas, Typical subgraphs of 3- and 4-connected graphs, *J. Comb. Theory B* **57** (1993), 239–257. Für $k \geqslant 5$ sind bislang keine entsprechenden Resultate bekannt.

8 Hamiltonkreise

In Kapitel 0.8 haben wir kurz das Problem der Existenz eines eulerschen Kantenzugs in einem Graphen G behandelt; der einfache Satz 0.8.1 löste dieses Problem durchaus befriedigend. Fragen wir nach einem geschlossenen Kantenzug in G, der nicht unbedingt jede Kante, statt dessen aber jede Ecke von G genau einmal enthält, so wird das entsprechende Existenzproblem wesentlich schwieriger. Ist $|G| \geqslant 3$, so ist ein solcher Kantenzug offenbar ein Kreis; man nennt ihn einen *Hamiltonkreis* von G. (Ein Weg in G, der alle Ecken von G enthält, ist ein *Hamiltonweg*.) Ein Graph, der einen Hamiltonkreis enthält, heißt *hamiltonsch*.

Hamiltonkreis

Hamiltonweg

Eine gute Charakterisierung der Graphen, die einen Hamiltonkreis enthalten, ist nicht bekannt.[1] Wir werden in diesem Kapitel zunächst die bekanntesten hinreichenden Kriterien zur Existenz von Hamiltonkreisen zusammenstellen (Abschnitte 8.1 und 8.2) und dann ein schönes tieferliegendes Ergebnis beweisen: den Satz von Fleischner, dass das „Quadrat" eines 2-zusammenhängenden Graphen stets einen Hamiltonkreis enthält (Abschnitt 8.3). Der Beweis dieses Satzes ist etwas länger, aber nicht schwierig.

8.1 Einfache hinreichende Bedingungen

Welche Bedingungen an einen Graphen G könnten die Existenz eines Hamiltonkreises in G zur Folge haben? Globale Annahmen, etwa eine hohe Kantendichte, werden kaum ausreichen: jede hinreichende Bedingung muss zumindest sicherstellen, dass von jeder einzelnen Ecke von G zwei Kanten zum Rest von G führen. Doch auch hoher Minimalgrad,

[1] ... und existiert vielleicht auch gar nicht. Mehr dazu in den Notizen am Kapitelende.

absolut gesehen, reicht nicht aus: wie man sich leicht überlegt, existiert zu jedem $d \in \mathbb{N}$ ein Graph mit Minimalgrad $\geqslant d$ ohne Hamiltonkreis.

Vor diesem Hintergrund gewinnt der folgende Satz, der Klassiker der Theorie der Hamiltonkreise, seine Bedeutung.

Satz 8.1.1. (Dirac 1952)
Ist G ein Graph mit $n \geqslant 3$ Ecken und Minimalgrad $\delta(G) \geqslant n/2$, so hat G einen Hamiltonkreis.

Beweis. Wir bemerken zunächst, dass G zusammenhängend ist: der Grad einer Ecke in der kleinsten Komponente C von G wäre sonst kleiner als $|C| \leqslant n/2$.

Es sei nun $P = x_0 \dots x_k$ ein längster Weg in G. Wegen der Maximalität von P liegen alle Nachbarn von x_0 und alle Nachbarn von x_k auf P. Mindestens $n/2$ der weniger als n Ecken $x_0, \dots, x_{k-1}$ sind also ein Vorgänger auf P eines Nachbarn von x_0, und mindestens $n/2$ dieser Ecken sind ein Nachbar von x_k. Nach dem Schubfachprinzip hat eine dieser Ecken beide Eigenschaften: es existiert ein $i < k$ mit $x_0x_{i+1} \in E(G)$ und $x_ix_k \in E(G)$ (Abb. 8.1.1).

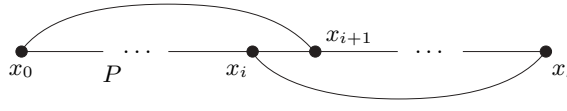


Abb. 8.1.1. Zum Beweis von Satz 8.1.1

Damit ist $C := x_0x_{i+1}Px_kx_iPx_0$ ein Kreis auf $V(P)$. Wegen der Maximalität von $|P|$ ist C sogar ein Hamiltonkreis in G: da G zusammenhängend ist, hätte C sonst einen Nachbarn in $G - C$, der zusammen mit einem geeigneten Teilweg von C einen längeren Weg als P ergäbe. □

Die Gradbedingung in Satz 8.1.1 ist insofern bestmöglich, als wir die Schranke von $n/2$ nicht durch $\lfloor n/2 \rfloor$ ersetzen können: ist n ungerade und G die Vereinigung zweier $K^{\lceil n/2 \rceil}$ mit genau einer gemeinsamen Ecke, so ist $\delta(G) = \lfloor n/2 \rfloor$ aber $\kappa(G) = 1$, d.h. G kann keinen Hamiltonkreis enthalten. Der hohe Wert von δ ist somit allein schon nötig, um 2-Zusammenhang zu sichern – eine Bedingung, die so offensichtlich notwendig für die Existenz eines Hamiltonkreises ist wie ein Minimalgrad von mindestens 2.

Könnte dann vielleicht hinreichend hoher (konstanter) Zusammenhang einen Hamiltonkreis erzwingen? Leider auch nicht: jeder (nicht zu kleine) k-zusammenhängende Graph enthält zwar einen Kreis der Länge mindestens $2k$ (Übung 15, Kap. 2), doch zeigen die Graphen $K_{k,n}$, dass dies bereits bestmöglich ist.

Etwas allgemeiner ausgedrückt: enthält G einen Trenner S aus k Ecken, für den $G - S$ mehr als k Komponenten hat, so hat G sicher keinen Hamiltonkreis. Enthalten dann zumindest auch umgekehrt alle Graphen ohne Hamiltonkreis einen relativ kleinen Trenner, der sie in viele Komponenten zerlegt? Dies ist in der Tat eine tiefgehende Frage, auf die wir nach der nächsten Proposition zurückkommen wollen.

Zunächst halten wir lediglich fest, dass all solche Graphen auch relativ große unabhängige Eckenmengen haben: nimmt man aus jeder Komponente von $G - S$ eine beliebige Ecke, so hat man schon mindestens $k + 1$ unabhängige Ecken. Können wir vielleicht durch ein Verbot großer unabhängiger Eckenmengen einen Hamiltonkreis erzwingen?

Für sich allein genommen erzwingt die Annahme von $\alpha(G) \leqslant k$ zwar einen Kreis der Länge mindestens $|G|/k$ (Übung 14, Kap. 4), nicht jedoch einen Hamiltonkreis. Zusammen mit der Voraussetzung von k-Zusammenhang jedoch reicht diese Annahme tatsächlich:

Proposition 8.1.2. *Jeder Graph G mit mindestens drei Ecken und $\kappa(G) \geqslant \alpha(G)$ enthält einen Hamiltonkreis.*

Beweis. Es sei $\kappa(G) =: k$, sowie C ein längster Kreis in G. Die Eckenmenge von C sei zyklisch durchnumeriert, etwa $V(C) = \{ v_i \mid i \in \mathbb{Z}_n \}$ mit $v_i v_{i+1} \in E(C)$ für alle $i \in \mathbb{Z}_n$. Ist C kein Hamiltonkreis, so wählen wir in G eine Ecke $v \in G - C$ und einen v–C-Fächer $\mathcal{F}$ maximaler Mächtigkeit. Nach dem Satz von Menger (2.3.4) ist (2.3.4)

$$|\mathcal{F}| \geqslant \min \{k, |C|\} . \tag{1}$$

Es sei $\{ v_i \mid i \in I \subseteq \mathbb{Z}_n \}$ die Menge aller Endecken auf C von Wegen aus $\mathcal{F}$, und zu $i \in I$ sei P_i der Weg aus $\mathcal{F}$ mit Endecke v_i. Wegen der Maximalität von $\mathcal{F}$ ist $v v_j \notin E(G)$ für alle $j \notin I$.

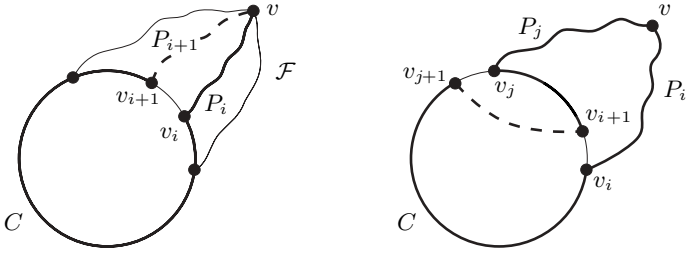


Abb. 8.1.2. Zwei längere Kreise als C

Offenbar gilt $i + 1 \notin I$ für jedes $i \in I$: anderenfalls wäre der Kreis $(C \cup P_i v P_{i+1}) - v_i v_{i+1}$ länger als C (Abb. 8.1.2 links). Damit ist insbesondere $|\mathcal{F}| < |C|$, und somit $|I| = |\mathcal{F}| \geqslant k$ nach (1). Für $i, j \in I$ gilt weiter $v_{i+1} v_{j+1} \notin E(G)$, da sonst $(C \cup P_i v P_j) + v_{i+1} v_{j+1} - v_i v_{i+1} - v_j v_{j+1}$

ein längerer Kreis als C wäre (Abb. 8.1.2 rechts). Damit ist $\{ v_{i+1} \mid i \in I \} \cup \{v\}$ eine Menge von mindestens $k+1$ unabhängigen Ecken in G, im Widerspruch zur Annahme. □

Kehren wir jetzt zu der Frage zurück, ob eine Annahme der Art, dass kein kleiner Eckentrenner unseren Graphen in viele Komponenten zerlegt, die Existenz eines Hamiltonkreises garantieren kann. Ein Graph G heiße *t-robust* (wobei $t > 0$ eine beliebige reelle Zahl sei), wenn für jeden Trenner $S \subseteq V(G)$ der Graph $G - S$ höchstens $|S|/t$ Komponenten hat. Offenbar ist jeder Graph mit Hamiltonkreis 1-robust. Und wie steht es mit der Umkehrung?

t-robust

Leider findet man schnell Beispiele von Graphen, die zwar 1-robust sind aber nicht hamiltonsch (Übung 5). Somit bietet auch Robustheit nicht die vielleicht ersehnte Charakterisierung der hamiltonschen Graphen durch eine schöne Dualitätsbedingung, wie etwa im Satz von Menger oder dem 1-Faktor-Satz von Tutte. Die folgende Vermutung behauptet jedoch, dass Robustheit die hamiltonschen Graphen zumindest qualitativ charakterisiert:

Robustheitsvermutung. (Chvátal 1973)
Es existiert ein $t \in \mathbb{N}$, so dass jeder t-robuste Graph einen Hamiltonkreis enthält.

Fast dreißig Jahre lang bestand die gängige Erwartung, dass die Robustheitsvermutung sogar mit $t = 2$ wahr sein könnte. Dies wurde jedoch kürzlich widerlegt. Mehr zur Robustheitsvermutung und ihren reichhaltigen Beziehungen zu den anderen Resultaten dieses Kapitels findet sich in den Übungen.

Es mag vielleicht überraschen, dass die Frage nach der Existenz eines Hamiltonkreises auch etwas mit dem Vierfarbensatz zu tun hat. In Kapitel 5.6 bemerkten wir bereits die Äquivalenz des Vierfarbensatzes zu der Aussage, dass es keinen plättbaren Snark gibt, dass also jeder plättbare kubische brückenlose Graph einen 4-Fluss hat. Wie man leicht zeigt, kann man hier „brückenlos“ durch „3-zusammenhängend“ ersetzen. Weiter zeigt man leicht (Übung 12, Kap. 5), dass jeder Graph mit einem Hamiltonkreis einen 4-Fluss hat. Zum Beweis des Vierfarbensatz reichte also ein Beweis, dass jeder plättbare kubische 3-zusammenhängende Graph einen Hamiltonkreis besitzt!

Leider ist dies jedoch nicht richtig; das erste Gegenbeispiel wurde 1946 von Tutte gefunden. Zehn Jahre später bewies Tutte dann den folgenden tiefliegenden Satz, der angesichts seines früheren Beispiels bestmöglich ist:

Satz 8.1.3. (Tutte 1956)
Jeder 4-zusammenhängende plättbare Graph hat einen Hamiltonkreis.

8.2 Hamiltonkreise und Gradsequenz

Der Satz von Dirac bildete historisch den Ausgangspunkt der Entdeckung einer ganzen Reihe von Bedingungen an die Eckengrade eines Graphen, die jeweils die Existenz eines Hamiltonkreises sichern. Wir beweisen jetzt einen Satz, der diese Entwicklung zu einem gewissen Abschluss bringt und insbesondere die angedeuteten früheren Resultate umfasst.

Ist G ein Graph mit n Ecken und Eckengraden $d_1 \leqslant \ldots \leqslant d_n$, so nennt man das Tupel $(d_1, \ldots, d_n)$ die *Gradsequenz* von G. (Wie man sofort sieht, ist dieses Tupel aufgrund seiner Monotonie eindeutig bestimmt, wenn es auch von verschiedenen Eckenaufzählungen von G herrühren kann.) Wir nennen ein beliebiges Tupel $(a_1, \ldots, a_n)$ natürlicher Zahlen *hamiltonsch*, wenn jeder Graph mit n Ecken und punktweise größerer Gradsequenz hamiltonsch ist. (Eine Gradsequenz $(d_1, \ldots, d_n)$ ist *punktweise größer* als $(a_1, \ldots, a_n)$, wenn $d_i \geqslant a_i$ gilt für alle i.)

Gradsequenz

hamiltonsch

punktweise größer

Der folgende Satz charakterisiert alle hamiltonschen Tupel:

Satz 8.2.1. (Chvátal 1972)
Ein Tupel $(a_1, \ldots, a_n)$ natürlicher Zahlen mit $a_1 \leqslant \ldots \leqslant a_n < n$ und $n \geqslant 3$ ist genau dann hamiltonsch, wenn für jedes $i < n/2$ gilt:

$$a_i \leqslant i \;\Rightarrow\; a_{n-i} \geqslant n - i\,.$$

Beweis. Es sei $(a_1, \ldots, a_n)$ ein beliebiges Tupel natürlicher Zahlen mit $a_1 \leqslant \ldots \leqslant a_n < n$ und $n \geqslant 3$. Wir nehmen zuerst an, dass dieses Tupel die Bedingung des Satzes erfüllt und zeigen, dass es hamiltonsch ist. Angenommen nicht; dann gibt es einen Graphen ohne Hamiltonkreis, dessen Gradsequenz $(d_1, \ldots, d_n)$ für alle i der Bedingung

$(a_1, \ldots, a_n)$

$(d_1, \ldots, d_n)$

$$d_i \geqslant a_i \tag{1}$$

genügt. Wir wählen einen solchen Graphen $G = (V, E)$ mit der größtmöglichen Anzahl von Kanten.

$G = (V, E)$

Wegen (1) erfüllt mit $(a_1, \ldots, a_n)$ auch die Gradsequenz $(d_1, \ldots, d_n)$ von G die Bedingung des Satzes, d.h. es gilt

$$d_i \leqslant i \;\Rightarrow\; d_{n-i} \geqslant n - i \tag{2}$$

für alle $i < n/2$.

Wir wählen nun zwei nicht benachbarte Ecken $x, y \in G$ so, dass $d(x) + d(y)$ größtmöglich ist; die Bezeichnungen dieser Ecken als x und y seien so gewählt, dass $d(x) \leqslant d(y)$ gilt. Wie man beim Umordnen leicht sieht, ist die Gradsequenz des Graphen $G + xy$ punktweise größer als $(d_1, \ldots, d_n)$, und damit als $(a_1, \ldots, a_n)$; nach Wahl von G liegt xy daher

x, y

auf einem Hamiltonkreis H in $G+xy$. Dann ist $H-xy$ ein Hamiltonweg $x_1,\dots,x_n$ $x_1,\dots,x_n$ in G mit $x_1=x$ und $x_n=y$.

Wie im Beweis des Satzes von Dirac betrachten wir die Indexmengen

$$I := \{\, i \mid xx_{i+1} \in E \,\} \quad \text{und} \quad J := \{\, j \mid x_j y \in E \,\}.$$

Da G keinen Hamiltonkreis enthält, ist $I \cap J = \emptyset$. Nach Definition von I und J ist $I \cup J \subseteq \{1,\dots,n-1\}$. Damit gilt

$$d(x)+d(y) = |I|+|J| < n\,, \tag{3}$$

h und daher $h := d(x) < n/2$ nach Wahl von x.

Jedes Paar $\{x_i, y\}$ mit $i \in I$ war wegen $x_i y \notin E$ ein Kandidat bei der Wahl von $\{x,y\}$. Da $\{x,y\}$ mit maximalem $d(x)+d(y)$ gewählt wurde, folgt daher $d(x_i) \leqslant d(x)$ für alle $i \in I$. Somit hat G mindestens $|I| = h$ Ecken vom Grad $\leqslant h$, und insbesondere ist $d_h \leqslant h$. Mit (2) folgt $d_{n-h} \geqslant n-h$, d.h. die $h+1$ Ecken mit den Graden $d_{n-h},\dots,d_n$ haben alle einen Grad $\geqslant n-h$. Wegen $d(x) = h$ ist eine dieser Ecken, sagen z wir z, nicht zu x benachbart. Wegen

$$d(x)+d(z) \geqslant h+(n-h) = n$$

ist dies mit (3) ein Widerspruch zur Wahl von x und y.

Umgekehrt wollen wir nun zeigen, dass zu jedem Tupel $(a_1,\dots,a_n)$ des Satzes mit

$$a_h \leqslant h \quad \text{und} \quad a_{n-h} \leqslant n-h-1$$

h für ein $h < n/2$ ein Graph ohne Hamiltonkreis existiert, dessen Gradsequenz punktweise größer ist als $(a_1,\dots,a_n)$. Das Tupel

$$(\underbrace{h,\dots,h}_{h \text{ mal}},\ \underbrace{n-h-1,\dots,n-h-1}_{n-2h \text{ mal}},\ \underbrace{n-1,\dots,n-1}_{h \text{ mal}})$$

etwa ist punktweise größer als $(a_1,\dots,a_n)$; es reicht also, einen Graphen ohne Hamiltonkreis mit dieser Gradsequenz zu finden.

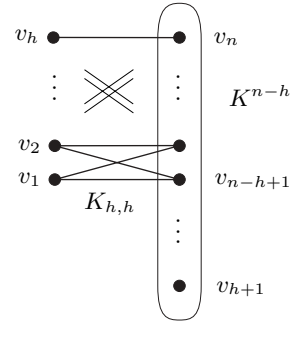


Abb. 8.2.1. Kein $v_1,\dots,v_h$ enthaltender Kreis enthält auch v_{h+1}

Die Abbildung 8.2.1 zeigt einen solchen Graphen: er hat die Ecken $v_1, \dots, v_n$ und die Kantenmenge

$$\{\, v_i v_j \mid i, j > h \,\} \cup \{\, v_i v_j \mid i \leqslant h;\ j > n-h \,\},$$

ist also die Vereinigung eines K^{n-h} auf den Ecken $v_{h+1}, \dots, v_n$ und eines $K_{h,h}$ mit Partitionsmengen $\{v_1, \dots, v_h\}$ und $\{v_{n-h+1}, \dots, v_n\}$. □

Durch Anwendung von Satz 8.2.1 auf $G * K^1$ beweist man leicht die folgende Version des Satzes für Hamiltonwege. Ein Tupel natürlicher Zahlen heiße *Weg-hamiltonsch*, wenn jeder Graph mit punktweise größerer Gradsequenz einen Hamiltonweg hat.

Korollar 8.2.2. *Ein Tupel $(a_1, \dots, a_n)$ natürlicher Zahlen mit $n \geqslant 3$ und $a_1 \leqslant \dots \leqslant a_n < n$ ist genau dann Weg-hamiltonsch, wenn für jedes $i \leqslant n/2$ gilt:*

$$a_i < i \;\Rightarrow\; a_{n+1-i} \geqslant n - i\,.$$

□

8.3 Hamiltonkreise im Quadrat eines Graphen

Für einen Graphen G und $d \in \mathbb{N}$ bezeichnet G^d den Graphen auf $V(G)$, bei dem zwei Ecken genau dann benachbart sind, wenn sie in G einen Abstand $\leqslant d$ haben. Offenbar gilt $G = G^1 \subseteq G^2 \subseteq \dots$ In diesem Abschnitt wollen wir den folgenden Satz beweisen: G^d

Satz 8.3.1. (Fleischner 1974)
Ist G ein 2-zusammenhängender Graph, so hat G^2 einen Hamiltonkreis.

Zum Beweis des Satzes brauchen wir drei Lemmas. Ist $v \in G$ eine Ecke und $e \in G^2$ eine Kante zwischen zwei Nachbarn (in G) von v, so sagen wir, dass e die Ecke v *überbrückt*. *überbrückt*

Lemma 8.3.2. *Es sei $P = v_0 \dots v_k$ ein Weg ($k \geqslant 1$). Der Graph G sei aus P gewonnen durch die Hinzufügung zweier Ecken u, w, sowie der Kanten uv_1 und wv_k (Abb. 8.3.1).*

(i) *P^2 enthält einen Weg Q von v_0 nach v_1 mit $V(Q) = V(P)$ und $v_{k-1}v_k \in E(Q)$, so dass jede der Ecken $v_1, \dots, v_{k-1}$ durch eine Kante von Q überbrückt wird.*

(ii) *G^2 enthält disjunkte Wege Q von v_0 nach v_k und Q' von u nach w, so dass $V(Q) \cup V(Q') = V(G)$ gilt und jede der Ecken $v_1, \dots, v_k$ durch eine Kante von Q oder Q' überbrückt wird.*

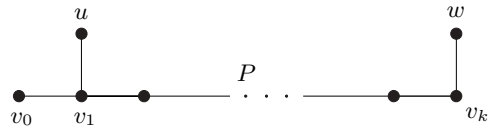


Abb. 8.3.1. Der Graph G aus Lemma 8.3.2

Beweis. (i) Ist k gerade, so sei $Q := v_0v_2 \dots v_{k-2}v_kv_{k-1}v_{k-3} \dots v_1$. Ist k ungerade, so sei $Q := v_0v_2 \dots v_{k-1}v_kv_{k-2} \dots v_1$.

(ii) Ist k gerade, so sei $Q := v_0v_2 \dots v_{k-2}v_k$; ist k ungerade, so sei $Q := v_0v_1v_3 \dots v_{k-2}v_k$. In beiden Fällen sei Q' der u–w-Weg auf den restlichen Ecken von G^2. □

Lemma 8.3.3. *Es sei $G = (V, E)$ ein kubischer Multigraph mit einem Hamiltonkreis C. Es seien $e \in E(C)$ und $f \in E \setminus E(C)$ zwei Kanten mit einer gemeinsamen Endecke v (Abb. 8.3.2). Dann existiert ein geschlossener Kantenzug in G, der e genau einmal durchläuft, jede andere Kante von C ein- oder zweimal, und jede Kante aus $E \setminus E(C)$ genau einmal. Dieser Kantenzug kann so gewählt werden, dass er das Tripel (e, v, f) enthält, also e, v, f direkt hintereinander durchläuft.*

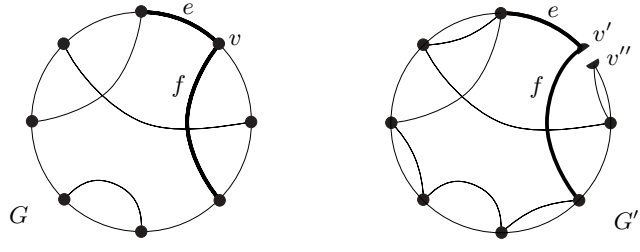


Abb. 8.3.2. Die Multigraphen G und G' aus Lemma 8.3.3

(0.2.1)
(0.8.1)

Beweis. Nach Proposition 0.2.1 hat C gerade Länge. Wir ersetzen jede zweite Kante von C durch eine Doppelkante, und zwar so, dass e nicht ersetzt wird. Aus dem entstehenden 4-regulären Multigraphen gewinnen wir einen Multigraphen G', indem wir v durch zwei Ecken v', v'' ersetzen; dabei sei v' mit e und f inzident, und v'' mit den beiden anderen mit v inzidenten Kanten (Abb. 8.3.2). Nach Satz 0.8.1 hat G' einen eulerschen Kantenzug; dieser induziert in G den gewünschten Kantenzug. □

Lemma 8.3.4. *Ein 2-zusammenhängender Graph G enthält zu jeder Ecke $x \in G$ einen Kreis C, der x enthält und eine weitere Ecke y, deren Nachbarn (in G) alle auf C liegen.*

Beweis. Hat G einen Hamiltonkreis, so ist nichts weiter zu zeigen. Ansonsten sei $C' \subseteq G$ ein Kreis mit $x \in C'$; dieser existiert, da G 2-zusammenhängend ist. Es sei D eine Komponente von $G - C'$; wir wählen C'

und D so, dass $|D|$ minimal ist. Da G 2-zusammenhängend ist, hat D mindestens zwei Nachbarn auf C'. Dann enthält C' einen Weg P zwischen zwei solchen Nachbarn u und v, dessen Inneres $\mathring{P}$ keinen Nachbarn in D hat und x nicht enthält (Abb. 8.3.3). Ersetzen wir P in C' durch einen u–v-Weg P' mit $\mathring{P}' \subseteq D$, so erhalten wir einen Kreis C, der x enthält und eine Ecke $y \in D$. Hätte y einen Nachbarn in $G - C$, so läge dieser in einer Komponente $D' \subsetneqq D$ von $G - C$, mit Widerspruch zur Wahl von C' und D. Also liegen alle Nachbarn von y auf C, und C erfüllt die Behauptung des Lemmas. □

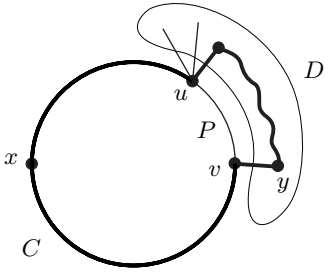


Abb. 8.3.3. Zum Beweis von Lemma 8.3.4

Beweis von Satz 8.3.1. Wir beweisen mit Induktion nach $|G|$ zu jeder Ecke $x^* \in G$ die Existenz eines Hamiltonkreises H von G^2 mit der folgenden Eigenschaft:

Beide mit x^* inzidenten Kanten von H liegen in G. $(*)$

Für $|G| = 3$ ist $G = K^3$ und die Behauptung trivial. Es sei also $|G| \geqslant 4$, die Behauptung sei wahr für kleinere $|G|$, und es sei $x^* \in V(G)$ gegeben. Mit Lemma 8.3.4 wählen wir einen Kreis $C \subseteq G$, der x^* enthält und eine weitere Ecke y^*, deren Nachbarn in G alle auf C liegen. x^* C y^*

Ist C ein Hamiltonkreis von G, so ist nichts zu zeigen; wir nehmen daher $G - C \neq \emptyset$ an. Betrachten wir eine Komponente D von $G - C$. Es sei $\tilde{D}$ der durch Kontraktion von $G - D$ auf eine Ecke $\tilde{x}$ entstehende Graph; formal entsteht $\tilde{D}$ also aus D durch die Hinzufügung einer neuen Ecke $\tilde{x}$ und aller Kanten $\tilde{x}y$ mit $y \in D$, für die y einen Nachbarn in $G - D$ hat (und damit in C). Ist $|D| = 1$, so setzen wir $\mathcal{P}(D) := \{D\}$. Ist andererseits $|D| > 1$, so ist $\tilde{D}$ wiederum 2-zusammenhängend. Dann enthält $\tilde{D}^2$ nach Induktionsannahme einen Hamiltonkreis $\tilde{C}$ mit der Eigenschaft, dass die Kanten zwischen $\tilde{x}$ und seinen Nachbarn auf $\tilde{C}$ beide in $\tilde{D}$ liegen. Der Weg $\tilde{C} - \tilde{x}$ enthält möglicherweise Kanten, die nicht in G^2 liegen: Kanten zwischen zwei Nachbarn von $\tilde{x}$, die in G keinen gemeinsamen Nachbarn haben (und auch nicht selbst benachbart sind). Bezeichnet $\tilde{E}$ die Menge dieser Kanten, so sei $\mathcal{P}(D)$ die Menge der $\mathcal{P}(D)$ $\tilde{C}$ $\mathcal{P}(D)$

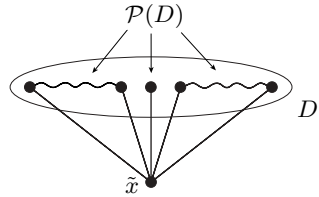


Abb. 8.3.4. $\mathcal{P}(D)$ enthält drei Wege; einer davon ist trivial

Komponenten von $(\tilde{C} - \tilde{x}) - \tilde{E}$; dies ist eine Menge von Wegen in G^2, deren Endecken in $\tilde{D}$ zu $\tilde{x}$ benachbart sind (Abb. 8.3.4).

$\mathcal{P}$ Es sei $\mathcal{P}$ die Vereinigung der Mengen $\mathcal{P}(D)$ über alle Komponenten D von $G - C$. Offenbar hat $\mathcal{P}$ die folgenden Eigenschaften:

$$V(G) = V(C) \cup \bigcup_{P \in \mathcal{P}} V(P). \tag{1}$$

Die Elemente von $\mathcal{P}$ sind paarweise und zu C disjunkte Wege in G^2. (2)

Jede Endecke y eines Weges $P \in \mathcal{P}$ hat in G mindestens einen Nachbarn auf C; (3)

wir wählen einen solchen Nachbarn aus und nennen ihn den zu y gehörigen *Fuß* von P. Ist $P \in \mathcal{P}$ trivial, so hat P genau einen Fuß. Ist P nicht trivial, so hat P zu jeder Endecke einen Fuß. Diese beiden Füße brauchen jedoch nicht verschieden zu sein; somit hat P in diesem Fall entweder einen oder zwei Füße.

Fuß

Wir werden $\mathcal{P}$ jetzt unter Wahrung von (1)–(3) ein wenig modifizieren; außer (1)–(3) und Folgerungen daraus werden wir später keine Eigenschaften von $\mathcal{P}$ verwenden. Ist eine Ecke von C ein Fuß zwei verschiedener Wege $P, P' \in \mathcal{P}$, sagen wir zu $y \in P$ und zu $y' \in P'$ gehörig, so ist yy' eine Kante und $Pyy'P'$ ein Weg in G^2; wir ersetzen P und P' in $\mathcal{P}$ durch diesen Weg. Offenbar erfüllt $\mathcal{P}$ weiterhin die Aussagen (1)–(3). Wir wiederholen diese Abänderung von $\mathcal{P}$ so oft, bis folgendes gilt:

Keine Ecke von C ist ein Fuß zwei verschiedener Wege in $\mathcal{P}$. (4)

$\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ Für $i = 1, 2$ bezeichne $\mathcal{P}_i \subseteq \mathcal{P}$ die Menge aller Wege aus $\mathcal{P}$ mit
X_1, X_2 genau i Füßen, und $X_i \subseteq V(C)$ die Menge aller Füße von Wegen aus $\mathcal{P}_i$. Nach (4) ist $X_1 \cap X_2 = \emptyset$, und es gilt $y^* \notin X_1 \cup X_2$.

Auch G vereinfachen wir jetzt ein wenig; die Änderungen werden weder die Wege aus $\mathcal{P}$ noch die Gültigkeit von (1)–(4) beeinträchtigen. Zunächst betrachten wir ab jetzt die Wege aus $\mathcal{P}$ als Wege in G selbst, nicht bloß in G^2. Dadurch möglicherweise in G^2 zusätzlich entstehende Kanten werden wir bei der Konstruktion unseres Hamiltonkreises H nicht verwenden: in diesen werden wir die Wege aus $\mathcal{P}$ jeweils ganz und

unverändert einbauen, d.h. es wird $P \subseteq H$ gelten für alle $P \in \mathcal{P}$. Wenn für den modifizierten Graphen G dann H in G^2 liegt und $(*)$ erfüllt, so gilt dies auch für die ursprüngliche Version von G. Weiter löschen wir für jedes $P \in \mathcal{P}$ alle P–C-Kanten in G außer den Kanten zwischen den Endecken von P und den dazugehörigen Füßen auf C. Schließlich löschen wir in G alle Sehnen von C. Es gelte somit ohne Beschränkung der Allgemeinheit:

Die einzigen Kanten in G zwischen C und einem Weg $P \in \mathcal{P}$ sind die beiden (im Falle $|P| = 1$ identischen) Kanten zwischen den Endecken von P und den dazugehörigen Füßen von P. Die einzigen Kanten in G mit beiden Endecken auf C sind die Kanten von C selbst. (5)

Unser Ziel ist es, den gesuchten Hamiltonkreis H von G^2 aus den Wegen in $\mathcal{P}$ und geeigneten Teilen von C^2 zu konstruieren. Als erste Annäherung finden wir zunächst einen geschlossenen Kantenzug W in dem Graphen

$$\tilde{G} := G - \bigcup \mathcal{P}_1 \,, \qquad \tilde{G}$$

der bereits sinngemäß die Bedingung $(*)$ erfüllt und jeden Weg aus $\mathcal{P}_2$ genau einmal durchläuft. Später werden wir W dann so umgestalten, dass W auch jede Ecke von C genau einmal durchläuft und überdies die Wege aus $\mathcal{P}_1$ miteinbezieht. Bis auf weiteres nehmen wir jetzt $\mathcal{P}_2 \neq \emptyset$ an – auf den Fall $\mathcal{P}_2 = \emptyset$ kommen wir später zurück.

Wir wählen zunächst eine feste „zyklische Orientierung“ von C, d.h. eine Bijektion $i \mapsto v_i$ von $\mathbb{Z}_{|C|}$ nach $V(C)$ mit $v_i v_{i+1} \in E(C)$ für alle $i \in \mathbb{Z}_{|C|}$. Wir denken uns diese Orientierung als „Rechtsdrehung“: zu gegebenem $v_i \in C$ nennen wir $v_i^+ := v_{i+1}$ den *rechten* Nachbarn von v_i und $v_i^- := v_{i-1}$ seinen *linken* Nachbarn. Entsprechend liegt die Kante v^-v *links* von der Ecke v und die Kante vv^+ *rechts* von ihr, etc. v^+, *rechts* v^-, *links*

Einen Weg $P = v_i v_{i+1} \dots v_{j-1} v_j$ in C mit $V(P) \cap X_2 = \{v_i, v_j\}$ nennen wir ein *Intervall* mit *linkem Rand* v_i und *rechtem Rand* v_j. Wir nehmen dabei $v_i \neq v_j$ an; unser Kreis C ist also die Vereinigung von $|X_2| = 2\,|\mathcal{P}_2|$ Intervallen. Wie üblich schreiben wir $P =: [v_i, v_j]$ und setzen $(v_i, v_j) := \mathring{P}$ sowie $[v_i, v_j) := P\mathring{v}_j$ und $(v_i, v_j] := \mathring{v}_i P$. Für Intervalle $[u, v]$ und $[v, w]$ mit gemeinsamem Rand v liegt $[u, v]$ *links* von $[v, w]$ und $[v, w]$ *rechts* von $[u, v]$. Das eindeutig bestimmte Intervall $[v, w]$ mit $x^* \in (v, w]$ bezeichnen wir als I^*, den Weg aus $\mathcal{P}_2$ mit Fuß w als P^*, und den Weg $I^* w P^*$ als Q^*. *Intervall* *Rand* $[v, w]$ *etc.* I^*, P^* Q^*

Zur Konstruktion von W fassen wir $\tilde{G}$ in natürlicher Weise als Multigraphen M auf X_2 auf: die Kanten von M seien die Intervalle von C (mit ihren Rändern als inzidenten Ecken) und die Wege aus $\mathcal{P}_2$ (mit ihren Füßen als inzidenten Ecken). Nach (4) ist M kubisch, und so können wir Lemma 8.3.3 mit $e := I^*$ und $f := P^*$ anwenden. Das

W Lemma liefert uns einen geschlossenen Kantenzug W in $\tilde{G}$, der I^* und jeden Weg aus $\mathcal{P}_2$ einmal durchläuft und jedes andere Intervall ein- oder zweimal. Weiter enthält W den Weg Q^* als Teilweg. Die beiden mit x^* inzidenten Kanten dieses Weges liegen in G; in diesem Sinne erfüllt W also bereits die Bedingung $(*)$.

Wir wollen jetzt W so umgestalten, dass W auch jede Ecke von C genau einmal durchläuft. Für die spätere Einbeziehung der Wege aus $\mathcal{P}_1$ treffen wir dabei bereits Vorsorge: wir definieren gleichzeitig eine auf $e(v)$ X_1 injektive Abbildung $v \mapsto e(v)$, die jeder Ecke $v \in X_1$ eine Kante $e(v)$ des neuen W mit der folgenden Eigenschaft zuordnet:

> *Die Ecke v ist entweder durch $e(v)$ überbrückt oder mit $e(v)$ inzident. Im zweiten Fall gilt $e(v) \in C$ und $e(v) \neq vx^*$.* $(**)$

Die Abbildung $v \mapsto e(v)$ werden wir auf ganz $V(C) \setminus X_2$ definieren, also auf einer Obermenge von X_1 (vgl. (4)). Zur Injektivität werden wir lediglich darauf achten müssen, dass wir keine Kante $vw \in C$ gleichzeitig als $e(v)$ und als $e(w)$ wählen. Wegen $|X_1| \geqslant 2$ im für die Injektivität relevanten Fall und $\mathcal{P}_2 \neq \emptyset$ haben wir nämlich $|C - y^*| \geqslant |X_1| + 2\,|\mathcal{P}_2| \geqslant 4$, also $|C| \geqslant 5$; somit kann nach (5) keine Kante von G^2 gleichzeitig zwei verschiedene Ecken von C überbrücken oder eine Ecke von C überbrücken und selbst auf C liegen.

Für unsere Korrektur von W auf den Ecken von C betrachten wir die Intervalle von C einzeln. Nach Definition von W ist jedes Intervall I von einem der folgenden drei Typen:

Typ 1: W durchläuft I genau einmal;

Typ 2: W durchläuft I genau zweimal, und zwar hin und zurück direkt hintereinander (formal: W enthält ein Tripel (e, x, e) mit $x \in X_2$ und $e \in E(I)$);

Typ 3: W durchläuft I genau zweimal, aber nicht direkt hintereinander (d.h. W enthält kein Tripel wie oben).

Nach Wahl von W ist I^* vom ersten Typ. Die Ecke x aus der Definition *Kehrecke* eines Intervalls vom Typ 2 nennen wir die *Kehrecke* dieses Intervalls. Da Q^* ein Teilweg von W ist und W auch P^* nur einmal durchläuft, gilt:

> *Das Intervall rechts von I^* ist vom zweiten Typ und hat seine Kehrecke am linken Rand.* (6)

$I = [x_1, x_2]$ Betrachten wir nun ein festes Intervall $I = [x_1, x_2]$. Es sei y_1 der
y_1, y_2 Nachbar von x_1 und y_2 der Nachbar von x_2 auf einem Weg aus $\mathcal{P}_2$. Das
I^- Intervall links von I bezeichnen wir mit I^-.

Ist I vom ersten Typ, so lassen wir W auf I unverändert. Ist $I \neq I^*$, so wählen wir zu jedem $v \in \mathring{I}$ als $e(v)$ die Kante links von v. Wegen (6) ist

$I^- \neq I^*$, und insbesondere $x_1 \neq x^*$. Unsere Wahl der Kanten $e(v)$ genügt somit der Bedingung $(**)$. Ist $I = I^*$, so sei $e(v)$ für alle $v \in (x_1, x^*] \cap \mathring{I}$ die Kante links von v, und für alle $v \in (x^*, x_2)$ die Kante rechts von v. Auch diese Wahlen von $e(v)$ vertragen sich mit $(**)$.

Nun sei I vom zweiten Typ. Wir nehmen zuerst an, dass x_2 die Kehrecke von I ist. Dann enthält W (möglicherweise in umgekehrter Reihenfolge) den Kantenzug $y_1x_1Ix_2Ix_1I^-$. Wir wenden nun Lemma 8.3.2 (i) mit $P := y_1x_1I\mathring{x}_2$ an und ersetzen $y_1x_1Ix_2Ix_1$ in W durch den y_1–x_1-Weg Q des Lemmas (Abb. 8.3.5). Nach Aussage des Lemmas gilt $V(\mathring{Q}) =$

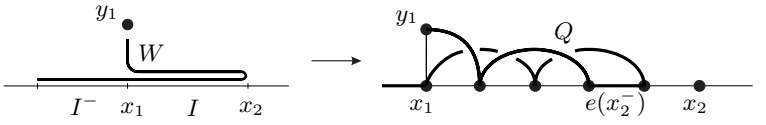


Abb. 8.3.5. Umgestaltung von W auf einem Intervall zweiten Typs

$V(P) \setminus \{y_1, x_1\} = V(\mathring{I})$. Die Ecken $v \in (x_1, x_2^-)$ werden jeweils durch eine Kante von Q überbrückt, und wir wählen diese Kante als $e(v)$. Als $e(x_2^-)$ wählen wir die Kante links von x_2^- (es sei denn, $x_2^- = x_1$); auch diese Kante liegt nach dem Lemma auf Q. Nach (6) ist sie nicht mit x^* inzident (da nach Annahme x_2 die Kehrecke von I ist) und erfüllt somit $(**)$. Den Fall, dass x_1 die Kehrecke von I ist, behandeln wir ganz analog: mit Lemma 8.3.2 (i) ersetzen wir $y_2x_2Ix_1Ix_2$ in W durch einen y_2–x_2-Weg Q mit $V(\mathring{Q}) = V(\mathring{I})$, wählen als $e(v)$ für $v \in (x_1^+, x_2)$ eine v überbrückende Kante von Q, und wählen als $e(x_1^+)$ die Kante rechts von x_1^+.

Schließlich sei I vom dritten Typ. Da W die Kante y_1x_1 genau einmal und das Intervall I^- höchstens zweimal durchläuft, enthält W die Teilwege y_1x_1I und $I^- \cup I$, und I^- ist vom ersten Typ. Nach (6) ist jedoch $I^- \neq I^*$. Bei der Definition der Kanten $e(v)$ für $v \in \mathring{I}^-$ trat die rechteste Kante $x_1^-x_1$ von I^- somit nicht als Bild auf; wir werden diese Kante jetzt ersetzen können. Da W das Intervall I^+ höchstens zweimal durchläuft, muss W anschließend an einen seiner beiden Teilwege y_1x_1I und $x_1^-x_1I$ die Kante x_2y_2 enthalten. Die Startecke dieses Weges (y_1 oder x_1^-) fassen wir als die Ecke u in Lemma 8.3.2 (ii) auf, die andere Ecke aus $\{y_1, x_1^-\}$ als v_0; weiter sei $v_k := x_2$ und $w := y_2$. Das Lemma erlaubt uns dann, diese beiden Teilwege von W zwischen $\{y_1, x_1^-\}$ und $\{x_2, y_2\}$ durch disjunkte Wege in G^2 zu ersetzen (Abb. 8.3.6), und weist

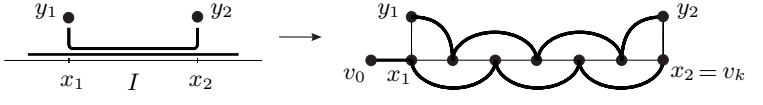


Abb. 8.3.6. Umgestaltung zum Typ 3: der Fall $u = y_1$ und k ungerade

jeder Ecke $v \in \mathring{I}$ eine sie überbrückende Kante $e(v)$ auf einem dieser Wege zu.

Wir wollen nun prüfen, dass W nach Abschluss all dieser Änderungen jede Ecke von $\tilde{G}$ genau einmal enthält. Für die Ecken der Wege aus $\mathcal{P}_2$ ist dies trivial, da W jeden solchen Weg genau einmal durchläuft. Auch die Ecken im Innern von Intervallen auf C sind jetzt genau einmal in W enthalten. Wie aber steht es um die Ecken in X_2?

Es sei $x \in X_2$ gegeben und y sein Nachbar auf einem Weg aus $\mathcal{P}_2$. Das Intervall I mit $yxI \subseteq W$ vor den Änderungen an W bezeichnen wir als I_1, das andere Intervall mit Rand x als I_2. Ist I_1 vom Typ 1, so ist I_2 vom Typ 2 mit Kehrecke x. Bei der Betrachtung von W auf I_1 wurde x somit erhalten, bei der Bereinigung von W auf I_2 wurde es ausgespart; damit liegt x jetzt noch genau einmal auf W. Ist I_1 vom Typ 2, so ist x nicht seine Kehrecke, und I_2 ist vom Typ 1. Der mit yx beginnende und dann I_1 hin- und zurücklaufende Teilkantenzug von W wurde durch einen y–x-Weg ersetzt. An diesen Weg schließt sich in W jetzt das unverändert gebliebene Intervall I_2 an, d.h. auch in diesem Fall enthält W die Ecke x noch genau einmal. Ist schließlich I_1 vom Typ 3, so war x in einem der Ersetzungswege Q, Q' aus Lemma 8.3.2 (ii) enthalten; da diese Wege nach Aussage des Lemmas disjunkt waren, liegt x wiederum noch genau einmal auf W.

Damit enthält W jetzt in der Tat jede Ecke von $\tilde{G}$ genau einmal,
$\tilde{H}$ d.h. W definiert einen Hamiltonkreis $\tilde{H}$ in $\tilde{G}^2$. Da W unverändert den Weg Q^* enthält, genügt $\tilde{H}$ der Bedingung $(*)$.

Bis jetzt galt unsere Annahme, dass $\mathcal{P}_2$ nicht leer sei. Im Falle $\mathcal{P}_2 =$
$\tilde{H}$ $\emptyset$ setzen wir $\tilde{H} := \tilde{G} = C$; wiederum gilt $(*)$ für $\tilde{H}$. Um die Einbeziehung der Wege aus $\mathcal{P}_1$ in unseren Hamiltonkreis einheitlich handhaben zu können, ordnen wir auch für $\mathcal{P}_2 = \emptyset$ jeder Ecke $v \in C - y^*$ eine Kante $e(v)$ von $\tilde{H}$ zu:

$$e(v) := \begin{cases} vv^+ & \text{falls } v \in [x^*, y^*) \\ vv^- & \text{falls } v \in (y^*, x^*). \end{cases}$$

Auch diese Abbildung $v \mapsto e(v)$ ist injektiv, erfüllt $(**)$, und ist auf einer Obermenge von X_1 definiert; wir erinnern daran, dass y^* nach Definition nicht in X_1 liegen kann.

Zum Schluss bauen wir jetzt $\tilde{H}$ durch Einbeziehung der Wege aus $\mathcal{P}_1$ zu unserem gesuchten Hamiltonweg H von G^2 um. Ist $\mathcal{P}_1 = \emptyset$, so gibt
P, v es nichts zu tun; es gelte also $\mathcal{P}_1 \neq \emptyset$. Es sei $P \in \mathcal{P}_1$ gegeben, etwa mit
y_1, y_2 Fuß $v \in X_1$ und Endecken y_1, y_2. (Im Falle $|P| = 1$ gilt $y_1 = y_2$.) Unser
e Ziel ist es, die Kante $e := e(v)$ in $\tilde{H}$ durch P ersetzen; dazu müssen wir zeigen, dass die Endecken von P mit den Endecken von e geeignet durch Kanten aus G^2 verbunden sind.

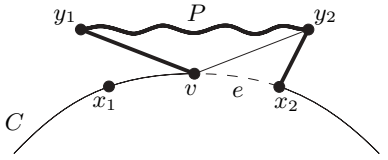


Abb. 8.3.7. Ersetzung der Kante e in $\tilde{H}$

Nach (4) und (5) hat v in $\tilde{G}$ nur zwei Nachbarn, seine beiden Nachbarn x_1, x_2 auf C. Ist v mit e inzident, also $e = vx_i$ mit $i \in \{1, 2\}$, so ersetzen wir e durch den Weg $vy_1Py_2x_i$ (Abb. 8.3.7). Da vy_2 eine Kante von G ist, liegt dieser Weg in G^2. Ist andererseits v nicht mit e inzident, so wird v nach $(**)$ durch e überbrückt. Dann ist $e = x_1x_2$, und wir ersetzen e durch den Weg $x_1y_1Py_2x_2 \subseteq G^2$ (Abb. 8.3.8). Da die Funktion $v \mapsto e(v)$ auf X_1 injektiv ist, sind nach (4) all diese Änderungen von $\tilde{H}$ (eine für jedes $P \in \mathcal{P}_1$) unabhängig voneinander ausführbar und ergeben schließlich in der Tat ein Hamiltonkreis H von G^2. H

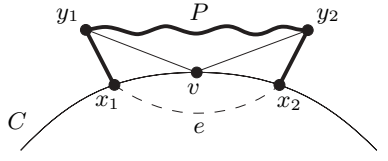


Abb. 8.3.8. Ersetzung der Kante e in $\tilde{H}$

Es bleibt zu prüfen, dass mit $\tilde{H}$ auch H die Bedingung $(*)$ erfüllt, dass also beide mit x^* inzidenten Kanten von H in G liegen. Da $(*)$ für $\tilde{H}$ gilt, reicht es zu zeigen, dass die mit x^* inzidenten Kanten von $\tilde{H}$ jeweils entweder noch in H liegen oder durch einen Weg ersetzt wurden, dessen mit x^* inzidente Kante in G liegt. Es sei also $e = x^*z \in \tilde{G}$ eine e, z
der beiden mit x^* inzidenten Kanten von $\tilde{H}$. Liegt e nicht in H, so ist e bei der Konstruktion von H aus $\tilde{H}$ ersetzt worden; es gibt also eine Ecke $v \in X_1$ mit $e = e(v)$.

Wo liegt diese Ecke v? Wir zeigen zunächst, dass v mit e inzident sein muss. Anderenfalls gilt $\mathcal{P}_2 \neq \emptyset$, und gemäß $(**)$ wird v durch e überbrückt. Aus $\mathcal{P}_2 \neq \emptyset$ folgt wegen $v \in X_1$ zunächst $|C - y^*| \geqslant |X_1| + 2\,|\mathcal{P}_2| \geqslant 3$, also $|C| \geqslant 4$. Dass e die Ecke v überbrückt, steht daher wegen (5) im Widerspruch zu $e \in G$ (was wegen $(*)$ für $\tilde{H}$ gilt).

Somit ist v in der Tat mit e inzident. Es gilt also $v \in \{x^*, z\}$ nach Definition von e, und gleichzeitig $e \neq vx^*$ nach $(**)$; folglich ist $v = x^*$. Die Kante $e = x^*z \in \tilde{G}$ wurde daher durch einen Weg der Form $x^*y_1Py_2z$ ersetzt. Da x^*y_1 eine Kante von G ist, ist somit auch diese Ersetzung für die Gültigkeit von $(*)$ unschädlich. Insgesamt erfüllt H daher in der Tat die Bedingung $(*)$, und unser Beweis ist vollständig. □

Zum Abschluss des Kapitels erwähnen wir noch eine weitreichende Vermutung, die den Satz von Dirac verallgemeinert:

Vermutung. (Seymour 1974)
Ist G ein Graph mit n Ecken und Minimalgrad

$$\delta(G) \geqslant \frac{k}{k+1}\, n\,,$$

so hat G einen Hamiltonkreis H mit $H^k \subseteq G$.

Für $k = 1$ ist dies gerade der Satz von Dirac. Die Vermutung wurde für hinreichend große n (abhängig von k) von Komlós, Sárközy und Szemerédi bewiesen (1998).

Übungen

1. Einen orientierten vollständigen Graphen nennt man ein *Turnier*. (Warum wohl?) Zeige, dass jedes Turnier einen (gerichteten) Hamiltonweg enthält.

2. Zeige, dass jeder eindeutig 3-kantenfärbbare kubische Graph einen Hamiltonkreis hat. („Eindeutig“ soll heißen, dass alle 3-Kantenfärbungen die gleiche Kantenpartition induzieren.)

3. Zeige, dass es für jedes gerade $k > 0$ zu jedem $n \geqslant k$ einen k-regulären Graphen auf $2n + 1$ Ecken gibt.

4. Beweise oder widerlege die folgende Verschärfung von Proposition 8.1.2: *jeder k-zusammenhängende Graph G mit $|G| \geqslant 3$ und $\chi(G) \geqslant |G|/k$ hat einen Hamiltonkreis.*

5. (i)$^-$ Zeige, dass hamiltonsche Graphen 1-robust sind.

   (ii) Finde einen Graphen, der 1-robust ist aber nicht hamiltonsch.

6. Beweise die Robustheitsvermutung für plättbare Graphen. Gilt sie auch mit $t = 2$? Vielleicht sogar mit einem $t < 2$?

7.$^-$ Finde einen hamiltonschen Graphen, dessen Gradsequenz kein hamiltonsches Tupel ist.

8.$^-$ Es sei G ein Graph auf n Ecken, der zu jedem $i < n/2$ weniger als i Ecken des Grades $\leqslant i$ hat. Zeige mit dem Satz von Chvátal, dass G einen Hamiltonkreis hat. (Insbesondere folgt also der Satz von Dirac aus dem Satz von Chvátal.)

9. Zeige, dass das Quadrat eines k-zusammenhängenden Graphen stets k-robust ist. Leite hieraus den Satz von Fleischner her für Graphen, die die Robustheitsvermutung für $t = 2$ erfüllen.

10. Beweise die folgende Abschwächung der Umkehrung von Übung 5 (i): zu jedem nicht hamiltonschen Graphen G gibt es einen Graphen G' mit punkweise größerer Gradsequenz, der nicht 1-robust ist.

11. Finde einen zusammenhängenden Graphen G, für den G^2 keinen Hamiltonkreis enthält.

12.$^+$ Zeige mit Induktion nach $|G|$, dass die dritte Potenz G^3 eines zusammenhängenden Graphen G zwischen je zwei Ecken einen Hamiltonweg enthält (und somit insbesondere einen Hamiltonkreis).

13.$^+$ Zeige, dass jede Kante eines Graphen G auf einer geraden Anzahl von Hamiltonkreisen liegt, wenn alle Ecken von G ungeraden Grad haben.

(Tip: Es sei $xy \in E(G)$ gegeben. Die Hamiltonkreise durch xy entsprechen den Hamiltonwegen in $G - xy$ von x nach y. Betrachte die Menge $\mathcal{H}$ *aller* in x beginnenden Hamiltonwege in $G - xy$ und zeige, dass eine gerade Anzahl davon in y endet. Definiere dazu einen geeigneten Graphen auf $\mathcal{H}$, so dass die gewünschte Aussage aus Proposition 0.2.1 folgt.)

Notizen

Die Frage nach der Existenz von Hamiltonkreisen in einem Graphen ist, ähnlich wie die Frage nach einem Eulerschen Kantenzug oder nach Färbungen von Landkarten, älter als die Graphentheorie selbst: sie geht zurück auf ein 1857 von W.R. Hamilton erfundenes Spiel, in dem es darum geht, „Hamiltonkreise“ im Graphen des Dodekaeders zu finden. Was als mathematische Unterhaltung begann, taucht über hundert Jahre später im Gewand der kombinatorischen Optimierung wieder auf, als *Problem des Handelsreisenden*: in welche Reihenfolge legt ein Vertreter am günstigsten die verschiedenen von ihm zu besuchenden Kunden, wenn ihm zwischen je zwei Kunden die direkte Fahrzeit bekannt ist und er nach Besuch aller Kunden wieder an seinem Ausgangsort sein möchte? Auch wenn der diesem praktischen Problem zugrundeliegende Graph K vollständig ist und die wesentliche Information nicht in seiner Benachbartheitsrelation selbst sondern in einer auf der Kantenmenge definierten „Bewertungsfunktion“ enthalten ist, so ist doch die Verbindung zu Hamiltons Problem deutlich: ist etwa eine beliebige Rundtour gesucht, für die die Fahrzeit zwischen je zwei Ecken lediglich einer oberen Schranke genügen soll, so definieren die entsprechenden Kanten einen aufspannenden Teilgraphen von K, und wir suchen einen Hamiltonkreis in diesem Teilgraphen. Bis heute ist das algorithmische Problem des Handelsreisenden eine wesentliche Motivation für die Beschäftigung mit Hamiltonkreisen; wir verweisen dazu auf die Literatur der algorithmischen Graphentheorie (siehe die Notizen zu Kapitel 5).

Auch das Fehlen einer guten Charakterisierung der hamiltonschen Graphen hat möglicherweise seinen tieferen Grund in einem algorithmischen Problem: zu entscheiden, ob ein gegebener Graph hamiltonsch ist, ist nämlich NP-schwer. (Es ist sogar eines der klassischen Musterbeispiele eines NP-vollständigen Entscheidungsproblems.) Jede „gute Charakterisierung“, etwa

nach der Art des Satzes von Menger, hätte jedoch zur Folge, dass dieses Entscheidungsproblem in NP ∩ co-NP liegt – und damit, so jedenfalls die gängige Annahme, in P. Gilt jedoch P ≠ NP, so kann keine gute Charakterisierung der hamiltonschen Graphen existieren. Etwas mehr zu diesem Thema gibt es noch in der Einleitung zu Kapitel 10.5 und den Notizen am Ende von Kapitel 10.

Der angedeutete „Beweis“ des Vierfarbensatzes aufgrund der (falschen) Annahmen, dass jeder 3-zusammenhängende kubische ebene Graph hamiltonsch sei, wird gewöhnlich dem schottischen Mathematiker Tait zugeschrieben. Obwohl Tait sich 1880 wohl in der Tat im Besitz mindestens eines „neuen Beweises“[2] des Vierfarbensatzes glaubte, war er sich spätestens bei einem Vortrag vor der Mathematischen Gesellschaft von Edinburgh im Jahre 1883 bewusst, dass er die obige Aussage über Hamiltonkreise nicht beweisen konnte. Siehe P.G. Tait, Listing's topologie, *Phil. Mag.* **17** (1884), 30–46.

Einen vereinfachten Beweis des Satzes von Tutte, dass jeder 4-zusammenhängende plättbare Graph einen Hamiltonkreis besitzt (Satz 8.1.3), gibt C. Thomassen, A theorem on paths in planar graphs, *J. Graph Theory* **7** (1983), 169–176. Tuttes Gegenbeispiel zu Taits Annahme, dass jeder 3-zusammenhängende kubische plättbare Graph einen Hamiltonkreis enthalte, ist bei Bollobás (s.o.) abgebildet und bei J.A. Bondy & U.S.R. Murty, *Graph Theory with Applications*, Macmillan 1976. Bondy und Murty gehen relativ ausführlich auf dieses Thema ein.

Proposition 8.1.2 stammt von Chvátal und Erdős (1972). Die Invariante der „Robustheit“ (*toughness*), sowie die zugehörige Vermutung, stammen von V. Chvátal, Tough graphs and hamiltonian circuits, *Discrete Math.* **5** (1973), 215–228. Wäre die Vermutung wahr mit $t = 2$, so würde dies den Satz von Fleischner implizieren (Übung **9**). Dass sie mit $t = 2$ fehlschlägt, zeigten D. Bauer, H.J. Broersma & H.J. Veldman, Not every 2-tough graph is hamiltonian, *Discrete Appl. Math.* **99** (2000), 317–321. Satz 8.2.1 ist von V. Chvátal, On Hamilton's ideals, *J. Comb. Theory B* **12** (1972), 163–168.

Unser Beweis des Satzes 8.3.1 von Fleischner basiert auf S. Říha, A new proof of the theorem by Fleischner, *J. Comb. Theory B* **52** (1991), 117–123. Seymours Vermutung ist aus P.D. Seymour, Problem 3 in (T.P. McDonough and V.C. Mavron, Hrsg.): *Combinatorics*, Cambridge University Press 1974. Ihr Beweis für große n ist von J. Komlós, G.N. Sárközy & E. Szemerédi, Proof of the Seymour conjecture for large graphs, *Ann. Comb.* **2** (1998), 43–60.

Schließlich sei noch die Vermutung von Thomassen erwähnt, dass jeder 4-zusammenhängende Kantengraph hamiltonsch ist.

[2] nach Kempes falschem Beweis von 1879; siehe die Notizen zu Kapitel 4

9 Zufallsgraphen

Bereits mehrfach ist in den vergangenen Kapiteln der folgende Satz von Erdős angeklungen: *es gibt Graphen, die gleichzeitig beliebig große Taillenweite und beliebig hohe chromatische Zahl haben*, d.h. zu jedem $k \in \mathbb{N}$ existiert ein Graph G mit $g(G) > k$ und $\chi(G) > k$.

Wie beweist man einen solchen Satz? Der klassische Ansatz wäre, einen entsprechenden Graphen zu konstruieren, vielleicht schrittweise mit Induktion nach k. Dies ist jedoch alles andere als einfach: gerade der globale Charakter des Satzes, die Forderung, dass der zu konstruierende Graph zwar insgesamt hohe chromatische Zahl haben soll, nicht aber lokal dicht sein darf, steht einer typischen Konstruktion entgegen – einer Konstruktion, die den Zielgraphen aus bereits vorher konstruierten Teilen zusammenzusetzen sucht.

In einer bahnbrechenden Arbeit des Jahres 1959 wies Erdős einen radikal anderen Weg: er definierte für jedes $n \in \mathbb{N}$ auf der Menge aller Graphen der Ordnung n einen Wahrscheinlichkeitsraum und zeigte, dass bei geeigneter Wahl der Wahrscheinlichkeitsmaße die Wahrscheinlichkeit, dass der gesuchte Graph existiert, für hinreichend große n positiv wird.

Diese von Erdős eingeführte *probabilistische Methode* hat sich seither zu einer der wichtigsten Beweistechniken entfaltet, in der Graphentheorie wie auch in anderen Zweigen der Diskreten Mathematik. Die Theorie der *Zufallsgraphen* hat sich zu einer eigenen Disziplin entwickelt. Dieses Kapitel soll einen ersten Eindruck von diesem Gebiet vermitteln: seine wichtigsten Begriffe und Beweistechniken einführen und ein wenig von der hinter der Technik verborgenen Eleganz der hier anzutreffenden Ideen andeuten.

Der Satz von Erdős (Abschnitt 9.2) hat die Existenz eines Graphen mit gewissen Eigenschaften zum Inhalt: seine Aussage ist ohne Zufallsgraphen formulierbar, doch bilden diese die Grundlage seines Beweises. Ein für die klassische Graphentheorie ebenso interessanter, der Theorie der Zufallsgraphen aber ganz eigener Satztyp ist der einer Aussage für

fast alle Graphen; diesen Begriff werden wir in Abschnitt 9.3 kennenlernen. Im letzten Abschnitt stellen wir exemplarisch an einem Satz von Erdős und Rényi eine in der Theorie der Zufallsgraphen häufig verwendete Beweistechnik dar, zuweilen *Methode der zweiten Momente* genannt.

9.1 Der Begriff des Zufallsgraphen

Es sei V eine feste Menge von n Elementen, sagen wir $V = \{0, \dots, n-1\}$.
$\mathcal{G}$ Unser Ziel ist es, die Menge $\mathcal{G}$ der Graphen auf V in einen Wahrscheinlichkeitsraum zu verwandeln und dann Fragen der folgenden Art zu untersuchen: mit welcher Wahrscheinlichkeit hat ein Graph $G \in \mathcal{G}$ diese oder jene Eigenschaft? Wie hoch ist der Erwartungswert einer gegebenen Invariante auf $\mathcal{G}$, z.B. die mittlere Taillenweite oder chromatische Zahl der Graphen $G \in \mathcal{G}$?

Intuitiv wollen wir G folgendermaßen zufällig konstruieren: für alle Eckenpaare $e \in [V]^2$ entscheiden wir unabhängig voneinander, ob e eine Kante von G sein soll oder nicht; die Wahrscheinlichkeit, dass e eine Kante sei, soll dabei jeweils gleich einem festen Wert p zwischen 0 und
p 1 sein. (In diesem Kapitel bezeichnet p grundsätzlich eine reelle Zahl
q zwischen 0 und 1, und q die Zahl $1-p$.)[1] Ist G_0 ein konkreter Graph auf V, sagen wir mit m Kanten, so hat das Elementarereignis $\{G_0\}$ dann die Wahrscheinlichkeit $p^m q^{\binom{n}{2}-m}$, d.h. G ist mit der Wahrscheinlichkeit $p^m q^{\binom{n}{2}-m}$ gerade dieser Graph G_0. (Die Wahrscheinlichkeit, dass G *isomorph* ist zu G_0 ist im allgemeinen größer.) Mit den Wahrscheinlichkeiten der Elementarereignisse liegt nun aber bereits das gesamte Wahrscheinlichkeitsmaß des gesuchten Raumes $\mathcal{G}$ fest; zu zeigen bleibt also nur, dass wir $\mathcal{G}$ in der Tat mit einem Maß ausstatten können, in dem die einzelnen Kanten wie beschrieben unabhängig voneinander mit der Wahrscheinlichkeit p auftreten. Ein solches Maß werden wir jetzt konstruieren.[2]

Zu jeder möglichen Kante von G, also zu jedem $e \in [V]^2$, definieren wir dazu zunächst ihren eigenen kleinen Wahrscheinlichkeitsraum
Ω_e $\Omega_e := \{0_e, 1_e\}$; die beiden Elementarereignisse $\{0_e\}$ und $\{1_e\}$ dieses
P_e Raumes sollen die Wahrscheinlichkeiten $P_e(1_e) = p$ und $P_e(0_e) = q$
$\mathcal{G}(n,p)$ haben. Unser gesuchter Wahrscheinlichkeitsraum $\mathcal{G} = \mathcal{G}(n,p)$ sei dann

[1] Meist wird p von der Mächtigkeit n der betrachteten Eckenmenge V abhängen, d.h. implizit durch n gegeben sein als Wert $p = p(n)$ einer Funktion $n \mapsto p(n)$. Zu gegebenem n ist dann aber die Wahrscheinlichkeit, dass e eine Kante von G ist, für alle $e \in [V]^2$ die gleiche.

[2] Wer bereits glaubt, dass solch ein Maß auf $\mathcal{G}$ existiert, kann den Text bis einschließlich Proposition 9.1.1 überspringen, ohne etwas zu verlieren.

der Produktraum

$$\Omega := \prod_{e \in [V]^2} \Omega_e \,.$$

Ω

Ein Element von Ω ist formal also eine Abbildung ω, die jedem $e \in [V]^2$ entweder 0_e oder 1_e zuordnet, und das Wahrscheinlichkeitsmaß P auf Ω ist das Produktmaß der Maße P_e. In der Praxis identifizieren wir ω natürlich mit dem Graphen G auf V mit der Kantenmenge

P

$$E(G) = \{\, e \mid \omega(e) = 1_e \,\}$$

und nennen G einen *Zufallsgraphen* auf V mit der Kantenwahrscheinlichkeit p.

Zufallsgraph

Jede Menge von Graphen auf V ist damit ein *Ereignis* in $\mathcal{G}(n,p)$. Insbesondere ist zu jedem $e \in [V]^2$ die Menge

Ereignis

$$A_e := \{\, \omega \mid \omega(e) = 1_e \,\}$$

A_e

aller Graphen G auf V mit $e \in E(G)$ ein Ereignis (das Ereignis, dass e in G eine Kante ist), und es gilt in der Tat:

Proposition 9.1.1. *Die Ereignisse A_e sind unabhängig, und ihre Wahrscheinlichkeit ist jeweils p.*

Beweis. Nach Definition von A_e gilt

$$A_e = \{1_e\} \times \prod_{e' \neq e} \Omega_{e'} \,.$$

Nach Definition von P als Produktmaß der Maße P_e gilt damit

$$P(A_e) = p \cdot \prod_{e' \neq e} 1 = p \,.$$

Ist $\{e_1, \ldots, e_k\}$ eine beliebige Teilmenge von $[V]^2$, so folgt entsprechend

$$\begin{aligned} P\left(A_{e_1} \cap \ldots \cap A_{e_k}\right) &= P\Big(\{1_{e_1}\} \times \ldots \times \{1_{e_k}\} \times \prod_{e \notin \{e_1, \ldots, e_k\}} \Omega_e\Big) \\ &= p^k \\ &= P(A_{e_1}) \cdots P(A_{e_k}) \,. \end{aligned}$$

□

Wie bereits bemerkt, ist P durch den Wert von p und unsere Annahme der Unabhängigkeit der Ereignisse A_e eindeutig bestimmt. Bei der Berechnung konkreter Wahrscheinlichkeiten in $\mathcal{G}(n,p)$ wird es daher im allgemeinen ausreichen, mit dieser Unabhängigkeitsannahme zu argumentieren; unser konkretes Modell Ω für $\mathcal{G}(n,p)$ werden wir nicht weiter benötigen.

k, ℓ

Betrachten wir beispielsweise das Ereignis, dass G einen gegebenen Graphen H auf k Ecken aus V als Teilgraphen enthält; es sei $\|H\| =: \ell$. Die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignises $H \subseteq G$ ist das Produkt der Wahrscheinlichkeiten A_e über alle Kanten e von H, also $P[\,H \subseteq G\,] = p^\ell$. Im Unterschied hierzu beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass H ein Untergraph von G ist, $p^\ell q^{\binom{k}{2}-\ell}$: die $\binom{k}{2} - \ell$ in H fehlenden Kanten müssen ja jetzt auch in G fehlen, und sie tun dies jeweils unabhängig mit der Wahrscheinlichkeit q.

Die Wahrscheinlichkeit P_H, dass G einen zu H *isomorphen* Untergraphen hat, ist im allgemeinen schwieriger zu berechnen: da die möglichen Kopien von H auf Teilmengen von V einander überlappen, sind die Ereignisse, dass sie als Untergraphen in G auftreten, nicht unabhängig. Die Summe (über alle $U \in [V]^k$) der einzelnen Wahrscheinlichkeiten $P[\,H \simeq G[U]\,]$ ist jedoch stets eine obere Schranke für P_H, da P_H ja nur das Maß der Vereinigung all dieser Ereignisse ist. Ist beispielsweise $H = \overline{K^k}$, so erhalten wir für die Wahrscheinlichkeit, dass G einen zu H isomorphen Untergraphen hat, die folgende triviale Abschätzung:

[9.2.1] [9.3.4]

Lemma 9.1.2. *Für jedes $k \geqslant 2$ gilt für die Wahrscheinlichkeit, dass $G \in \mathcal{G}(n,p)$ eine unabhängige Eckenmenge der Mächtigkeit k enthält,*

$$P[\,\alpha(G) \geqslant k\,] \leqslant \binom{n}{k} q^{\binom{k}{2}}.$$

Beweis. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine fest gewählte Eckenmenge $U \in [V]^k$ in G unabhängig ist, beträgt $q^{\binom{k}{2}}$. Die Behauptung folgt somit aus der Tatsache, dass es nur $\binom{n}{k}$ solche Mengen U gibt. □

Analog zu Lemma 9.1.2 gilt für die Wahrscheinlichkeit, dass $G \in \mathcal{G}(n,p)$ einen K^k enthält,

$$P[\,\omega(G) \geqslant k\,] \leqslant \binom{n}{k} p^{\binom{k}{2}}.$$

Ist nun n klein genug (bei festem k), dass die Wahrscheinlichkeiten $P[\,\alpha(G) \geqslant k\,]$ und $P[\,\omega(G) \geqslant k\,]$ beide kleiner als $\frac{1}{2}$ sind, so ist das Maß dieser beiden Ereignisse zusammen immer noch kleiner als 1. Mit anderen Worten: in $\mathcal{G}$ gibt es Graphen, die weder einen K^k noch einen

$\overline{K^k}$ als Untergraphen enthalten – d.h. n ist eine untere Schranke für die Ramseyzahl von k!

Wie der folgende Satz zeigt, ist diese Schranke größenordnungsmäßig gar nicht so schlecht (vgl. Satz 7.1.1):

Satz 9.1.3. (Erdős 1947)
Ist $r \geqslant 3$ und R die Ramseyzahl von r, so gilt

$$R > 2^{r/2}.$$

Beweis. Für $r = 3$ ist trivialerweise $R \geqslant 3 > 2^{3/2}$; im Folgenden sei $r \geqslant 4$. Wir zeigen, dass für jedes $n \leqslant 2^{r/2}$ die Wahrscheinlichkeiten $P[\,\alpha(G) \geqslant r\,]$ und $P[\,\omega(G) \geqslant r\,]$ für $G \in \mathcal{G}(n, \frac{1}{2})$ beide kleiner als $\frac{1}{2}$ sind.

Nach Lemma 9.1.2 und der analogen Aussage für $\omega(G)$ gilt wegen $p = q = \frac{1}{2}$ (und $r! > 2^r$ für $r \geqslant 4$) für $n \leqslant 2^{r/2}$ in der Tat

$$\begin{aligned} P[\,\alpha(G) \geqslant r\,],\ P[\,\omega(G) \geqslant r\,] &\leqslant \binom{n}{r} \left(\tfrac{1}{2}\right)^{\binom{r}{2}} \\ &< (n^r/2^r)\, 2^{-\frac{1}{2}r(r-1)} \\ &\leqslant (2^{r^2/2}/2^r)\, 2^{-\frac{1}{2}r(r-1)} \\ &= 2^{-r/2} \\ &< \tfrac{1}{2}\,. \end{aligned}$$

□

Unsere vertrauten Invarianten wie Durchschnittsgrad, Zusammenhang, Taillenweite, Durchmesser, chromatische Zahl usw. werden im Kontext von Zufallsgraphen in natürlicher Weise zu nicht negativen *Zufallsgrößen* auf $\mathcal{G}(n,p)$, d.h. zu Abbildungen *Zufallsgröße*

$$X\colon \mathcal{G}(n,p) \to [0,\infty)\,.$$

Der *Erwartungswert* oder *Mittelwert* der Zufallsgröße X ist die Zahl *Erwartungswert*

$$E(X) := \sum_{G \in \mathcal{G}(n,p)} P(\{G\}) \cdot X(G)\,. \qquad E(X)$$

Ganz wichtig für die Berechnung von Mittelwerten ist, dass dieser Operator E linear ist: für Zufallsgrößen X, Y auf $\mathcal{G}(n,p)$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt stets $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$ und $E(\lambda X) = \lambda E(X)$.

Die Berechnung des Mittelwertes einer Zufallsgröße $X \geqslant 0$ kann ein einfaches Hilfsmittel sein, die Existenz von Graphen mit einer gewünschten Eigenschaft $\mathcal{P}$ nachzuweisen, für die X einen bestimmten Wert unterschreitet. Liegt nämlich der Mittelwert von X niedrig, so kann $X(G)$ nur für wenige Graphen $G \in \mathcal{G}(n,p)$ groß sein (wegen $X(G) \geqslant 0$ für alle G);

ist aber $X(G)$ klein für viele $G \in \mathcal{G}(n,p)$, so können wir hoffen, unter diesen G auch eines mit der gewünschten Eigenschaft $\mathcal{P}$ zu finden. Diese einfache aber ganz wesentliche Idee liegt zahlreichen nicht konstruktiven Existenzbeweisen zugrunde; wir werden sie im Beweis des Satzes von Erdős näher kennenlernen.

Formal haben wir das folgende Lemma, dessen Beweis sofort aus der Definition des Erwartungswertes und der Additivität von P folgt:

[9.2.2] [9.4.1] [9.4.3]

Lemma 9.1.4. (Markov-Ungleichung)
Es sei $X \geqslant 0$ eine Zufallsgröße auf $\mathcal{G}(n,p)$ und $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Dann gilt

$$P[\,X \geqslant a\,] \leqslant E(X)/a\,.$$

Beweis.

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{G \in \mathcal{G}(n,p)} P(\{G\}) \cdot X(G) \\ &\geqslant \sum_{\substack{G \in \mathcal{G}(n,p) \\ X(G) \geqslant a}} P(\{G\}) \cdot X(G) \\ &\geqslant \sum_{\substack{G \in \mathcal{G}(n,p) \\ X(G) \geqslant a}} P(\{G\}) \cdot a \\ &= P[\,X \geqslant a\,] \cdot a\,. \end{aligned}$$

□

Da unsere Wahrscheinlichkeitsräume endlich sind, ist die Berechnung des Erwartungswertes von X häufig nichts anderes als eine elegante Verpackung der auch sonst in der Kombinatorik verbreiteten Technik des doppelten Zählens – wie wir sie etwa in den Beweisen von Korollar 3.2.10 und Satz 4.5.4 kennengelernt haben. Ist X beispielsweise eine Zufallsgröße auf $\mathcal{G}(n,p)$, die die Anzahl der Teilgraphen von G in einer gegebenen Menge $\mathcal{H}$ von Graphen auf V zählt, dann zählt $E(X)$ nach Definition die Anzahl von Paaren (G,H) mit $H \in \mathcal{H}$ und $H \subseteq G$, wobei jedes solche Paar mit der Wahrscheinlichkeit von $\{G\}$ gewichtet wird. Algorithmisch berechnen wir $E(X)$, indem wir die Graphen $G \in \mathcal{G}(n,p)$ in einer „äußeren Schleife“ durchlaufen und für jedes G eine „innere Schleife“ durchführen, in der wir alle Graphen $H \in \mathcal{H}$ betrachten und immer dann „$P(\{G\})$“ zählen, wenn $H \subseteq G$ ist. Genauso gut könnten wir diese Menge von gewichteten Paaren aber auch mit H in der äußeren und G in der inneren Schleife zählen: dies läuft darauf hinaus, die Wahrscheinlichkeiten $P[\,H \subseteq G\,]$ aufzuaddieren über alle $H \in \mathcal{H}$.

Um dies einmal exemplarisch durchzuführen, berechnen wir jetzt ausführlich die mittlere Anzahl von Kreisen gegebener Länge $k \geqslant 3$ in einem Zufallsgraphen $G \in \mathcal{G}(n,p)$. (Wir werden dies auch im Beweis

des Satzes von Erdős brauchen.) Es sei also $X\colon \mathcal{G}(n,p) \to \mathbb{N}$ die Zufallsgröße, die jedem Zufallsgraphen G die Anzahl seiner zu C^k isomorphen Teilgraphen zuordnet. Zur Abkürzung setzen wir X

$$(n)_k := n\,(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)\,; \qquad (n)_k$$

dies ist die Anzahl der Folgen k verschiedener Elemente einer gegebenen n-elementigen Menge.

Lemma 9.1.5. *Die mittlere Anzahl von Kreisen der Länge k in $G \in \mathcal{G}(n,p)$ beträgt* [9.2.2] [9.4.3]

$$E(X) = \frac{(n)_k}{2k}\, p^k.$$

Beweis. Für jeden Kreis $C = C^k$ mit Ecken aus $V = \{0,\dots,n-1\}$ (der Eckenmenge der Graphen aus $\mathcal{G}(n,p)$) bezeichne $X_C\colon \mathcal{G}(n,p) \to \{0,1\}$ die sogenannte *charakteristische Zufallsgröße* von C: *charakteristische Zufallsgröße*

$$X_C\colon\ G \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } C \subseteq G \text{ ist;} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Da die Zufallsgröße X_C als positiven Wert lediglich 1 annimmt, ist ihr Erwartungswert gleich dem Maß $P(X_C^{-1}(1))$ der Menge aller Graphen aus $\mathcal{G}(n,p)$, die C enthalten. Dies ist natürlich nichts anderes als die Wahrscheinlichkeit, dass C ein Kreis in G ist:

$$E(X_C) = P\,[\,C \subseteq G\,] = p^k. \tag{1}$$

Wieviele solche Kreise $C = v_0 \dots v_{k-1}v_0$ gibt es? Da es $(n)_k$ Folgen $v_0 \dots v_{k-1}$ verschiedener Ecken aus V gibt und jeder Kreis durch $2k$ dieser Folgen bezeichnet wird, gibt es $(n)_k/2k$ solche Kreise.

Unsere Zufallsgröße X ordnet jedem Graphen G die Anzahl der Kreise der Länge k in G zu. Dies ist offenbar die Summe aller Werte $X_C(G)$, wobei C die $(n)_k/2k$ Kreise der Länge k mit Ecken aus V durchläuft:

$$X = \sum_C X_C\,.$$

Wegen der Linearität des Erwartungswertes gilt daher mit (1)

$$E(X) = E\Big(\sum_C X_C\Big) = \sum_C E(X_C) = \frac{(n)_k}{2k}\, p^k,$$

wie behauptet. □

9.2 Die probabilistische Methode

Die sogenannte *probabilistische Methode* in der Diskreten Mathematik besteht ganz allgemein in dem folgenden Ansatz: um die Existenz eines Objekts mit einer gewünschten Eigenschaft nachzuweisen, definiert man auf einer größeren (und jedenfalls nicht leeren) Menge von Objekten einen Wahrscheinlichkeitsraum und zeigt dann, dass ein Element dieses Raumes mit positiver Wahrscheinlichkeit die gewünschte Eigenschaft hat. Die betrachteten Objekte können dabei ganz verschiedenartig sein: Partitionen oder Ordnungen der Eckenmenge eines gegebenen Graphen treten genauso natürlich auf wie Abbildungen, Einbettungen, oder eben auch Graphen selbst. In diesem Abschnitt stellen wir die probabilistische Methode exemplarisch dar an dem Beweis, aus dem sie geboren wurde: dem Beweis des Satzes von Erdős über die Existenz von Graphen mit hoher Taillenweite und chromatischer Zahl.

Der Satz von Erdős besagt, dass es zu jedem $k \in \mathbb{N}$ einen Graphen G mit Taillenweite $g(G) > k$ und chromatischer Zahl $\chi(G) > k$ gibt.

kurz
groß/klein

Nennen wir Kreise der Länge $\leqslant k$ *kurz* und Mengen von $|G|/k$ oder mehr Ecken von G *groß*, so reicht es, einen Graphen G ohne kurze Kreise und ohne große unabhängige Eckenmengen zu finden: die Farbklassen einer jeden Eckenfärbung von G sind dann klein, und wir brauchen mehr als k Farben um ganz G zu färben.

Wie finden wir einen solchen Graphen? Wählen wir p klein genug, so werden die Zufallsgraphen aus $\mathcal{G}(n,p)$ mit hoher Wahrscheinlichkeit keine (kurzen) Kreise haben. Wählen wir p groß genug, so werden kaum große unabhängige Eckenmengen auftreten. Die Frage lautet also: überlappen sich diese beiden Größenordnungsbereiche von p, d.h. können wir p so wählen, dass es (für große n) gleichzeitig klein genug für $P[\,g \leqslant k\,] < \frac{1}{2}$ und groß genug für $P[\,\alpha \geqslant n/k\,] < \frac{1}{2}$ ist? Wenn ja, so enthält $\mathcal{G}(n,p)$ mindestens einen Graphen ohne kurze Kreise und ohne große unabhängige Eckenmengen.

Leider ist eine solche Wahl von p nicht möglich: die beiden Bereiche für p überlappen einander nicht! Wie wir in Abschnitt 9.4 sehen werden, müssen wir p unterhalb von n^{-1} halten, um kurze Kreise zu vermeiden—doch treten für solche p dann auch bereits überhaupt keine Kreise mehr auf (Übung 19), d.h. der Graph ist bipartit und enthält somit mindestens $n/2$ unabhängige Ecken.

Was tun? Die entscheidende Idee ist jetzt die folgende. Wir wählen p in der Tat etwas größer als n^{-1}, um einen Faktor n^ϵ, aber wir wählen dieses ϵ so klein, dass $G \in \mathcal{G}(n,p)$ mit hoher Wahrscheinlichkeit nur *wenige* kurze Kreise enthält – selbst gemessen an n. Löschen wir dann aus jedem dieser Kreise eine Ecke, so enthält der entstehende Graph H keine kurzen Kreise mehr, aber seine Unabhängigkeitszahl $\alpha(H)$ ist weiterhin nicht größer als die von G. Da H nicht viel kleiner ist als G,

hat damit auch H eine hohe chromatische Zahl, und wir haben den gesuchten Graphen gefunden.

Zeigen wir also zunächst, dass $G \in \mathcal{G}(n,p)$ mit $p = n^{\epsilon-1}$ für beliebig kleines $\epsilon > 0$ „fast sicher“ keine großen unabhängigen Eckenmengen enthält. Genauer beweisen wir das folgende etwas stärkere Lemma:

Lemma 9.2.1. *Es seien $k > 0$ und $p = p(n)$ gegeben. Ist $p \geqslant (6k \ln n)n^{-1}$ für alle hinreichend großen n, so gilt*

$$\lim_{n\to\infty} P[\,\alpha \geqslant \tfrac{1}{2}n/k\,] = 0\,.$$

Beweis. Für alle $n, r \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant r \geqslant 2$ und $G \in \mathcal{G}(n,p)$ gilt nach Lemma 9.1.2 (9.1.2)

$$\begin{aligned} P[\,\alpha \geqslant r\,] &\leqslant \binom{n}{r} q^{\binom{r}{2}} \\ &\leqslant n^r q^{\binom{r}{2}} \\ &= \left(nq^{(r-1)/2}\right)^r \\ &\leqslant \left(ne^{-p(r-1)/2}\right)^r, \end{aligned}$$

wobei die letzte Ungleichung aus der Tatsache folgt, dass $1-p \leqslant e^{-p}$ ist für alle p. (Vergleiche die Funktionen $x \mapsto e^x$ und $x \mapsto x+1$ für $x = -p$.) Ist nun $p \geqslant (6k \ln n)n^{-1}$ und $r \geqslant \frac{1}{2}n/k$, so gilt für den Ausdruck unter dem Exponenten:

$$\begin{aligned} ne^{-p(r-1)/2} &= ne^{-pr/2+p/2} \\ &\leqslant ne^{-(3/2)\ln n + p/2} \\ &\leqslant n\, n^{-3/2}\, e^{1/2} \\ &= \sqrt{e}\,/\sqrt{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\,. \end{aligned}$$

Gilt $p \geqslant (6k \ln n)n^{-1}$ für große n, so folgt mit $r := \lceil \frac{1}{2}n/k \rceil$

$$\lim_{n\to\infty} P[\,\alpha \geqslant \tfrac{1}{2}n/k\,] = \lim_{n\to\infty} P[\,\alpha \geqslant r\,] = 0\,,$$

wie behauptet. □

Satz 9.2.2. (Erdős 1959) [7.2.3]
Zu jedem $k \in \mathbb{N}$ gibt es einen Graphen H mit Taillenweite $g(H) > k$ und chromatischer Zahl $\chi(H) > k$.

(9.1.4)
(9.1.5)
p, ϵ, X

Beweis. Es sei ϵ mit $0 < \epsilon < 1/k$ fest gewählt, und $p := n^{\epsilon-1}$. Wir bezeichnen mit $X(G)$ die Anzahl der kurzen Kreise in einem Zufallsgraphen $G \in \mathcal{G}(n,p)$, also die Anzahl seiner Kreise der Länge $\leqslant k$.

Nach Lemma 9.1.5 gilt

$$E(X) = \sum_{i=3}^{k} \frac{(n)_i}{2i} p^i \leqslant \tfrac{1}{2} \sum_{i=3}^{k} n^i p^i \leqslant \tfrac{1}{2}(k-2)\, n^k p^k\,;$$

beachte, dass $(np)^i \leqslant (np)^k$ ist wegen $np = n^\epsilon \geqslant 1$. Mit Lemma 9.1.4 folgt

$$\begin{aligned} P[\,X \geqslant n/2\,] &\leqslant E(X)/(n/2) \\ &\leqslant (k-2)\, n^{k-1} p^k \\ &= (k-2)\, n^{k-1} n^{(\epsilon-1)k} \\ &= (k-2)\, n^{k\epsilon-1}. \end{aligned}$$

Da $k\epsilon - 1 < 0$ ist nach Wahl von ϵ, folgt hieraus

$$\lim_{n\to\infty} P[\,X \geqslant n/2\,] = 0\,.$$

n

Es sei nun n so groß, dass $P[\,X \geqslant n/2\,] < \frac{1}{2}$ und $P[\,\alpha \geqslant \frac{1}{2}n/k\,] < \frac{1}{2}$ gilt; letzteres ist möglich nach Wahl von p und Lemma 9.2.1. Dann gibt es einen Graphen $G \in \mathcal{G}(n,p)$ mit $\alpha(G) < \frac{1}{2}n/k$ und mit weniger als $n/2$ kurzen Kreisen. Aus jedem kurzen Kreis von G entfernen wir eine Ecke. Der entstehende Graph H hat noch mindestens $n/2$ Ecken und enthält keine kurzen Kreise mehr, d.h. es gilt $g(H) > k$. Nach Wahl von G gilt weiter

$$\chi(H) \geqslant \frac{|H|}{\alpha(H)} \geqslant \frac{n/2}{\alpha(G)} > k\,.$$

□

Korollar 9.2.3. *Es gibt Graphen mit beliebig hoher Taillenweite und gleichzeitig beliebig hohen Werten der Invarianten κ, ε und δ.*

(0.4.3)
(4.2.3)

Beweis mit Korollar 4.2.3 und Satz 0.4.3. □

9.3 Eigenschaften fast aller Graphen

Eine Klasse von Graphen, die mit jedem Graphen G auch alle zu G isomorphen Graphen enthält, nennen wir wie üblich eine *Grapheneigenschaft*. Ist $p = p(n)$ eine fest gewählte Funktion (möglicherweise konstant), so können wir für eine Grapheneigenschaft $\mathcal{P}$ untersuchen, wie sich die Wahrscheinlichkeit $P[\,G \in \mathcal{P}\,]$ für $G \in \mathcal{G}(n,p)$ verhält, wenn n gegen unendlich geht. Strebt diese Wahrscheinlichkeit gegen 1, so sagen wir, dass *fast alle* (oder *fast jedes*) $G \in \mathcal{G}(n,p)$ die Eigenschaft $\mathcal{P}$ haben; strebt sie gegen 0, so hat *fast kein* $G \in \mathcal{G}(n,p)$ die Eigenschaft $\mathcal{P}$. (In Lemma 9.2.1 haben wir also bewiesen, dass für gewisse p fast kein $G \in \mathcal{G}(n,p)$ mehr als $\frac{1}{2}n/k$ unabhängige Ecken enthält.)

Grapheneigenschaft

fast alle

fast kein

Als einfaches Beispiel wollen wir jetzt zeigen, dass für konstantes p jeder fest vorgegebene abstrakte Graph[3] H Untergraph fast aller Graphen ist:

Proposition 9.3.1. *Für konstantes $p \notin \{0,1\}$ ist jeder Graph H ein Untergraph fast aller Graphen $G \in \mathcal{G}(n,p)$.*

Beweis. Es sei H gegeben und $k := |H|$. Ist $U \subseteq \{0,\dots,n-1\}$ eine feste Menge von k Ecken von G, so ist $G[U]$ mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit $r > 0$ zu H isomorph. Diese Wahrscheinlichkeit r ist abhängig von p, nicht aber von n (warum nicht?). In G gibt es $\lfloor n/k \rfloor$ disjunkte solche Eckenmengen U. Die Wahrscheinlichkeit, dass keines der entsprechenden $G[U]$ zu H isomorph ist, beträgt $(1-r)^{\lfloor n/k \rfloor}$, da diese Ereignisse wegen der Disjunktheit der Kantenmengen $[U]^2$ unabhängig sind. Insgesamt haben wir also

$$P[\,H \not\subseteq G \text{ induziert}\,] \leqslant (1-r)^{\lfloor n/k \rfloor} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\,,$$

woraus die Behauptung folgt. □

Das folgende Lemma erlaubt es, für eine ganze Reihe natürlicher Eigenschaften ganz einfach zu beweisen, dass fast jeder Graph sie hat. Für $i,j \in \mathbb{N}$ bezeichne $\mathcal{P}_{i,j}$ die Eigenschaft, dass der Graph mindestens $i+j$ Ecken hat und zu disjunkten Eckenmengen U,W mit $|U| \leqslant i$ und $|W| \leqslant j$ stets eine Ecke $v \notin U \cup W$ enthält, die zu allen Ecken aus U aber zu keiner Ecke aus W benachbart ist.

$\mathcal{P}_{i,j}$

Lemma 9.3.2. *Für konstantes $p \notin \{0,1\}$ und $i,j \in \mathbb{N}$ hat stets fast jeder Graph $G \in \mathcal{G}(n,p)$ die Eigenschaft $\mathcal{P}_{i,j}$.*

[3] „Abstrakt“ bedeutet, dass wir nur die Kenntnis des Isomorphietyps von H voraussetzen, nicht die seiner konkreten Ecken- und Kantenmenge. Das Wort deutet somit an, dass wir mit „Untergraph“ hier wieder wie üblich „isomorph zu einem Untergraphen“ meinen.

Beweis. Die Wahrscheinlichkeit, dass für gegebene U, W eine feste Ecke $v \in G - (U \cup W)$ zu allen Ecken aus U aber zu keiner Ecke aus W benachbart ist, beträgt

$$p^{|U|}q^{|W|} \geqslant p^i q^j.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass für diese U, W keine geeignete Ecke v existiert, beträgt also (für $n \geqslant i+j$)

$$(1 - p^{|U|}q^{|W|})^{n-|U|-|W|} \leqslant (1 - p^i q^j)^{n-i-j},$$

da die entsprechenden Ereignisse für verschiedene v unabhängig sind. Nun gibt es nicht mehr als n^{i+j} Paare solcher Mengen U und W in $V(G)$. (Kodiere Mengen U mit weniger als i Elementen einfach durch nichtinjektive Abbildungen $\{0, \dots, i-1\} \to \{0, \dots, n-1\}$, etc.) Die Wahrscheinlichkeit, dass sich darunter ein Paar ohne geeignetes v befindet, beträgt höchstens

$$n^{i+j}(1 - p^i q^j)^{n-i-j},$$

und dieser Wert geht wegen $1 - p^i q^j < 1$ für $n \to \infty$ gegen null. □

Korollar 9.3.3. *Für konstantes $p \notin \{0, 1\}$ und $k \in \mathbb{N}$ ist fast jeder Graph in $\mathcal{G}(n, p)$ k-zusammenhängend.*

Beweis. Nach Lemma 9.3.2 reicht es zu zeigen, dass jeder Graph mit $\mathcal{P}_{2,k-1}$ notwendig k-zusammenhängend ist. Dies ist aber klar: ist W eine Menge von weniger als k Ecken, so haben nach Definition von $\mathcal{P}_{2,k-1}$ je zwei weitere Ecken x, y einen gemeinsamen Nachbarn $v \notin W$; insbesondere kann W die Ecken x, y nicht trennen. □

Im Beweis von Korollar 9.3.3 haben wir wesentlich mehr gezeigt, als verlangt war: statt zu je zwei Ecken $x, y \notin W$ die Existenz irgendeines W vermeidenden Weges $x \dots y$ nachzuweisen, haben wir gezeigt, dass x und y einen gemeinsamen Nachbarn außerhalb von W haben; die zum Zusammenhang notwendigen verbindenden Wege hatten also alle die Länge 2. Dass nach diesem Kunstgriff die zu beweisende Behauptung leicht aus Lemma 9.3.2 folgte, ist kein Zufall sondern entspricht einem allgemeineren Prinzip: ist eine Grapheneigenschaft so formulierbar, dass sich die darin auftretenden Quantoren nur auf Ecken des Graphen beziehen, nicht auf Mengen oder Folgen von Ecken,[4] so ist die Eigenschaft oder ihr Komplement stets die direkte Konsequenz einer Eigenschaft $\mathcal{P}_{i,j}$ und gilt daher für fast alle oder fast keinen Graphen $G \in \mathcal{G}(n, p)$. (Siehe die Übungen für weitere Beispiele.)

Als letztes Beispiel einer Eigenschaft fast aller Graphen für festes p zeigen wir noch, dass fast jeder Graph eine erstaunlich hohe chromatische Zahl hat – relativ nahe am theoretischen Maximum, seiner Eckenzahl:

[4] Für Logiker: ist die Eigenschaft gegeben durch einen Satz erster Ordnung in der formalen Sprache der Graphentheorie

Proposition 9.3.4. *Für konstantes $p \notin \{0,1\}$ und jedes $\epsilon > 0$ hat fast jeder Graph $G \in \mathcal{G}(n,p)$ eine chromatische Zahl*

$$\chi(G) > \frac{\log(1/q)}{2+\epsilon} \cdot \frac{n}{\log n}\,.$$

Beweis. Nach Lemma 9.1.2 gilt für feste $n \geqslant k \geqslant 2$: (9.1.2)

$$\begin{aligned} P[\,\alpha \geqslant k\,] &\leqslant \binom{n}{k} q^{\binom{k}{2}} \\ &\leqslant n^k q^{\binom{k}{2}} \\ &= q^{k\frac{\log n}{\log q} + \frac{1}{2}k(k-1)} \\ &= q^{\frac{k}{2}\left(-\frac{2\log n}{\log(1/q)} + k - 1\right)}. \end{aligned}$$

Für

$$k := (2+\epsilon)\,\frac{\log n}{\log(1/q)}$$

geht der Exponent dieses Ausdrucks mit n gegen unendlich, der Ausdruck selbst also gegen null. Die Farbklassen fast aller $G \in \mathcal{G}(n,p)$ enthalten somit bei jeder Färbung alle weniger als k Ecken, d.h. es sind mehr als

$$\frac{n}{k} = \frac{\log(1/q)}{2+\epsilon} \cdot \frac{n}{\log n}$$

Farben zur Färbung von G nötig. □

Nach einem bemerkenswerten Satz von Bollobás ist Proposition 9.3.4 scharf im folgenden Sinne: ersetzen wir ϵ durch $-\epsilon$, so verwandelt sich die angegebene untere Schranke für die chromatische Zahl von G in eine obere Schranke!

Bei allen Ergebnissen dieses Abschnitts fällt auf, dass der Wert von p gar keine Rolle spielte: hat fast jeder Graph in $\mathcal{G}(n, \frac{1}{2})$ eine der betrachteten Eigenschaften, so gilt dies auch für fast jeden Graphen in $\mathcal{G}(n, 1/1000)$. Bei der Untersuchung einer Grapheneigenschaft sind jedoch oft besonders die Graphen interessant, die die Eigenschaft nur „gerade“ oder „gerade nicht“ haben: in den Grenzbereichen treten andere Eigenschaften, zu denen die betrachtete Eigenschaft in Beziehung gesetzt werden soll, am ehesten auf (siehe den Beweis des Satzes von Erdős). Für viele Eigenschaften – und so erklärt sich das obige Phänomen – liegt die kritische Größenordnung von p für ihr Auftreten jedoch weit unterhalb einer jeden konstanten Funktion $p = p(n)$.

Lässt man andererseits p mit n variieren, so erschließt sich ein faszinierendes Bild. Während für Kantenwahrscheinlichkeiten $p = p(n)$

wesentlich unterhalb von n^{-2} fast jeder Graph nur isolierte Ecken hat, nimmt die Struktur jeweils fast aller Graphen $G \in \mathcal{G}(n,p)$ mit größerem p immer weiter zu: etwa ab $p = \sqrt{n}\,n^{-2}$ hat fast jeder Graph die ersten Komponenten mit mehr als zwei Ecken, diese wachsen zu Bäumen, und ab $p = n^{-1}$ tauchen die ersten Kreise auf. Die Kreise haben schon bald zahlreiche kreuzende Sehnen, d.h. die Graphen sind fast sicher nicht mehr plättbar. Gleichzeitig wächst eine ihrer Komponenten stärker an als alle anderen, bis sie diese etwa bei $p = (\log n)n^{-1}$ verschlingt und die Graphen zusammenhängend werden. Kaum später, bei $p = (1+\epsilon)(\log n)n^{-1}$, haben dann fast alle Graphen bereits einen Hamiltonkreis!

Diese *Evolution* der Zufallsgraphen vollzieht sich in Schüben: die genannten Wahrscheinlichkeiten sind Schwellenwerte, unterhalb derer fast kein Graph und oberhalb derer fast jeder Graph die betreffende Eigenschaft hat (z.B. einen Kreis enthält). Genauer nennen wir eine reelle Funktion $t = t(n)$ mit $t(n) \neq 0$ für alle n eine *Schwellenfunktion* für eine Grapheneigenschaft $\mathcal{P}$, wenn für jedes $p = p(n)$ und $G \in \mathcal{G}(n,p)$ gilt:

Schwellenfunktion

$$\lim_{n\to\infty} P[\,G \in \mathcal{P}\,] = \begin{cases} 0 & \text{falls } p/t \to 0 \text{ für } n \to \infty \\ 1 & \text{falls } p/t \to \infty \text{ für } n \to \infty. \end{cases}$$

Gibt es zu $\mathcal{P}$ eine Schwellenfunktion t, so ist natürlich auch jedes positive Vielfache ct von t eine Schwellenfunktion für $\mathcal{P}$; Schwellenfunktionen sind also stets nur bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmt.

Welche Grapheneigenschaften besitzen eine Schwellenfunktion? Natürliche Kandidaten für Eigenschaften mit Schwellenfunktion sind sogenannte *monotone* Eigenschaften: solche, die unter der Hinzufügung von Kanten abgeschlossen sind, die also mit jedem Graphen auch all seine Obergraphen auf der gleichen Eckenmenge enthalten. (Typische monotone Eigenschaften sind die Graphenklassen der Form $\{\,G \mid G \supseteq H\,\}$ zu gegebenem H; aber auch Zusammenhang etwa ist eine monotone Eigenschaft.) Und in der Tat haben Bollobás & Thomason (1987) bewiesen, dass – bis auf triviale Ausnahmen – alle monotonen Eigenschaften eine Schwellenfunktion haben! Im nächsten Abschnitt werden wir eine grundlegende Methode kennenlernen, wie man Schwellenfunktionen berechnen kann.

Diesen Abschnitt beenden wir mit einem kleinen Juwel: dem im Wesentlichen einzigen Satz über unendliche Zufallsgraphen. Es sei $\mathcal{G}(\aleph_0, p)$ definiert wie $\mathcal{G}(n,p)$ für $n = \aleph_0$, als der (Produkt-) Raum von Zufallsgraphen auf $\mathbb{N}$, deren Kanten unabhänging mit Wahrscheinlichkeit p gewählt werden.

Wie wir in Lemma 9.3.2 gesehen haben, hat für feste $i, j \in \mathbb{N}$ und konstantes $p \notin \{0,1\}$ fast jeder Graph in $\mathcal{G}(n,p)$ die Eigenschaft $\mathcal{P}_{i,j}$. Es wird daher nicht sonderlich überraschen, dass ein Zufallsgraph in $\mathcal{G}(\aleph_0, p)$ *fast sicher*, d.h. mit Wahrscheinlichkeit 1, all diese Eigenschaf-

fast sicher

ten zugleich hat. Im Folgenden schreiben wir $\mathcal{P}_\infty$ für den Durchschnitt aller Eigenschaften $\mathcal{P}_{i,j}$. $\mathcal{P}_\infty$

Satz 9.3.5. (Erdős and Rényi 1963)

(i) *Bis auf Isomorphie gibt es nur einen abzählbaren Graphen R mit der Eigenschaft $\mathcal{P}_\infty$.* R

(ii) *Für jedes $p \notin \{0,1\}$ ist ein Zufallsgraph $G \in \mathcal{G}(\aleph_0, p)$ mit Wahrscheinlichkeit 1 isomorph zu R.*

Beweis. (i) Für den Existenzbeweis konstruieren wir induktiv einen Graphen R mit der Eigenschaft $\mathcal{P}_\infty$. Es sei $R_0 := K^1$. Aus R_n gewinnen wir R_{n+1}, indem wir für jede Menge $U \subseteq V(R_n)$ eine neue Ecke hinzufügen und sie mit allen Ecken aus U aber keiner anderen Ecke verbinden. Insbesondere bilden die neuen Ecken eine unabhängige Eckenmenge in R_{n+1}. Nach Konstruktion hat $R := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} R_n$ die Eigenschaft $\mathcal{P}_\infty$.

Für den Eindeutigkeitsbeweis seien $R = (V, E)$ und $R' = (V', E')$ zwei Graphen mit festen Eckenaufzählungen, die beide die Eigenschaft $\mathcal{P}_\infty$ besitzen. Wir konstruieren eine Bijektion $\varphi\colon V \to V'$ induktiv, wobei wir in jedem Schritt $\varphi(v)$ für eine neue Ecke $v \in V$ definieren.

Bei jedem ungeraden Schritt betrachten wir die erste Ecke v in der Aufzählung von V, für die $\varphi(v)$ noch undefiniert ist. Es sei U die Menge der Nachbarn u von v in R, für die $\varphi(u)$ bereits definiert wurde. Diese Menge ist endlich. Vermöge $\mathcal{P}_\infty$ für R' finden wir eine Ecke $v' \in V'$, die in R' zu allen Ecken aus $\varphi(U)$ benachbart ist aber zu keiner anderen Ecke aus dem (endlichen) Bild von φ, und die auch selbst nicht im Bild von φ liegt. Wir setzen $\varphi(v) := v'$.

Bei jedem geraden Schritt des Definitionsprozesses gehen wir analog vor mit vertauschten Rollen für R und R': wir betrachten die erste Ecke v' in der Aufzählung von V', die noch nicht im Bild von φ liegt, und setzen $\varphi(v) = v'$ für eine neue Ecke v, die unter den Ecken, für die φ (bzw. φ^{-1}) bereits definiert wurde, die gleichen Nachbarn und Nicht-Nachbarn hat wie v'.

Da wir v und v' jeweils minimal wählen, wird die Bijektion auf ganz V und ganz V' definiert, und offensichtlich ist sie ein Isomorphismus.

(ii) Für je zwei feste disjunkte, endliche Mengen $U, W \subseteq \mathbb{N}$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Ecke $v \notin U \cup W$ nicht wie in $\mathcal{P}_\infty$ mit $U \cup W$ verbunden ist (zu jeder Ecke in U aber zu keiner in V), eine Zahl $r < 1$, die nur von U und W abhängt. Die Wahrscheinlichkeit, dass von k Ecken $v \notin U \cup W$ keine wie in $\mathcal{P}_\infty$ zu $U \cup W$ benachbart ist, ist dann r^k, was für $k \to \infty$ gegen null geht. Daher ist die Wahrscheinlichkeit, dass keine der unendlich vielen Ecken außerhalb von $U \cup W$ die Bedingung $\mathcal{P}_\infty$ für diese Mengen U und W erfüllt, gleich null.

Nun gibt es aber nur abzählbar viele Wahlen endlicher Eckenmengen U und W. Da die Vereinigung abzählbar vieler Teilmengen von $\mathcal{G}(\aleph_0, p)$ mit Maß null wiederum das Maß null hat, ist die Wahrscheinlichkeit, dass

$\mathcal{P}_\infty$ für *irgendwelche* Mengen U und W fehlschlägt, immer noch null. Somit hat $G \in \mathcal{G}(\aleph_0, p)$ die Eigenschaft $\mathcal{P}_\infty$ mit Wahrscheinlichkeit 1. Zusammen mit (i) bedeutet dies, dass fast sicher $G \simeq R$ gilt. □

Wie können wir uns das Paradox erklären, dass das Ergebnis unendlich vieler unabhängiger Einzelwahlen von Kanten dermaßen vorhersagbar ist? Die Antwort liegt natürlich darin, dass die Eindeutigkeit von R nur bis auf Isomorphie gilt. Einen Automorphismus für einen unendlichen Graphen mit der Eigenschaft $\mathcal{P}_\infty$ zu konstruieren ist aber viel einfacher, als einen Automorphismus eines endlichen Zufallsgraphen zu finden. So betrachtet drückt Satz 9.3.5 nicht einen Mangel an Vielfalt unendlicher Zufallsgraphen aus, sondern vielmehr das hohe Maß an Symmetrie, die diese Vielfalt verwischt, wenn man die Graphen $G \in \mathcal{G}(\aleph_0, p)$ nur bis auf Isomorphie betrachtet.

9.4 Schwellenfunktionen und zweite Momente

Betrachten wir einmal eine Grapheneigenschaft der Form

$$\mathcal{P} = \{\, G \mid X(G) \geqslant 1 \,\},$$

$X \geqslant 0$ wobei $X \geqslant 0$ eine Zufallsgröße auf $\mathcal{G}(n, p)$ ist. Viele Eigenschaften lassen sich auf natürliche Weise so formulieren: dass G zusammenhängend ist, ist beispielsweise äquivalent zu $X(G) \geqslant 1$ wenn X die Anzahl der Spannbäume in G bezeichnet.

Wie könnte man beweisen, dass $\mathcal{P}$ eine Schwellenfunktion t besitzt? Jeder solche Beweis hat zwei Teile: dass für kleines p (verglichen mit t) fast kein $G \in \mathcal{G}(n, p)$ die Eigenschaft $\mathcal{P}$ hat, und dass für großes p fast jedes G die Eigenschaft $\mathcal{P}$ hat. Da $X \geqslant 0$ ist, so können wir uns beim ersten Teil des Beweises auf die Markov-Ungleichung stützen und statt der Wahrscheinlichkeit $P[\, X \geqslant 1 \,]$ den Erwartungswert $E(X)$ nach oben abschätzen: ist $E(X)$ deutlich kleiner als 1, so kann $X(G)$ nur für wenige $G \in \mathcal{G}(n, p)$ mindestens 1 sein, im Falle von $E(X) \to 0$ (für $n \to \infty$) für fast keins. Wie der Beweis von Lemma 9.1.5 exemplarisch zeigt, ist die Berechnung eines Erwartungswertes zudem meist einfacher als die Berechnung einer Wahrscheinlichkeit: ohne uns um Dinge wie die Unabhängigkeit oder Unvereinbarkeit von Ereignissen zu scheren, können wir die Erwartungswerte einzelner Zufallsgrößen – z.B. charakteristischer Zufallsgrößen – einfach addieren, um den Erwartungswert ihrer Summe zu berechnen.

Beim zweiten Teil des Beweises liegen die Dinge anders. Um zu zeigen, dass $P[\, X \geqslant 1 \,]$ groß ist, reicht es nicht, einfach $E(X)$ nach unten abzuschätzen: $E(X)$ kann auch dann groß werden, wenn X auf einem Teil von $\mathcal{G}(n, p)$, sagen wir der Hälfte, sehr groß ist und sonst

null.[5] Um $P[X \geqslant 1] \to 1$ zu beweisen, müssen wir daher zeigen, dass dies nicht der Fall ist, dass also X nicht zu oft zu stark von seinem Mittelwert abweicht.

Genau hierzu dient das folgende elementare Hilfsmittel aus der Wahrscheinlichkeitstheorie. Wie üblich schreiben wir

$$\mu := E(X) \qquad \mu$$

und definieren $\sigma \geqslant 0$ durch

$$\sigma^2 := E\big((X-\mu)^2\big)\,; \qquad \sigma^2$$

die Größe σ^2, die *Varianz*[6] von X, ist also die mittlere quadratische Abweichung der Zufallsgröße X von ihrem Mittelwert. Wegen der Linearität des Erwartungswertes ist

$$\sigma^2 = E(X^2 - 2\mu X + \mu^2) = E(X^2) - \mu^2.$$

Beachte, dass μ und σ sich jeweils auf eine Zufallsvariable eines konkreten Wahrscheinlichkeitsraums beziehen; in unserem Fall sind dies die Räume $\mathcal{G}(n,p)$, d.h. μ und σ hängen von n ab.

Das folgende Lemma besagt nun, dass X jeweils nur für wenige G stark von seinem Mittelwert abweichen kann:

Lemma 9.4.1. (Tschebyschev-Ungleichung)
Für jedes reelle $\lambda > 0$ gilt

$$P\big[\,|X-\mu| \geqslant \lambda\,\big] \;\leqslant\; \sigma^2/\lambda^2.$$

Beweis. Nach Lemma 9.1.4 und Definition von σ^2 gilt (9.1.4)

$$P\big[\,|X-\mu| \geqslant \lambda\,\big] = P\big[\,(X-\mu)^2 \geqslant \lambda^2\,\big] \leqslant \sigma^2/\lambda^2.$$

□

Bei einem Beweis, dass $X(G) \geqslant 1$ gilt für fast alle $G \in \mathcal{G}(n,p)$, hilft die Tschebyschev-Ungleichung nun wie folgt:

Lemma 9.4.2. *Gilt $\mu > 0$ für alle hinreichend großen n, und $\sigma^2/\mu^2 \to 0$ für $n \to \infty$, so gilt $X(G) > 0$ für fast alle $G \in \mathcal{G}(n,p)$.*

[5] Für p zwischen n^{-1} und $(\log n)n^{-1}$ beispielsweise hat fast jedes $G \in \mathcal{G}(n,p)$ eine isolierte Ecke (und insbesondere keinen Spannbaum), aber die mittlere Anzahl von Spannbäumen in G geht für wachsendes n gegen unendlich. Siehe Übungen.

[6] auch: *zentrales Moment zweiter Ordnung*, oder kurz *zweites Moment*

Beweis. Für Graphen G mit $X(G) = 0$ ist $|X(G) - \mu| = \mu$. Mit $\lambda := \mu$ folgt daher aus Lemma 9.4.1

$$P\big[\, X = 0 \big] \;\leqslant\; P\big[\, |X - \mu| \geqslant \mu \,\big] \;\leqslant\; \sigma^2/\mu^2 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\,.$$

Wegen $X \geqslant 0$ bedeutet dies, dass $X(G) > 0$ gilt für fast alle $G \in \mathcal{G}(n,p)$. □

$\mathcal{P}_H$

Zu gegebenem Graphen H bezeichne $\mathcal{P}_H$ die Grapheneigenschaft, einen zu H isomorphen Teilgraphen zu enthalten. Als Hauptergebnis dieses Abschnitts beweisen wir jetzt einen Satz, der uns Schwellenfunktionen für alle Eigenschaften der Form $\mathcal{P}_H$ liefert.

$H;\ k, \ell$
X

Es sei H gegeben, wir setzen $k := |H|$ und $\ell := \|H\|$ und nehmen an, dass $\ell \geqslant 1$ ist. Mit $X(G)$ bezeichnen wir die Anzahl der zu H isomorphen Teilgraphen von G. Zu gegebenem $n \in \mathbb{N}$ sei $\mathcal{H}$ die Menge aller zu H isomorphen Graphen auf Teilmengen von $\{0, \dots, n-1\}$, der Eckenmenge der Graphen aus $\mathcal{G}(n,p)$:

$\mathcal{H}$

$$\mathcal{H} := \big\{\, H' \mid H' \simeq H,\ V(H') \subseteq \{0, \dots, n-1\} \,\big\}\,.$$

Für $H' \in \mathcal{H}$ und $G \in \mathcal{G}(n,p)$ bedeute der Ausdruck „$H' \subseteq G$“ im Folgenden, dass H' selbst – nicht nur eine isomorphe Kopie von H' – Teilgraph von G ist.

h

Die Anzahl der zu H isomorphen Graphen auf einer festen Menge von k Ecken bezeichnen wir mit h; offensichtlich gilt $h \leqslant k!$. Da es $\binom{n}{k}$ mögliche Eckenmengen für die Graphen aus $\mathcal{H}$ gibt, gilt somit

$$|\mathcal{H}| = \binom{n}{k} h \leqslant \binom{n}{k} k! \leqslant n^k. \tag{1}$$

γ

Zu gegebener Kantenwahrscheinlichkeit $p = p(n)$ und einer potentiellen Schwellenfunktion $t = t(n)$ schreiben wir $\gamma := p/t$. Unser erstes Lemma behandelt den Fall, dass γ gegen null geht:

Lemma 9.4.3. *Ist $t = n^{-1/\varepsilon(H)}$, und gilt $\gamma \to 0$ für $n \to \infty$, so liegt fast kein $G \in \mathcal{G}(n,p)$ in $\mathcal{P}_H$.*

(9.1.4)
(9.1.5)

Beweis. Nach Wahl von t und Definition von γ gilt

$$p = \gamma t = \gamma n^{-k/\ell}. \tag{2}$$

Unser Ziel ist es, eine obere Schranke für $E(X)$ zu finden und zu zeigen, dass diese für $n \to \infty$ gegen null geht. Zunächst erhalten wir wie im Beweis von Lemma 9.1.5 durch doppeltes Zählen

$$E(X) = \sum_{H' \in \mathcal{H}} P\,[\, H' \subseteq G \,]\,. \tag{3}$$

Wegen $\|H\| = \ell$ gilt für jedes feste $H' \in \mathcal{H}$

$$P[H' \subseteq G] \;=\; p^\ell. \tag{4}$$

Zusammen erhalten wir

$$E(X) \underset{(3,4)}{=} |\mathcal{H}|\, p^\ell \underset{(1,2)}{\leqslant} n^k (\gamma n^{-k/\ell})^\ell = \gamma^\ell.$$

Aus $\gamma \to 0$ für $n \to \infty$ folgt dann

$$P[G \in \mathcal{P}_H] \;=\; P[X \geqslant 1] \;\leqslant\; E(X) \;\leqslant\; \gamma^\ell \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

mit der Markov-Ungleichung (9.1.4). □

Im Gegensatz zu der Funktion t in Lemma 9.4.3 wird unsere Schwellenfunktion für $\mathcal{P}_H$ kein Ausdruck in $\varepsilon(H)$ sein, sondern in

$$\varepsilon'(H) := \max\{\, \varepsilon(H') \mid H' \subseteq H \,\}. \tag{$\varepsilon'(H)$}$$

Unser zweites Lemma behandelt den Fall $\gamma \to \infty$:

Lemma 9.4.4. *Ist $t = n^{-1/\varepsilon'(H)}$, und gilt $\gamma \to \infty$ für $n \to \infty$, so liegt fast jedes $G \in \mathcal{G}(n,p)$ in $\mathcal{P}_H$.*

Beweis. Nach unserer neuen Wahl von t und Definition von γ ist jetzt

$$p = \gamma n^{-1/\varepsilon'}, \tag{5}$$

wobei $\varepsilon' := \varepsilon'(H)$ sei. Wir werden jedoch weiterhin die Ungleichungen (3) und (4) aus dem Beweis von Lemma 9.4.3 benutzen, da sie nicht von unserer Wahl für p und t abhingen. (ε')

Dem Hauptteil des Beweises schicken wir eine kurze Rechnung voraus: für $n \geqslant k$ gilt

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} n^{-k} \;&=\; \frac{1}{k!}\left(\frac{n}{n} \cdots \frac{n-k+1}{n}\right) \\
&\geqslant\; \frac{1}{k!}\left(\frac{n-k+1}{n}\right)^k \\
&\geqslant\; \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{k-1}{k}\right)^k.
\end{aligned} \tag{6}$$

Wichtig für uns ist hieran, dass n^k für große n und beschränktes k den Term $\binom{n}{k}$ um nicht mehr als einen konstanten Faktor übertrifft.

Unser Ziel ist, Lemma 9.4.2 anzuwenden. Dazu müssen wir $\sigma^2/\mu^2 = \big(E(X^2) - \mu^2\big)/\mu^2$ nach oben beschränken. Wie in (3) erhalten wir

$$E(X^2) = \sum_{(H',H'')\in\mathcal{H}^2} P\,[\,H' \cup H'' \subseteq G\,]\,. \tag{7}$$

Berechnen wir also diese Wahrscheinlichkeiten $P\,[\,H' \cup H'' \subseteq G\,]$. Für beliebige $H', H'' \in \mathcal{H}$ ist

$$P\,[\,H' \cup H'' \subseteq G\,] \;=\; p^{2\ell - \|H' \cap H''\|}\,.$$

i Nach Definition von ε' gilt $\|H' \cap H''\| \leqslant i\varepsilon'$ für $i := |H' \cap H''|$; es folgt

$$P\,[\,H' \cup H'' \subseteq G\,] \;\leqslant\; p^{2\ell - i\varepsilon'}. \tag{8}$$

Die einzelnen Summanden aus (7) haben wir damit abgeschätzt – was aber folgt daraus für die Summe insgesamt? Da in (8) die Größe $i = |H' \cap H''|$ eingegangen ist, zerlegen wir die Menge $\mathcal{H}^2$, über die sich die Summe aus (7) erstreckt, in die Teilmengen

$\mathcal{H}_i^2$
$$\mathcal{H}_i^2 := \big\{\,(H',H'') \in \mathcal{H}^2 : |H' \cap H''| = i\,\big\}\,, \qquad i = 0, \ldots, k,$$

und berechnen für jedes $\mathcal{H}_i^2$ einzeln die entsprechende Summe

A_i
$$A_i := \sum\nolimits_i P\,[\,H' \cup H'' \subseteq G\,]\,.$$

$\sum_i$ (Hier, wie unten, steht $\sum_i$ für Summen über alle Paare $(H',H'') \in \mathcal{H}_i^2$.)

Für $i = 0$ sind H' und H'' disjunkt, die Ereignisse $H' \subseteq G$ und $H'' \subseteq G$ unabhängig. Somit gilt

$$\begin{aligned}
A_0 \;&=\; \sum\nolimits_0 P\,[\,H' \cup H'' \subseteq G\,] \\
&=\; \sum\nolimits_0 P\,[\,H' \subseteq G\,] \cdot P\,[\,H'' \subseteq G\,] \\
&\leqslant \sum_{(H',H'')\in\mathcal{H}^2} P\,[\,H' \subseteq G\,] \cdot P\,[\,H'' \subseteq G\,] \\
&=\; \Big(\sum_{H'\in\mathcal{H}} P\,[\,H' \subseteq G\,]\Big) \cdot \Big(\sum_{H''\in\mathcal{H}} P\,[\,H'' \subseteq G\,]\Big) \\
&\underset{(3)}{=}\; \mu^2. \qquad (9)
\end{aligned}$$

Es bleiben die A_i für $i \geqslant 1$ abzuschätzen. Zur Abkürzung schreiben $\sum'$ wir $\sum'$ statt $\sum_{H'\in\mathcal{H}}$ und $\sum''$ statt $\sum_{H''\in\mathcal{H}}$; dann ist $\sum_i$ nichts anderes als die geschachtelte Summe $\sum' \sum''_{|H'\cap H''|=i}$. Zu festem H' (für

das erste Summenzeichen $\sum'$) erstreckt sich das zweite Summenzeichen dabei über

$$\binom{k}{i}\binom{n-k}{k-i}h$$

Summanden: die Anzahl der Graphen $H'' \in \mathcal{H}$ mit $|H'' \cap H'| = i$. Damit gilt für alle $i \geqslant 1$ und geeignete von n unabhängige Konstanten c_1, c_2:

$$\begin{aligned}
A_i &= \sum\nolimits_i P[H' \cup H'' \subseteq G] \\
&\underset{(8)}{\leqslant} \sum\nolimits' \binom{k}{i}\binom{n-k}{k-i} h\, p^{2\ell} p^{-i\varepsilon'} \\
&\underset{(5)}{=} |\mathcal{H}| \binom{k}{i}\binom{n-k}{k-i} h\, p^{2\ell} \big(\gamma\, n^{-1/\varepsilon'}\big)^{-i\varepsilon'} \\
&\leqslant |\mathcal{H}|\, p^{\ell} c_1\, n^{k-i}\, h\, p^{\ell} \gamma^{-i\varepsilon'}\, n^{i} \\
&\underset{(3,4)}{=} \mu\, c_1 n^k h\, p^{\ell} \gamma^{-i\varepsilon'} \\
&\underset{(6)}{\leqslant} \mu\, c_2 \binom{n}{k} h\, p^{\ell} \gamma^{-i\varepsilon'} \\
&\underset{(1,3,4)}{=} \mu^2 c_2 \gamma^{-i\varepsilon'} \\
&\leqslant \mu^2 c_2 \gamma^{-\varepsilon'},
\end{aligned}$$

falls $\gamma \geqslant 1$. Mit $c_3 := kc_2$ ergibt dies nach Definition der A_i

$$E(X^2)/\mu^2 \underset{(7)}{=} \Big(A_0/\mu^2 + \sum_{i=1}^{k} A_i/\mu^2\Big) \underset{(9)}{\leqslant} 1 + c_3 \gamma^{-\varepsilon'}$$

und somit

$$\frac{\sigma^2}{\mu^2} = \frac{E(X^2) - \mu^2}{\mu^2} \leqslant c_3 \gamma^{-\varepsilon'} \underset{\gamma \to \infty}{\longrightarrow} 0\,.$$

Mit Lemma 9.4.2 folgt $X > 0$ für fast alle $G \in \mathcal{G}(n,p)$, d.h. fast alle $G \in \mathcal{G}(n,p)$ enthalten einen zu H isomorphen Teilgraphen und liegen damit in $\mathcal{P}_H$. □

Satz 9.4.5. (Erdős & Rényi 1960; Bollobás 1981)
Es sei H ein Graph mit mindestens einer Kante. Dann ist $t = n^{-1/\varepsilon'(H)}$ eine Schwellenfunktion für $\mathcal{P}_H$.

Beweis. Wir haben zu zeigen, dass fast kein $G \in \mathcal{G}(n,p)$ in $\mathcal{P}_H$ liegt falls $\gamma \to 0$ für $n \to \infty$, und dass fast alle $G \in \mathcal{G}(n,p)$ in $\mathcal{P}_H$ liegen falls $\gamma \to \infty$ für $n \to \infty$. Letzteres wurde in Lemma 9.4.4 bewiesen.

Um zu zeigen, dass bei $\gamma \to 0$ fast kein $G \in \mathcal{G}(n,p)$ in $\mathcal{P}_H$ liegt, wenden wir Lemma 9.4.3 auf einen Teilgraphen $H' \subseteq H$ mit $\varepsilon(H') = \varepsilon'(H)$ an, einen Graphen H' also, für den in der Definition von $\varepsilon'(H)$ das Maximum angenommen wird. Das Lemma sagt uns, dass fast kein $G \in \mathcal{G}(n,p)$ einen zu H' isomorphen Teilgraphen hat – und damit erst recht keinen zu H isomorphen Teilgraphen. □

Wir beenden diesen Abschnitt mit zwei Anwendungen von Satz 9.4.5 für *ausgewogene* Graphen H, solche mit $\varepsilon'(H) = \varepsilon(H)$.

Korollar 9.4.6. *Für jedes $k \geqslant 3$ ist $t(n) = n^{-1}$ eine Schwellenfunktion für die Eigenschaft, einen Kreis der Länge k zu enthalten.* □

Interessant an Korollar 9.4.6 ist, dass in der Evolution der Zufallsgraphen Kreise aller (konstanten) Längen etwa gleichzeitig auftreten. (Siehe auch Übung **19**.)

Ein ähnliches Phänomen haben wir für Bäume. Hier hängt die Schwellenfunktion zwar von der Größe des betrachteten Baumes ab, nicht aber von seiner Gestalt:

Korollar 9.4.7. *Für jedes $k \geqslant 2$ und jeden Baum T der Ordnung k ist $t(n) = n^{-k/(k-1)}$ eine Schwellenfunktion für die Eigenschaft $\mathcal{P}_T$.* □

Übungen

1.$^-$ Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Zufallsgraph aus $\mathcal{G}(n,p)$ genau m Kanten hat, für gegebenes m zwischen 0 und $\binom{n}{2}$?

2. Wie groß ist die mittlere Kantenzahl der Graphen $G \in \mathcal{G}(n,p)$?

3. Wie groß ist für $r \in \mathbb{N}$ die mittlere Anzahl von K^r-Untergraphen in $G \in \mathcal{G}(n,p)$?

4. Für welche Graphen H existiert eine Konstante $c = c(H)$ mit der Eigenschaft, dass jeder Graph G mit Durchschnittsgrad $d(G) \geqslant c$ ein Exemplar von H als Teilgraphen enthält?

5. Dass „fast alle“ Elemente eines Maßraumes, und insbesondere eines Wahrscheinlichkeitsraumes, eine bestimmte Eigenschaft haben, ist üblicherweise eine Sprechweise dafür, dass die Menge der Elemente ohne diese Eigenschaft das Maß null hat. Warum definiert man nicht auf der Menge aller endlichen Graphen (etwa mit Ecken aus $\mathbb{N}$) ein geeignetes Wahrscheinlichkeitsmaß, so dass der in Abschnitt 9.3 definierte Begriff von „fast alle“ mit dieser Sprechweise zusammenfällt?

6. Es seien $\mathcal{P}_1$ und $\mathcal{P}_2$ zwei Grapheneigenschaften, so dass fast alle Graphen in $\mathcal{G}(n,p)$ die Eigenschaft $\mathcal{P}_1$ haben und fast alle Graphen in $\mathcal{G}(n,p)$ die Eigenschaft $\mathcal{P}_2$ haben. Zeige, dass fast alle Graphen in $\mathcal{G}(n,p)$ die Eigenschaft $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$ haben.

7.$^-$ Zeige, dass für festes $p \notin \{0,1\}$ fast jeder Graph in $\mathcal{G}(n,p)$ den Durchmesser 2 hat.

8. Zeige, dass für festes $p \notin \{0,1\}$ fast kein Graph in $\mathcal{G}(n,p)$ einen trennenden vollständigen Untergraphen hat.

9. Leite Proposition 9.3.1 aus Lemma 9.3.2 her.

10. Es seien $\epsilon > 0$ und $p = p(n) > 0$ beliebig, und $r = r(n,p) \geqslant (1+\epsilon)(2\ln n)/p$ ganzzahlig. Zeige, dass in $\mathcal{G}(n,p)$ fast kein Graph r unabhängige Ecken enthält.

11. Zeige, dass es zu jedem Graphen H eine Funktion $p = p(n)$ mit $\lim_{n\to\infty} p(n) = 0$ gibt, für die fast jeder Graph $G \in \mathcal{G}(n,p)$ ein Exemplar von H als Untergraphen enthält.

12.$^+$ (i) Zeige, dass für jedes p der Form $p = (1-\epsilon)(\ln n)n^{-1}$ mit $\epsilon > 0$ fast jeder Graph $G \in \mathcal{G}(n,p)$ eine isolierte Ecke hat.

(ii) Finde eine Wahrscheinlichkeit p, für die fast jedes $G \in \mathcal{G}(n,p)$ unzusammenhängend ist aber die mittlere Anzahl von Spannbäumen für $n \to \infty$ gegen unendlich geht.

(Tip für (ii): Es gibt einen Satz von Cayley, nach dem K^n genau n^{n-2} verschiedene Spannbäume hat.)

13.$^+$ Zu gegebenem $r \in \mathbb{N}$ finde ein $c > 0$, so dass für $p = cn^{-1}$ fast jedes $G \in \mathcal{G}(n,p)$ einen K^r als Minor enthält. Können wir c unabhängig von r wählen?

14. Finde eine nicht monotone Grapheneigenschaft, die eine Schwellenfunktion besitzt, und eine monotone Eigenschaft, die keine Schwellenfunktion besitzt.

15.$^-$ Es sei H ein Graph auf k Ecken, und h bezeichne die Anzahl der zu H isomorphen Graphen auf einer festen Menge von k Elementen. Zeige, dass stets $h \leqslant k!$ gilt. Für welche Graphen H gilt hier Gleichheit?

16.$^-$ Bestimme zu jedem $k \geqslant 1$ die Schwellenfunktion für $\{\, G \mid \Delta(G) \geqslant k \,\}$.

17.$^-$ Bestimme für jedes $d \in \mathbb{N}$ die Schwellenfunktion für die Eigenschaft, einen d-dimensionalen Würfel (Übung 2, Kapitel 0) zu enthalten, sowie für die Eigenschaft, einen K^d zu enthalten.

18. Hat die Eigenschaft, irgendeinen Baum der Ordnung k zu enthalten (für festes $k \geqslant 2$) eine Schwellenfunktion? Wenn ja, welche?

19. Zeige, dass $t(n) = n^{-1}$ auch eine Schwellenfunktion ist für die Eigenschaft, irgendeinen Kreis zu enthalten.

20. Betrachte im Beweis von Lemma 9.4.4 die Terme A_0 und A_1 in Abhängigkeit von n. Sowohl für $H' \cap H'' = \emptyset$ als auch für $|H' \cap H''| = 1$ galt $P[H' \cup H'' \subseteq G] = p^{2\ell}$.

    (i) Zeige, dass $A_0 \not\to 0$ gilt für $n \to \infty$, im Gegensatz zu $A_1 \to 0$.

    (ii) Erkläre den Unterschied qualitativ, ohne formale Rechnung.

21.$^+$ Es sei H ein Graph und $\mathcal{P}$ die Eigenschaft, ein Exemplar von H als Untergraphen zu enthalten. Zeige, dass $\mathcal{P}$ für nicht vollständiges H keine Schwellenfunktion hat.

Notizen

Es gibt zwei Standardwerke über Zufallsgraphen: B. Bollobás, *Random Graphs*, Academic Press 1985, sowie S. Janson, T. Łuczak & A. Ruciński, *Random Graphs*, Wiley 2000. In diesen Büchern finden sich alle im Folgenden nicht gegebenen Quellenverweise. E.M. Palmer, *Graphical Evolution*, Wiley 1985, ist vom Stoff her Teilen aus *Random Graphs* ähnlich, aber elementarer geschrieben. B. Bollobás, *Modern Graph Theory*, Springer-Verlag 1998, gibt eine kompaktere Einführung, die jedoch ebenfalls inhaltlich über die unsere hinausgeht. Eine einführende Übersicht gibt M. Karoński im *Handbook of Combinatorics* (R.L. Graham, M. Grötschel & L. Lovász, Hrsg.), North-Holland 1995.

Eine weitergreifende Schilderung der probabilistischen Methode anhand ausgewählter Probleme aus der diskreten Mathematik geben N. Alon & J.H. Spencer, *The Probabilistic Method*, Wiley 1992. Der besondere Reiz dieses Buches liegt in seinen vielfältigen Beispielen dafür, wie mit einem probabilistischen Ansatz Aussagen bewiesen werden können, deren Formulierung keinerlei Bezug zu Wahrscheinlichkeit vermuten lässt. Auch Alons Beweise von Satz 4.4.1 oder Satz 0.3.4 gehören in diese Kategorie; siehe dazu die Quellenangaben in Kapitel 4 und Kapitel 0.

Die probabilistische Methode, unser Thema in Abschnitt 9.2, hatte ihre ersten Anfänge bereits in den 40er Jahren; eines ihrer frühesten Ergebnisse war Erdős's untere Schranke für Ramseyzahlen (Satz 9.1.3).

Unser Lemma über die Eigenschaften $\mathcal{P}_{i,j}$ ist der genannten Einführung von Bollobás entnommen. Eine gut lesbare Darstellung des angedeuteten allgemeinen Resultats, dass für festes p jeder Satz erster Ordnung über Graphen entweder für fast alle oder für fast kein $G \in \mathcal{G}(n,p)$ wahr ist, gibt P. Winkler, Random structures and zero-one laws, in (N.W. Sauer et al., Hrsg.): *Finite and Infinite Combinatorics in Sets and Logic* (NATO ASI Series C **411**), Kluwer 1993. Satz 9.3.5 ist von P. Erdős und A. Rényi, Asymmetric graphs, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **14** (1963), 295–315.

Die wegweisende Arbeit zur Evolution von Zufallsgraphen ist P. Erdős & A. Rényi, On the evolution of random graphs, *Publ. Math. Inst. Hungar. Acad. Sci.* **5** (1960), 17–61. Dort ist auch Satz 9.4.5 für ausgewogene Graphen H bewiesen. Die Verallgemeinerung auf unausgewogene Teilgraphen wurde zuerst 1981 von Bollobás bewiesen; siehe Karońskis Handbuch-Kapitel. Dass alle „nicht-trivialen" monotonen Grapheneigenschaften eine Schwellenfunktion besitzen, ist ein Satz von B. Bollobás und A.G. Thomason, Threshold functions, *Combinatorica* **7** (1987), 35–38.

Es gibt noch eine andere Weise, einen Zufallsgraphen G zu bilden, die genauso natürlich und üblich ist wie das Modell, das wir betrachtet haben. Anstatt die Kanten von G unabhängig zu wählen, wählen wir den gesamten Graphen G gleichverteilt unter allen Graphen auf $\{0, \dots, n-1\}$, die genau $M = M(n)$ Kanten haben: dann tritt jeder dieser Graphen mit der gleichen Wahrscheinlichkeit von $\binom{N}{M}$ auf, wobei $N := \binom{n}{2}$ ist. Genauso wie wir die wahrscheinlichen Eigenschaften der Graphen aus $\mathcal{G}(n,p)$ für unterschiedliche Funktionen $p = p(n)$ untersucht haben, können wir uns dann fragen, wie die Eigenschaften von G von der Funktion $M(n)$ abhängen. Liegt M dicht bei pN, der erwarteten Anzahl von Kanten eines Graphen aus $\mathcal{G}(n,p)$, dann verhalten sich die beiden Modelle sehr ähnlich. Es ist dann eher eine Frage der Bequemlichkeit, welches man betrachtet. Siehe Bollobás zu weiteren Einzelheiten.

Unserer Betrachtung von Schwellenphänomenen haben wir als auslösenden Parameter das Wachstum der Funktion $p = p(n)$ zugrundegelegt. Eine etwas genauere Erfassung dieser Phänomene ermöglicht die Betrachtung sogenannter *Graphenprozesse*: beginnend mit einem $\overline{K^n}$ wählt man schrittweise jeweils zufällig eine Kante hinzu, bis der Graph alle $\binom{n}{2}$ Kanten hat. Jeder Graphenprozess ist also eine Markovkette, bei der man den wahrscheinlichen Zeitpunkt des Auftreten eines gegebenen Phänomens studieren kann. Einen Überblick hierzu gibt T. Łuczak, The phase transition in a random graph, in (D. Miklos, V.T. Sós und T. Szőnyi, Hrsg.) *Paul Erdős is 80*, Proc. Colloq. Math. Soc. János Bolyai (1994).

10 Minoren Bäume und WQO

Ziel dieses letzten Kapitels ist die Hinführung auf einen einzigen Satz – einen Satz, der selbst die tiefsten anderen Ergebnisse der Graphentheorie wie ein Riese überragt: *in jeder unendlichen Menge von Graphen gibt es zwei, von denen einer ein Minor des anderen ist.* Dieser äußerlich so unscheinbare *Minorensatz* hat ganz fundamentale Auswirkungen innerhalb wie außerhalb der Graphentheorie; sein Originalbeweis von Neil Robertson und Paul Seymour umfasst mehr als 500 Seiten.

Nun müssen wir bescheiden sein: vom Beweis des Minorensatzes wird dieses Kapitel nur eine Ahnung vermitteln können. Wie nicht selten bei wirklich fundamentalen Sätzen haben jedoch auch hier nicht nur das Ergebnis selbst, sondern ebenso die zu seinem Beweis entwickelten Methoden die Landschaft der Graphentheorie verändert. Dies gilt besonders für die Technik der *Baumzerlegungen* von Graphen, in die die Abschnitte 10.3 und 10.4 einführen. Zuvor behandeln wir den für den Minorensatz zentralen Begriff der *Wohlquasiordnung* und beweisen den Minorensatz für Bäume. Im letzten Abschnitt geben wir einen Überblick über den Beweis des allgemeinen Minorensatzes und einige seiner Konsequenzen.

10.1 Wohlquasiordnung

Wohlquasiordnung

Eine reflexive und transitive Relation nennt man eine *Quasiordnung*. Eine Quasiordnung $\leqslant$ auf einer Menge X ist eine *Wohlquasiordnung* (und die Elemente von X sind durch $\leqslant$ *wohlquasigeordnet*), wenn für jede unendliche Folge $x_0, x_1, \ldots$ in X Indizes $i < j$ existieren mit $x_i \leqslant x_j$.

gutes Paar
gute Folge

Ein solches Paar (x_i, x_j) nennt man ein *gutes Paar*, und eine unendliche Folge, die ein gutes Paar enthält, ist eine *gute Folge*. (Die Quasiordnung $\leqslant$ auf X ist also genau dann eine Wohlquasiordnung, wenn jede unendliche Folge in X bezüglich $\leqslant$ gut ist.) Eine unendliche Folge, die nicht gut ist, heißt *schlecht*.

schlechte Folge

Proposition 10.1.1. *Eine Quasiordnung $\leqslant$ auf einer Menge X ist genau dann eine Wohlquasiordnung, wenn es in X bezüglich $\leqslant$ weder eine unendliche Antikette noch eine unendliche absteigende Folge $x_0 > x_1 > \ldots$ gibt.*

(7.1.2)

Beweis. Die Vorwärtsrichtung ist trivial, da jede absteigende Folge und jede Folge paarweise unvergleichbarer Elemente schlecht ist. Zur Rückrichtung sei $x_0, x_1, \ldots$ eine beliebige unendliche Folge in X. Es sei K der vollständige Graph auf $\mathbb{N} = \{0, 1, \ldots\}$. Wir färben die Kanten ij $(i < j)$ von K mit drei Farben: grün wenn $x_i \leqslant x_j$ gilt, rot wenn $x_i > x_j$ gilt, und gelb wenn x_i und x_j unvergleichbar sind. Nach dem Satz von Ramsey (7.1.2) enthält K einen unendlichen Untergraphen, dessen Kanten alle die gleiche Farbe tragen. Gibt es in X weder eine unendliche Antikette noch eine unendliche absteigende Folge, so kann diese Farbe weder gelb noch rot sein. Die Farbe ist also grün, und somit enthält $x_0, x_1, \ldots$ eine unendliche Teilfolge, in der jedes Paar gut ist. Insbesondere ist die Folge $x_0, x_1, \ldots$ selbst gut. □

Beim Beweis der Rückrichtung von Proposition 10.1.1 haben wir mehr bewiesen als nötig: es hätte gereicht, ein einziges gutes Paar in $x_0, x_1, \ldots$ zu finden, und wir haben eine unendliche aufsteigende Teilfolge gefunden. Entsprechend haben wir das folgende Korollar:

Korollar 10.1.2. *Ist X wohlquasigeordnet, so enthält jede unendliche Folge in X eine unendliche aufsteigende Teilfolge.* □

Das folgende Lemma und die Idee seines Beweises sind grundlegend in der Theorie der Wohlquasiordnungen. Es sei X eine Menge und $\leqslant$ eine Quasiordnung auf X. Für endliche Teilmengen $A, B \subseteq X$ setzen wir $A \leqslant B$, wenn es eine injektive Abbildung $f\colon A \to B$ gibt mit $a \leqslant f(a)$ für alle $a \in A$. Offenbar bezeichnet $\leqslant$ damit eine Quasiordnung auch auf der Menge $[X]^{<\omega}$ aller endlichen Teilmengen von X.

$[X]^{<\omega}$

[10.2.1]

Lemma 10.1.3. *Mit X ist auch $[X]^{<\omega}$ durch $\leqslant$ wohlquasigeordnet.*

Beweis. Angenommen, $\leqslant$ sei eine Wohlquasiordnung auf X aber nicht auf $[X]^{<\omega}$. Wir konstruieren zunächst eine spezielle schlechte Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $[X]^{<\omega}$. Dazu nehmen wir induktiv an, dass für ein $n \in \mathbb{N}$ bereits zu jedem $i < n$ ein A_i definiert sei, und dass eine schlechte Folge in $[X]^{<\omega}$ existiert, die das Tupel $(A_0, \dots, A_{n-1})$ zum Anfangsstück hat. (Da nach Annahme irgendeine schlechte Folge in $[X]^{<\omega}$ existiert und das leere Tupel triviales Anfangsstück dieser Folge ist, ist dies für $n = 0$ sicher wahr.) Wir wählen $A_n \in [X]^{<\omega}$ von minimaler Mächtigkeit mit der Eigenschaft, dass auch mit $A_0, \dots, A_n$ eine schlechte Folge in $[X]^{<\omega}$ beginnt.

Offenbar ist $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in der Tat eine schlechte Folge in $[X]^{<\omega}$, und insbesondere ist $A_n \neq \emptyset$ für alle n. Für jedes n wählen wir ein $a_n \in A_n$ und setzen $B_n := A_n \setminus \{a_n\}$.

Nach Korollar 10.1.2 enthält die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine unendliche aufsteigende Teilfolge $(a_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$. Nach der Minimalwahl von A_{n_0} ist die Folge

$$A_0, \dots, A_{n_0-1}, B_{n_0}, B_{n_1}, B_{n_2}, \dots$$

gut. Für jedes gute Paar der Form (A_i, B_j) in dieser Folge ist aber (A_i, A_j) ein gutes Paar von $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, mit Widerspruch. Ist andererseits (B_i, B_j) ein gutes Paar, so ist $a_i \leqslant a_j$ (wegen $i < j$), d.h. wiederum ist auch (A_i, A_j) gut (mit Widerspruch): wir brauchen nur zusätzlich a_i auf a_j abzubilden. □

10.2 Der Minorensatz für Bäume

Der Hauptsatz dieses Kapitels besagt, dass die endlichen Graphen durch die Minorenrelation $\preccurlyeq$ wohlquasigeordnet sind, dass es also zu jeder unendlichen Folge $G_0, G_1, \dots$ endlicher Graphen zwei Indizes $i < j$ gibt mit $G_i \preccurlyeq G_j$. Da jede (echt) absteigende Minorenfolge endlicher Graphen endlich ist, ist dies nach Proposition 10.1.1 äquivalent zu der Aussage, dass es unter unendlich vielen endlichen Graphen stets zwei gibt, von denen einer ein Minor des anderen ist.

In diesem Abschnitt beweisen wir dies zunächst für Bäume, sogar in der stärkeren Fassung für topologische Minoren:

Satz 10.2.1. (Kruskal 1960)
Die endlichen Bäume sind durch die topologische Minorenrelation wohlquasigeordnet.

Um im Beweis von Satz 10.2.1 die besondere Struktur der Bäume besser ausnutzen zu können, werden wir dabei eine speziell auf Bäume zugeschnittene Verschärfung der topologischen Minorenrelation zugrundelegen. Diese führen wir jetzt ein.

$T \leqslant T'$

Sind T und T' zwei Bäume mit Wurzeln r und r', so schreiben wir $T \leqslant T'$, wenn es einen Isomorphismus φ von einer Unterteilung von T auf einen Teilbaum T'' von T' gibt, der die mit T und r assoziierte Baumordnung auf $V(T)$ erhält. (Für $x < y$ in T gilt also stets $\varphi(x) < \varphi(y)$ in T'; siehe Abbildung 10.2.1.) Man überlegt sich leicht, dass dies eine Quasiordnung auf der Klasse aller Wurzelbäume ist.

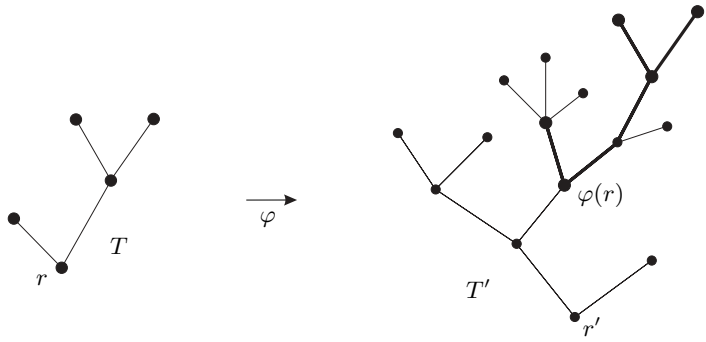


Abb. 10.2.1. Eine Einbettung von T in T', die $T \leqslant T'$ zeigt

(10.1.3)

Beweis von Satz 10.2.1. Da aus $T \leqslant T'$ folgt, dass T ein topologischer Minor von T' ist, reicht es zu zeigen, dass die Wurzelbäume durch $\leqslant$ wohlquasigeordnet sind: jede unendliche Folge von Bäumen enthält dann bei beliebiger Wahl von Wurzeln ein gutes Paar bezüglich $\leqslant$, und der erste Baum dieses Paares ist ein topologischer Minor des zweiten.

Wir gehen ganz ähnlich vor wie im Beweis von Lemma 10.1.3. Wir nehmen an, die Wurzelbäume seien nicht wohlquasigeordnet, und konstruieren zunächst induktiv eine „minimale“ schlechte Folge von Wurzelbäumen. Zu gegebenem $n \in \mathbb{N}$ nehmen wir dazu an, wir hätten bereits Wurzelbäume $T_0, \dots, T_{n-1}$ so gewählt, dass es eine schlechte Folge von Wurzelbäumen gibt, die mit $T_0, \dots, T_{n-1}$ beginnt. Wir wählen dann als

T_n

T_n einen Wurzelbaum kleinster Eckenzahl, so dass auch mit $T_0, \dots, T_n$ eine schlechte Folge von Wurzelbäumen beginnt. Die Wurzeln der Bäume

r_n

T_n bezeichnen wir im Folgenden mit r_n.

A_n

Die oben konstruierte Folge $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist offenbar schlecht. Für jedes n sei A_n die Menge der Komponenten von $T_n - r_n$; dies ist eine Menge von Bäumen, und wir wählen die Nachbarn von r_n als deren Wurzeln. Die Baumordnung dieser Wurzelbäume stimmt dann jeweils mit der von

A

T_n induzierten Ordnung überein. Wir zeigen jetzt, dass die Menge $A := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ all dieser Wurzelbäume wohlquasigeordnet ist.

T^k

Es sei $(T^k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge von Wurzelbäumen aus A. Zu

$n(k)$

jedem $k \in \mathbb{N}$ wählen wir ein $n = n(k)$ mit $T^k \in A_n$. Betrachten wir nun ein k mit kleinstem $n(k)$, so ist die Folge

$$T_0, \dots, T_{n(k)-1}, T^k, T^{k+1}, \dots$$

gut: wäre sie schlecht, so widerspräche dies wegen $T^k \subsetneqq T_{n(k)}$ der Minimalwahl von $T_{n(k)}$. Es sei (T, T') ein gutes Paar dieser Folge. Da die Folge $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ schlecht ist, kann T nicht unter den ersten $n(k)$ Gliedern $T_0, \dots, T_{n(k)-1}$ unserer Folge sein: T' wäre dann ein T^i mit $i \geqslant k$, also

$$T \leqslant T' = T^i \leqslant T_{n(i)}\,;$$

da $n(k) \leqslant n(i)$ gilt nach Wahl von k, wäre damit $(T, T_{n(i)})$ ein gutes Paar in der schlechten Folge $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Somit ist (T, T') auch ein gutes Paar der Folge $(T^k)_{k\in\mathbb{N}}$, und A ist als wohlquasigeordnet erwiesen.

Mit A ist nach Lemma 10.1.3 auch die Menge $\mathcal{A} := \{ A_n \mid n \in \mathbb{N} \}$ wohlquasigeordnet; beachte, dass isomorphe Elemente von A_n nicht identifiziert werden. Insbesondere ist die Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gut; es sei (A_i, A_j) ein gutes Paar. Nach Definition der Ordnung $\leqslant$ auf $\mathcal{A}$ gibt es eine injektive Abbildung $f\colon A_i \to A_j$ mit $T \leqslant f(T)$ für alle $T \in A_i$. Die Vereinigung der entsprechenden Einbettungen $T \to f(T)$ setzen wir jetzt zu einer Abbildung φ von $V(T_i)$ nach $V(T_j)$ fort, indem wir $\varphi(r_i) := r_j$ setzen. Diese Abbildung φ erhält die Baumordnung von T_i, und sie definiert eine Einbettung von T_i in T_j, in der die Kanten $r_i r \in T_i$ auf die Wege $r_j T_j \varphi(r)$ abgebildet werden. Somit ist (T_i, T_j) ein gutes Paar in unserer schlechten Folge $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Wurzelbäumen, ein Widerspruch. □

$\mathcal{A}$

i, j

10.3 Baumzerlegungen

Wie könnte man versuchen, Eigenschaften von Bäumen auf allgemeinere Graphen zu übertragen – auf Graphen, die zwar selbst keine Bäume sind, diesen aber ähnlich sehen? Was „ähnlich“ bedeuten soll oder kann, wird dabei von den zu verallgemeinernden Eigenschaften abhängen. Eine Art von Baumähnlichkeit, die neben anderen Eigenschaften von Bäumen auch ihre Wohlquasigeordnetheit auf allgemeinere Graphen zu übertragen gestattet, werden wir jetzt kennenlernen.

Es sei G ein Graph, T ein Baum, und $\mathcal{V} = (V_t)_{t\in T}$ eine Familie von Eckenmengen $V_t \subseteq V(G)$, indiziert durch die Ecken t von T. Wir nennen das Paar $(T, \mathcal{V})$ eine *Baumzerlegung* von G, wenn die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:

Baumzerlegung

(T1) $V(G) = \bigcup_{t\in T} V_t$;

(T2) zu jeder Kante e von G gibt es ein $t \in T$, so dass V_t beide Endecken von e enthält;

(T3) für $t_1, t_2, t_3 \in T$ mit $t_2 \in t_1 T t_3$ gilt stets $V_{t_1} \cap V_{t_3} \subseteq V_{t_2}$.

Die Bedingungen (T1) und (T2) zusammen besagen also, dass G die Vereinigung der Untergraphen $G[V_t]$ mit $t \in T$ ist; diese Untergraphen

Teile

und auch die Mengen V_t selbst nennen wir die *Teile* von $(T, \mathcal{V})$, und $(T, \mathcal{V})$ ist eine Baumzerlegung *in* diese Teile. Die Bedingungen (T2) und (T3) zusammen stellen sicher, dass die Gestalt von G grob der von T entspricht (Abb. 10.3.1).

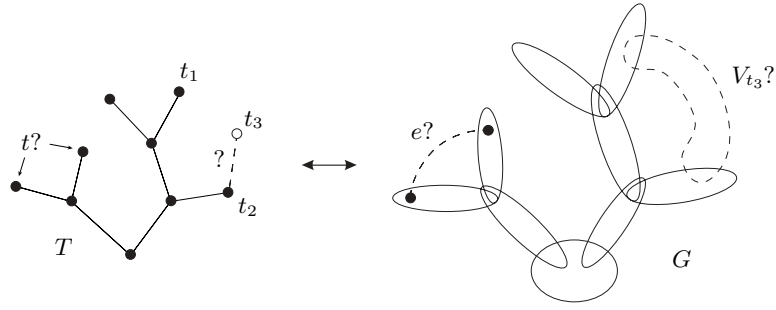


Abb. 10.3.1. Verbotene Kanten und Teile gemäß (T2) und (T3)

Bevor wir näher auf die Rolle der Baumzerlegungen im Beweis des Minorensatzes eingehen, wollen wir uns zunächst den Begriff selbst ein wenig näher anschauen. Im Folgenden sei $(T, \mathcal{V})$ eine fest gewählte Baumzerlegung von G, mit $\mathcal{V} = (V_t)_{t \in T}$ wie bisher.

$T, \mathcal{V}$
V_t

Die vielleicht wichtigste Eigenschaft von Baumzerlegungen ist, dass die so zerlegten Graphen die Trennungseigenschaften der Bäume erben, entlang derer sie zerlegt sind. Während man in der Literatur gelegentlich durchaus alternative Axiomensysteme für Baumzerlegungen antrifft (Übungen 12, 15), implizieren alle das folgende Trennungslemma in dieser oder ähnlicher Form:

Lemma 10.3.1. *Es seien t_1t_2 eine Kante von T und T_1, T_2 die Komponenten von $T - t_1t_2$, mit $t_1 \in T_1$ und $t_2 \in T_2$. Dann trennt $V_{t_1} \cap V_{t_2}$ die Eckenmengen $U_1 := \bigcup_{t \in T_1} V_t$ und $U_2 := \bigcup_{t \in T_2} V_t$ in G (Abb. 10.3.2).*

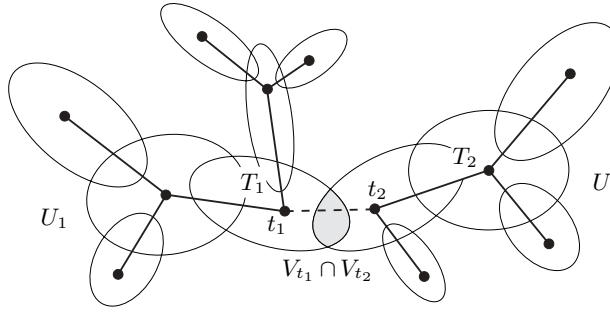


Abb. 10.3.2. $V_{t_1} \cap V_{t_2}$ trennt U_1 von U_2 in G

Beweis. Nach (T3) gilt $U_1 \cap U_2 \subseteq V_{t_1} \cap V_{t_2}$, da t_1 und t_2 beide auf jedem t–t'-Weg in T mit $t \in T_1$ und $t' \in T_2$ liegen. Es reicht daher zu zeigen, dass G keine Kante u_1u_2 mit $u_1 \in U_1 \setminus U_2$ und $u_2 \in U_2 \setminus U_1$ enthält. Ist u_1u_2 eine solche Kante, so gibt es nach (T2) ein $t \in T$ mit $u_1, u_2 \in V_t$. Nach Wahl von u_1 und u_2 liegt t weder in T_2 noch in T_1, ein Widerspruch zur Definition von T_1 und T_2. □

Baumzerlegungen vererben sich kanonisch auf Teilgraphen:

Lemma 10.3.2. *Für jedes $H \subseteq G$ ist $\big(T, (V_t \cap V(H))_{t \in T}\big)$ eine Baumzerlegung von H.* [10.4.2] □

Und entsprechend für Kantenkontraktionen:

Lemma 10.3.3. *Angenommen, G sei ein MH mit Verzweigungsmengen U_h, $h \in V(H)$. Durch $f\colon V(G) \to V(H)$ sei jeder Ecke von G der Index der sie enthaltenden Verzweigungsmenge zugeordnet. Für alle $t \in T$ sei $W_t := \{\, f(v) \mid v \in V_t \,\}$, sowie $\mathcal{W} := (W_t)_{t \in T}$. Dann ist $(T, \mathcal{W})$ eine Baumzerlegung von H.*

Beweis. Die Aussagen (T1) und (T2) für $(T, \mathcal{W})$ folgen direkt aus den entsprechenden Aussagen für $(T, \mathcal{V})$. Sind nun $t_1, t_2, t_3 \in T$ wie in (T3) gegeben, so betrachten wir eine Ecke $h \in W_{t_1} \cap W_{t_3}$ von H und zeigen $h \in W_{t_2}$. Nach Definition von W_{t_1} und W_{t_3} gibt es Ecken $v_1 \in V_{t_1} \cap U_h$ und $v_3 \in V_{t_3} \cap U_h$. Da U_h in G zusammenhängend ist und V_{t_2} nach Lemma 10.3.1 die Ecken v_1 und v_3 in G trennt, enthält U_h eine Ecke aus V_{t_2}. Nach Definition von W_{t_2} folgt hieraus $h \in W_{t_2}$. □

Lemma 10.3.1 hat zur Folge, dass vollständige (und somit nicht trennbare) Teilgraphen von G stets ganz in einem Teil der Baumzerlegung liegen:

Lemma 10.3.4. *Ist $K \subseteq G$ vollständig, so gibt es ein $t \in T$ mit $V(K) \subseteq V_t$.* [10.4.2]

Beweis. Wir richten zunächst die Kanten von T, wie folgt. Zu jeder Kante $t_1t_2 \in T$ definieren wir U_1 und U_2 wie in Lemma 10.3.1. Nach dem Lemma gibt es ein $i \in \{1, 2\}$ mit $V(K) \subseteq U_i$ (warum?), und wir richten die Kante t_1t_2 nach t_i.

Es sei t die letzte Ecke eines maximalen gerichteten Weges P in T; wir zeigen $V(K) \subseteq V_t$. Zu gegebenem $v \in V(K)$ gibt es ein $t' \in T$ mit $v \in V_{t'}$. Ist $t' \neq t$, so sei e die mit t inzidente Kante von T, die t' von t trennt. Da e wegen der Maximalität von P auf t hin gerichtet ist, liegt v auch in einem $V_{t''}$, dessen Index t'' in der t enthaltenden Komponente von $T - e$ liegt. Es folgt $v \in V_t$ mit (T3). □

Ziel einer Baumzerlegung ist, wie schon gesagt, die Eigenschaften eines Baumes für den zu zerlegenden Graphen nutzbar zu machen. Das wird natürlich umso besser gelingen, je mehr wir die Struktur *innerhalb* der Teile einer Baumzerlegung vernachlässigen dürfen: je kleiner die Teile, umso größer die Ähnlichkeit des Graphen mit seinem Zerlegungsbaum.

Weite

Dieser Gedanke motiviert die folgende Definition. Als *Weite* der Baumzerlegung $(T, \mathcal{V})$ bezeichnen wir die Zahl

$$\max \{ |V_t| - 1 : t \in T \},$$

Baumweite $\mathrm{tw}(G)$

und die *Baumweite* $\mathrm{tw}(G)$ von G ist die geringste Weite einer Baumzerlegung von G. Die Baumweite eines Graphen misst gewissermaßen die Dicke seiner Äste (an der dicksten Stelle), wenn man ihn möglichst günstig in die grobe Form eines Baumes zwingt. Wie man leicht sieht, haben Bäume selbst die Baumweite 1.

Wegen der Lemmas 10.3.2 und 10.3.3 kann sich die Baumweite eines Graphen durch Löschen oder Kontrahieren von Kanten nicht erhöhen:

Proposition 10.3.5. *Ist $H \preccurlyeq G$, so gilt $\mathrm{tw}(H) \leqslant \mathrm{tw}(G)$.* □

Graphen beschränkter Baumweite sind nun den Bäumen in der Tat so ähnlich, dass sich deren Wohlquasigeordnetheit auf solche Graphenklassen überträgt:

Satz 10.3.6. (Robertson & Seymour 1990)
Für jedes $k \in \mathbb{N}$ sind die Graphen mit Baumweite $< k$ durch die Minorenrelation wohlquasigeordnet.

Satz 10.3.6 ist natürlich nur eine Teilaussage des Minorensatzes, aber er ist ein wichtiger Schritt auf dem Weg zu dessen Beweis. Der Beweis von Satz 10.3.6 ist dem des Satzes von Kruskal nicht unähnlich: grob gesprochen muss man das Argument der „minimalen schlechten Folge“ $\mathrm{tw}(G)$-mal iterieren.

Um Satz 10.3.6 für den Beweis des Minorensatzes nutzbar zu machen, sollten wir in der Lage sein, etwas über die von ihm nicht erfassten Graphen zu sagen: diejenigen mit *großer* Baumweite. Es gibt in der Tat eine Reihe von Reichhaltigkeitssätzen über solche Graphen, und unser nächster Satz ist ein typisches Beispiel hierfür.

berühren

Wir sagen, dass zwei Eckenmengen in einem Graphen einander *berühren*, wenn sie eine Ecke gemeinsam haben oder durch eine Kante verbunden sind. Eine Menge einander paarweise berührender zusammenhängender Eckenmengen nennen wir ein *Netz*. Eine Menge von Ecken ist eine *Überdeckung* des Netzes (und *überdeckt* es), wenn sie aus jeder seiner Mengen mindestens eine Ecke enthält. Die kleinste Mächtigkeit einer Überdeckung eines Netzes ist seine *Dichte*.

Netz

überdeckt

Dichte

Lemma 10.3.7. *Jede zwei Überdeckungen eines Netzes trennende Eckenmenge überdeckt das Netz selbst.*

Beweis. Da jede Menge des Netzes zusammenhängend ist und beide Überdeckungen trifft, trifft sie auch jede diese Überdeckungen trennende Eckenmenge. □

Typisches Beispiel eines Netzes ist die Menge von Kreuzen in einem Gitter. Das $k \times k$*-Gitter* ist der Graph auf $\{1, \dots, k\}^2$ mit der Kantenmenge *Gitter*

$$\{\, (i,j)(i',j') : |i-i'| + |j-j'| = 1 \,\}.$$

Die *Kreuze* dieses Gitters sind die k^2 Eckenmengen

$$C_{ij} := \{\, (i,\ell) \mid \ell = 1, \dots, k\} \cup \{(\ell, j) \mid \ell = 1, \dots, k \,\};$$

das Kreuz C_{ij} ist also die Vereinigung der $i$ten Spalte mit der $j$ten Zeile des Gitters. Offenbar bilden die Kreuze des $k \times k$-Gitters ein Netz der Dichte k: jede Zeile und jede Spalte des Gitters überdeckt die Kreuze, aber jede Menge von weniger als k Ecken vermeidet eine der k Zeilen und eine der k Spalten und somit ein Kreuz.

Der folgende Satz wird manchmal *Dualitätssatz der Baumweite* genannt:

Satz 10.3.8. (Seymour & Thomas 1993)
Ist $k \geqslant 0$ und G ein Graph, so gilt $\operatorname{tw}(G) \geqslant k$ genau dann, wenn G ein Netz der Dichte $> k$ enthält.

Beweis. Zum Beweis der Rückrichtung sei $\mathcal{B}$ irgendein Netz in G. Wir zeigen, dass jede Baumzerlegung $(T, (V_t)_{t \in T})$ von G einen Teil hat, der $\mathcal{B}$ überdeckt. (2.3.1)

Wie im Beweis von Lemma 10.3.4 richten wir zunächst die Kanten t_1t_2 von T, wie folgt. Trifft $X := V_{t_1} \cap V_{t_2}$ alle Mengen aus $\mathcal{B}$, so sind wir fertig. Da die Mengen aus $\mathcal{B}$ zusammenhängend sind, gibt es anderenfalls nach Lemma 10.3.1 ein $B \in \mathcal{B}$, das ganz in $U_1 \setminus X$ oder ganz in $U_2 \setminus X$ liegt – sagen wir, in $U_2 \setminus X$. Dann liegt aber *jede* X vermeidende Menge aus $\mathcal{B}$ in $U_2 \setminus X$, da sie ja B berührt. Wir richten dann die Kante t_1t_2 von t_1 nach t_2.

Ist jede Kante von T gerichtet und t die letzte Ecke eines maximalen gerichteten Weges in T, so trifft V_t jede Menge aus $\mathcal{B}$ – ganz wie im Beweis von Lemma 10.3.4.

Zum Beweis der Vorwärtsrichtung nehmen wir nun an, dass G kein Netz der Dichte $> k$ enthält. Wir zeigen, dass G zu jedem Netz $\mathcal{B}$ eine $\mathcal{B}$*-zulässige* Baumzerlegung hat: eine Baumzerlegung, bei der kein Teil aus mehr als k Ecken $\mathcal{B}$ überdeckt. Für $\mathcal{B} = \emptyset$ impliziert dies $\operatorname{tw}(G) < k$: *$\mathcal{B}$-zulässig*

da das leere Netz von jeder Menge überdeckt wird, kann es dann keine Teile mit mehr als k Ecken geben.

Sei also $\mathcal{B}$ gegeben. Da G keine Netze mit mehr als $2^{|G|}$ Mengen enthalten kann, dürfen wir induktiv annehmen, dass es zu jedem Netz $\mathcal{B}'$ mit mehr als $|\mathcal{B}|$ Mengen eine $\mathcal{B}'$-zulässige Baumzerlegung von G gibt.

X Es sei $X \subseteq V(G)$ eine Überdeckung von $\mathcal{B}$ mit möglichst wenigen Ecken;

ℓ dann ist $\ell := |X| \leqslant k$ die Dichte von $\mathcal{B}$. Unser Ziel ist ein Beweis der folgenden Aussage:

> *Zu jeder Komponente C von $G - X$ gibt es eine $\mathcal{B}$-zulässige Baumzerlegung von $G[X \cup V(C)]$, in der X ein Teil ist.* $(*)$

Diese Baumzerlegungen können wir dann zu einer $\mathcal{B}$-zulässigen Baumzerlegung zusammenfügen, indem wir die dem Teil X entsprechenden Knoten ihrer Bäume identifizieren. (Ist $X = V(G)$, so ist die Baumzerlegung mit X als einzigem Teil $\mathcal{B}$-zulässig.)

C Betrachten wir also eine Komponente C von $G - X$. Wir setzen

$H, \mathcal{B}'$ $H := G[X \cup V(C)]$ und $\mathcal{B}' := \mathcal{B} \cup \{C\}$. Ist $\mathcal{B}'$ kein Netz, so wird $\mathcal{B}$ nicht von $Y := V(C) \cup N(C)$ überdeckt. Die aus den Teilen X und Y bestehende Baumzerlegung von H erfüllt dann $(*)$.

Wir dürfen also annehmen, dass $\mathcal{B}'$ ein Netz ist. Da $\mathcal{B}$ von X überdeckt wird, gilt $C \notin \mathcal{B}$ und somit $|\mathcal{B}'| > |\mathcal{B}|$. Nach Induktionsannahme

$T, (V_t)_{t \in T}$ hat G eine $\mathcal{B}'$-zulässige Baumzerlegung $(T, (V_t)_{t \in T})$. Ist diese Zerlegung auch $\mathcal{B}$-zulässig, so ist nichts weiter zu zeigen. Ist sie es nicht, so hat

s sie einen Teil V_s von mehr als k Ecken, der $\mathcal{B}$ überdeckt. Da $\mathcal{B}$ nicht durch weniger als ℓ Ecken überdeckbar ist, gibt es nach Lemma 10.3.7

P_i und Satz 2.3.1 von Menger ℓ disjunkte V_s–X-Wege $P_1, \dots, P_\ell$. Da V_s nicht $\mathcal{B}'$ überdeckt und daher in $G - C$ liegt, haben die P_i außer ihren

x_i Endecken $x_i \in X$ keine Ecken in H.

t_i Für jedes $i = 1, \dots, \ell$ wählen wir ein $t_i \in T$ mit $x_i \in V_{t_i}$ und setzen

$$W_t := \big(V_t \cap V(H)\big) \cup \{\, x_i \mid t \in sTt_i \,\}$$

für alle $t \in T$ (Abb. 10.3.3). Bis auf die zusätzlichen Ecken x_i ist $(T, (W_t)_{t \in T})$ die durch $(T, (V_t)_{t \in T})$ induzierte Baumzerlegung von H; vgl. Lemma 10.3.2. Trotz der zusätzlichen Ecken gilt $|W_t| \leqslant |V_t|$ für alle t, da V_t für jedes $x_i \in W_t \setminus V_t$ wegen $t \in sTt_i$ eine andere Ecke von P_i enthält (Lemma 10.3.1) und diese Ecke wegen $P_i \cap H = \{x_i\}$ nicht in W_t liegen kann. Weiter erfüllt $(T, (W_t)_{t \in T})$ die Bedingung (T3), da jedes x_i zu allen Teilen entlang eines t_i enthaltenden Weges in T hinzugefügt wurde. Damit ist $(T, (W_t)_{t \in T})$ eine Baumzerlegung von H.

Wegen $W_s = X$ bleibt zum Beweis von $(*)$ nur noch zu zeigen, dass diese Zerlegung auch $\mathcal{B}$-zulässig ist. Betrachten wir also einen Teil W_t von mehr als k Ecken. Wegen $|X| = \ell \leqslant k$ hat W_t eine Ecke in C; diese liegt dann auch in V_t. Da $(T, (V_t)_{t \in T})$ nach Annahme $\mathcal{B}'$-zulässig ist und

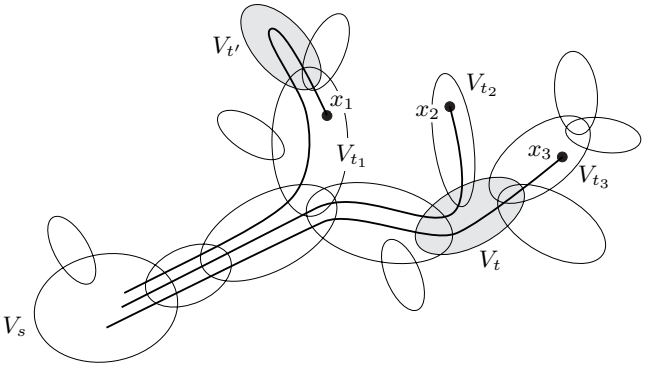


Abb. 10.3.3. W_t enthält x_2 und x_3, aber nicht x_1; $W_{t'}$ enthält kein x_i

$|V_t| \geqslant |W_t| > k$ gilt, vermeidet V_t daher ein $B \in \mathcal{B}$; wir zeigen, dass auch W_t dieses B nicht trifft. Tut es dies, dann in einer Ecke $x_i \in W_t \setminus V_t$. Nach Definition von W_t gilt dann $t \in sTt_i$, und B trifft außer V_s auch V_{t_i} aber nicht V_t. Da B zusammenhängend ist, widerspricht dies Lemma 10.3.1. □

Satz 10.3.8 kann man besonders prägnant formulieren durch die folgende Invariante. Bezeichnen wir als *Vernetzungsgrad* eines Graphen die größte Dichte eines Netzes in ihm, so besagt der Satz, dass die Baumweite eines Graphen stets um eins kleiner ist als sein Vernetzungsgrad.

Wie nützlich bereits die einfache Rückrichtung von Satz 10.3.8 ist, zeigt wiederum das Beispiel der Gitter: da das $k \times k$-Gitter ein Netz der Dichte k enthält, hat es nach Satz 10.3.8 eine Baumweite von mindestens $k-1$; ohne den Satz ist dies gar nicht so einfach zu zeigen. Tatsächlich hat das $k \times k$-Gitter die Baumweite k (Übung **21**). Wichtiger als der genaue Wert seiner Baumweite ist aber die Tatsache, dass diese mit k gegen unendlich geht, also unbeschränkt ist. Wie wir noch sehen werden, bilden die Gitter sogar den Prototyp einer Graphenmenge unbeschränkter Baumweite: die Elemente einer jeden solchen Menge enthalten alle Gitter als Minoren (Satz 10.4.3).

Wir nennen unsere Baumzerlegung $(T, \mathcal{V})$ *schlank*, wenn sie der folgenden Bedingung genügt: *schlank*

(T4) Zu $t_1, t_2 \in T$ und Eckenmengen $Z_1 \subseteq V_{t_1}$ und $Z_2 \subseteq V_{t_2}$ mit $|Z_1| = |Z_2| =: k$ enthält G stets entweder k disjunkte Z_1–Z_2-Wege oder es gibt eine Kante $tt' \in t_1Tt_2$ mit $|V_t \cap V_{t'}| < k$.

Die Äste einer schlanken Baumzerlegung sind also nur so dick, wie die Zusammenhangseigenschaften von G es erfordern: ist $t_1 \dots t_2$ ein Weg in T, entlang dem alle Trenner $V_t \cap V_{t'}$ groß sind, dann enthält G auch viele V_{t_1}–V_{t_2}-Wege. Für $t_1 = t_2$ besagt (T4), dass auch die Teile der

Zerlegung nur so groß sind, wie ihr „äußerer“ Zusammenhang in G es erfordert.

Sind wir an Baumzerlegungen in möglichst kleine Teile interessiert, so haben wir jetzt zwei Kriterien zu ihrer Bewertung: während eine Zerlegung minimaler Weite die Ordnung nur der größten Teile klein hält, minimiert die Schlankheitsbedingung (T4) in gewissem Sinne lokal die Größe aller Teile. Überraschenderweise sind jedoch beide Kriterien ohne Reibungsverlust vereinbar:

Satz 10.3.9. (Thomas 1990)
Jeder Graph G hat eine schlanke Baumzerlegung der Weite $\mathrm{tw}(G)$.

Zu Satz 10.3.9 gibt es jetzt einen kurzen Beweis; siehe den Hinweis in den Notizen. Bei der praktischen Anwendung von Baumzerlegungen ist der Satz ein wesentliches Hilfsmittel.

simplizial

Die Baumzerlegung $(T, \mathcal{V})$ von G heißt *simplizial*, wenn jede trennende Eckenmenge der Form $V_{t_1} \cap V_{t_2}$ einen vollständigen Teilgraphen in G induziert. Bei einer simplizialen Baumzerlegung kann man zuweilen von Eigenschaften der Teile auf Eigenschaften des ganzen Graphen schließen: ist beispielsweise jeder Teil k-färbbar, so ist es auch G. (Beweis?) Entsprechendes gilt für die Eigenschaft, keinen K^r-Minor zu enthalten (r fest). Spaltet man einen gegebenen Graphen sukzessive entlang minimaler trennender vollständiger Teilgraphen auf, so erhält man eine simpliziale Baumzerlegung des Graphen in eindeutig bestimmte irreduzible Teile (Übung 27).

Kann man umgekehrt einen Graphen G rekursiv durch Zusammenkleben entlang vollständiger Teilgraphen aus Graphen einer Menge $\mathcal{H}$ konstruieren, so hat G eine simpliziale Baumzerlegung in Elemente von $\mathcal{H}$. Nach dem Struktursatz 6.3.4 von Wagner über die kantenmaximalen Graphen ohne K^5-Minor beispielsweise hat jeder solche Graph eine simpliziale Baumzerlegung in ebene Dreiecksgraphen und Exemplare des Wagner-Graphen W. Entsprechendes gilt für die Graphen ohne K^4-Minor mit Proposition 6.3.1; siehe auch Proposition 10.4.2.

Hier ist noch ein besonders einfaches Beispiel der Charakterisierung einer Grapheneigenschaft durch Baumzerlegungen:

[10.4.2] **Proposition 10.3.10.** *G ist genau dann chordal, wenn G eine Baumzerlegung in vollständige Teile hat.*

(4.5.1) *Beweis.* Wir wenden Induktion nach $|G|$ an. Zunächst sei $(T, \mathcal{V})$ eine Baumzerlegung von G, so dass $G[V_t]$ für alle $t \in T$ vollständig ist; wir wählen $(T, \mathcal{V})$ so, dass T möglichst wenige Ecken hat. Ist $|T| \leqslant 1$, so ist G vollständig und damit chordal. Ist $|T| \geqslant 2$, so ist $T = (T_1 \cup T_2) + t_1 t_2$ wie in Lemma 10.3.1. Nach (T1) und (T2) ist $G = G_1 \cup G_2$ mit $G_i := G[\bigcup_{t \in T_i} V_t]$ $(i = 1, 2)$, und nach dem

Lemma gilt $V(G_1 \cap G_2) \subseteq V_{t_1} \cap V_{t_2}$; somit ist $G_1 \cap G_2$ vollständig. Nun ist $(T_i, (V_t)_{t \in T_i})$ jeweils eine Baumzerlegung von G_i in vollständige Teile (warum?), und so sind beide G_i nach Induktionsannahme chordal. (Beachte, dass nach Wahl von $(T, \mathcal{V})$ weder G_1 noch G_2 ganz in $G[V_{t_1} \cap V_{t_2}] \supseteq G_1 \cap G_2$ liegt, d.h. G_1 und G_2 sind wirklich kleiner als G.) Nach Proposition 4.5.1 sind die G_i damit rekursiv aus vollständigen Graphen durch Zusammenkleben entlang vollständiger Untergraphen konstruierbar. Da $G_1 \cap G_2$ vollständig ist, ist damit auch G derart konstruierbar und nach Proposition 4.5.1 wiederum chordal.

Umgekehrt sei nun G chordal. Ist G vollständig, so ist nichts zu zeigen. Ist G nicht vollständig, so ist G nach Proposition 4.5.1 die Vereinigung kleinerer chordaler Untergraphen G_1, G_2 mit $G_1 \cap G_2$ vollständig. Nach Induktionsannahme haben G_1 und G_2 Baumzerlegungen $(T_1, \mathcal{V}_1)$ und $(T_2, \mathcal{V}_2)$ in vollständige Teile. Nach Lemma 10.3.4 liegt $G_1 \cap G_2$ jeweils ganz in einem dieser Teile, etwa mit den Indizes $t_1 \in T_1$ und $t_2 \in T_2$. Wie man leicht nachprüft, ist $((T_1 \cup T_2) + t_1 t_2, \mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2)$ eine Baumzerlegung von G in vollständige Teile. □

Korollar 10.3.11. $\mathrm{tw}(G) = \min \{ \omega(H) - 1 \mid G \subseteq H;\ H \text{ chordal} \}$.

Beweis. Nach Lemma 10.3.4 und Proposition 10.3.10 hat jeder der betrachteten Obergraphen H von G eine Baumzerlegung der Weite $\omega(H) - 1$. Da nach Lemma 10.3.2 jede dieser Baumzerlegungen eine Baumzerlegung von G induziert, folgt $\mathrm{tw}(G) \leqslant \omega(H) - 1$.

Umgekehrt konstruieren wir jetzt ein geeignetes H mit $\omega(H) - 1 \leqslant \mathrm{tw}(G)$. Es sei $(T, \mathcal{V})$ eine Baumzerlegung von G der Weite $\mathrm{tw}(G)$. Für jedes $t \in T$ sei K_t der vollständige Graph auf V_t, und es sei $H := \bigcup_{t \in T} K_t$. Offenbar ist $(T, \mathcal{V})$ auch eine Baumzerlegung von H. Nach Proposition 10.3.10 ist H chordal, und nach Lemma 10.3.4 ist $\omega(H) - 1$ nicht größer als die Weite von $(T, \mathcal{V})$, also $\mathrm{tw}(G)$. □

10.4 Baumweite und verbotene Minoren

Ist $\mathcal{H}$ eine Menge oder Klasse von Graphen, so ist die Klasse

$$\mathrm{Forb}_{\preccurlyeq}(\mathcal{H}) := \{ G \mid G \not\succcurlyeq H \text{ für alle } H \in \mathcal{H} \} \qquad \mathrm{Forb}_{\preccurlyeq}(\mathcal{H})$$

aller Graphen ohne Minor in $\mathcal{H}$ eine Grapheneigenschaft: mit jedem $G \in \mathrm{Forb}_{\preccurlyeq}(\mathcal{H})$ liegen auch alle zu G isomorphen Graphen in $\mathrm{Forb}_{\preccurlyeq}(\mathcal{H})$.[1] Die Graphen $H \in \mathcal{H}$ sind die *verbotenen Minoren* in dieser Darstellung der obigen Grapheneigenschaft. *verbotene Minoren*

[1] Statt $\mathrm{Forb}_{\preccurlyeq}(\{H\})$ schreiben wir wieder kürzer $\mathrm{Forb}_{\preccurlyeq}(H)$ etc.

erblich

Wegen der Transitivität der Relation $\preccurlyeq$ (Proposition 0.7.3) ist jede Grapheneigenschaft der Form $\mathrm{Forb}_{\preccurlyeq}(\mathcal{H})$ *erblich*: aus $G' \preccurlyeq G \in \mathrm{Forb}_{\preccurlyeq}(\mathcal{H})$ folgt $G' \in \mathrm{Forb}_{\preccurlyeq}(\mathcal{H})$. Umgekehrt ist jede erbliche Grapheneigenschaft durch verbotene Minoren darstellbar:

Proposition 10.4.1. *Eine Grapheneigenschaft ist genau dann durch verbotene Minoren darstellbar, wenn sie erblich ist.*

$\overline{\mathcal{P}}$

Beweis. Ist $\mathcal{P}$ eine erbliche Grapheneigenschaft und $\overline{\mathcal{P}}$ ihr Komplement (die Klasse aller Graphen, die nicht in $\mathcal{P}$ liegen), so ist $\mathcal{P}$ gleich $\mathrm{Forb}_{\preccurlyeq}(\overline{\mathcal{P}})$, also durch verbotene Minoren darstellbar. □

Auf die allgemeine Frage nach der einfachsten Darstellung einer erblichen Grapheneigenschaft durch verbotene Minoren werden wir in Abschnitt 10.5 zurückkommen. In diesem Abschnitt interessiert uns zunächst eine ganz bestimmte Art von Eigenschaft: beschränkte Baumweite.

Betrachten wir zu gegebenem k die Graphen mit Baumweite $< k$. Nach den Propositionen 10.3.5 und 10.4.1 sind diese Graphen durch verbotene Minoren darstellbar. Wählen wir deren Menge $\mathcal{H}$ möglichst klein, so erhalten wir etwa $\mathcal{H} = \{K^3\}$ für $k = 2$: die Graphen mit Baumweite < 2 sind gerade die Wälder. Für $k = 3$ erhalten wir $\mathcal{H} = \{K^4\}$:

(6.3.1)
(10.3.2)
(10.3.4)
(10.3.10)

Proposition 10.4.2. *Für jeden Graphen G gilt* $\mathrm{tw}(G) < 3 \Leftrightarrow G \not\succcurlyeq K^4$.

Beweis. Nach Lemma 10.3.4 gilt $\mathrm{tw}(K^4) \geqslant 3$; ein Graph der Baumweite < 3 hat somit nach Proposition 10.3.5 keinen K^4-Minor.

Umgekehrt enthalte G nun keinen K^4-Minor; es gelte $|G| \geqslant 3$. Wir fügen so lange Kanten zu G hinzu, bis der erhaltene Graph G' kantenmaximal ohne K^4-Minor ist. Nach Proposition 6.3.1 kann G' rekursiv aus Dreiecken durch Zusammenkleben entlang vollständiger Untergraphen K^2 konstruiert werden. Wie in der Rückrichtung des Beweises von Proposition 10.3.10 folgt induktiv, dass jeder so konstruierbare Graph, und somit auch G', eine Baumzerlegung in Dreiecke hat. Diese Baumzerlegung von G' hat somit die Weite 2, und nach Lemma 10.3.2 ist sie auch eine Baumzerlegung von G. □

Umgekehrt können wir fragen, für welche Graphen H außer K^3 und K^4 die Baumweite der Graphen in $\mathrm{Forb}_{\preccurlyeq}(H)$ beschränkt ist. Interessanterweise sieht man ganz einfach, dass jeder solche Graph H plättbar sein muss. Da nämlich alle Gitter und deren Minoren plättbar sind, enthält jede Klasse $\mathrm{Forb}_{\preccurlyeq}(H)$ mit nicht plättbarem H alle Gitter. Wie wir jedoch bereits sahen, haben die Gitter unbeschränkte Baumweite.

Der folgende überraschende Satz besagt, dass umgekehrt für jedes plättbare H die Graphen in $\mathrm{Forb}_{\preccurlyeq}(H)$ beschränkte Baumweite haben:

Satz 10.4.3. (Robertson & Seymour 1986)
Die Baumweite der Graphen in $\mathrm{Forb}_{\preccurlyeq}(H)$ *ist genau dann beschränkt, wenn* H *plättbar ist.*

Satz 10.4.3 ist einer der zentralen Pfeiler der Minorentheorie. Mittlerweile gibt es einen nur wenige Seiten umfassenden Beweis; er ist in der englischen Ausgabe dieses Buchs dargestellt (ab der zweiten Auflage).

Satz 10.4.3 hat eine interessante Anwendung. In Kapitel 1.3 hatten wir definiert, dass eine Klasse $\mathcal{H}$ von Graphen die *Erdős-Pósa-Eigenschaft* habe, wenn die Anzahl der Ecken eines Graphen G, die man braucht, um alle Teilgraphen $H \subseteq G$ mit $H \in \mathcal{H}$ zu überdecken, durch eine Funktion in der maximalen Anzahl disjunkter solcher Teilgraphen von G beschränkt ist.

Im Folgenden sei H ein fest gewählter zusammenhängender Graph, und wir betrachten die Klasse $\mathcal{H} = MH$ von Graphen, die man zu einer Kopie von H kontrahieren kann. (Ein Graph G hat also genau dann einen Teilgraphen in $\mathcal{H}$, wenn $H \preccurlyeq G$ ist.) H $\mathcal{H}$

Korollar 10.4.4. *Ist* H *plättbar, so hat* $\mathcal{H}$ *die Erdős-Pósa-Eigenschaft.*

Beweis. Wir müssen eine Funktion $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ finden, so dass für jedes $k \in \mathbb{N}$ ein Graph G stets entweder k disjunkte (Teilgraphen aus) MH enthält oder eine Menge U von höchstens $f(k)$ Ecken mit $H \not\preccurlyeq G - U$.

Nach Satz 10.4.3 gibt es zu jedem $k \geqslant 1$ ein $w_k \in \mathbb{N}$, so dass jeder Graph der Baumweite mindestens w_k die disjunkte Vereinigung von k Kopien von H (welche wiederum plättbar ist) als einen Minor enthält. Wir definieren w_k

$$f(k) := 2f(k-1) + w_k$$

induktiv, angefangen mit $f(0) = f(1) = 0$.

Die erwünschten Eigenschaften von f überprüfen wir mit Induktion nach k. Für $k \leqslant 1$ gibt es nichts zu zeigen. Für den Induktionsschritt seien jetzt k und G gegeben. Ist $\mathrm{tw}(G) \geqslant w_k$, so sind wir fertig nach Definition von w_k. Wir nehmen daher $\mathrm{tw}(G) < w_k$ an und wählen eine Baumzerlegung $(T, (V_t)_{t \in T})$ von G der Weite $< w_k$. Die Kanten t_1t_2 des Baumes T richten wir wie folgt. Sind T_1, T_2 die Komponenten von $T - t_1t_2$, die t_1 bzw. t_2 enthalten, so setzen wir

$$G_1 := G[\bigcup_{t \in T_1} (V_t \setminus V_{t_2})] \quad \text{und} \quad G_2 := G[\bigcup_{t \in T_2} (V_t \setminus V_{t_1})]\,.$$

Wir richten dann die Kante t_1t_2 nach G_i hin, falls $H \preccurlyeq G_i$ ist; dadurch erhält t_1t_2 entweder eine oder beide oder keine Richtung.

Erhält jede Kante von T höchstens eine Richtung, so folgen wir den Richtungen bis zu einem Knoten $t \in T$, von dem keine Kanten

mehr fortgerichtet ist. Da H zusammenhängend ist, bedeutet dies nach Lemma 10.3.1, dass V_t jeden $MH \subseteq G$ trifft. Dies schließt den Beweis mit $U = V_t$ ab, da $|V_t| \leqslant w_k \leqslant f(k)$ gilt nach Wahl unserer Baumzerlegung.

Nehmen wir nun an, dass eine Kante $t_1t_2 \in T$ beide Richtungen erhalten hat. Für $i = 1, 2$ fragen wir jeweils, ob wir alle $MH \subseteq G_i$ mit höchstens $f(k-1)$ Ecken überdecken können. Können wir dies für beide i, so bilden die beiden Überdeckungen nach Lemma 10.3.1 gemeinsam mit $V_{t_1} \cap V_{t_2}$ die gewünschte Überdeckung U. Hat andererseits etwa G_1 keine solche Überdeckung, so enthält es nach Induktionsannahme $k-1$ disjunkte MH-Teilgraphen. Da t_1t_2 auch nach t_2 gerichtet war, gibt es einen weiteren solchen Teilgraphen in G_2. Dies liefert die gewünschte Anzahl von k disjunkten MH-Teilgraphen in G. □

Korollar 10.4.4 enthält den Satz 1.3.2 von Erdős und Pósa als Spezialfall, für $H = K^3$. Es ist bestmöglich in dem Sinne, dass $\mathcal{H} = MH$ für nicht plättbare H die Erdős-Pósa-Eigenschaft nicht besitzt (Übung **35**).

Zum Abschluss dieses Abschnitts wollen wir uns noch den vielleicht wichtigsten Satz der Minorentheorie außer dem Minorensatz selbst anschauen: einen Struktursatz für die Graphen, die keinen gegebenen vollständigen Graphen als Minor enthalten (Satz 10.4.5). Wie wir noch sehen werden, spielt dieser Satz eine zentrale Rolle im Beweis des Minorensatzes. Er ist aber auch darüber hinaus von grundlegender Bedeutung: die in ihm beschriebenen strukturellen Eigenschaften der Graphen ohne K^n-Minor gelten ja auch für Graphen ohne H-Minor für beliebiges H mit $|H| \leqslant n$. Damit beschreibt der Satz jede nicht-triviale erbliche Grapheneigenschaft vermöge einer – mehr oder weniger genauen – strukturellen Beschreibung ihrer Elemente.

Satz 10.4.5 verallgemeinert den Struktursatz von Wagner für die Graphen ohne K^5-Minor, Satz 6.3.4. (Für $n = 4$ vgl. Proposition 6.3.1.) Wie dort (vgl. Übung **26**) wird auch die Struktur der Graphen ohne K^n-Minor beschrieben als Baumzerlegung, deren Teile „fast“ in bestimmte Flächen einbettbar sind. Dies wollen wir zunächst präzisieren.

Torsos

Die *Torsos* einer Baumzerlegung $(T, (V_t)_{t \in T})$ eines Graphen G sind die Graphen H_t, die aus $G[V_t]$ dadurch entstehen, dass wir für jeden Nachbarn t' von t in T je zwei noch nicht benachbarte Ecken in $V_t \cap V_{t'}$ verbinden. Jede Menge $V_t \cap V_{t'}$ mit $tt' \in E(T)$ induziert also in H_t einen vollständigen Teilgraphen, der nicht Teilgraph von G sein muss. (Ist die Baumzerlegung simplizial, dann sind ihre Torsos einfach ihre Teile.)

Wegzerlegung

Ein Tupel $(V_1, \dots, V_n)$ von Eckenmengen heißt *Wegzerlegung* von G, wenn $V_1 \cup \dots \cup V_n = V(G)$ ist, jede Kante von G beide Endecken in einem der V_i hat, und $V_i \cap V_k \subseteq V_j$ gilt wann immer $i < j < k$ ist. Eine Wegzerlegung ist also nichts anderes als eine Baumzerlegung, deren Zerlegungsbaum ein Weg ist. Die *Breite* dieser Wegzerlegung ist das Maximum der Zahlen $|V_i| - 1$ $(i = 1, \dots, n)$.

Breite

Es sei S eine *Fläche*; darunter verstehen wir hier eine zusammenhängende kompakte 2-Mannigfaltigkeit ohne Rand. Weiter seien $C_1, \dots, C_k$ die Ränder von k disjunkten abgeschlossenen Kreisscheiben in S. Entfernen wir aus S das Innere jeder dieser Kreisscheiben, so erhalten wir einen bis auf Homöomorphie durch S und k eindeutig bestimmten Unterraum; wir bezeichnen diesen mit $S - k$. Jedes C_i ist das Bild einer stetigen Abbildung $f_i\colon [0,1] \to S$, die bis auf $f_i(0) = f_i(1)$ injektiv ist. Wir nennen $C_1, \dots, C_k$ die *Randkreise* von $S - k$ und die Punkte $f_1(0), \dots, f_k(0)$ deren *Wurzeln*. Die anderen Punkte auf C_i sind jeweils durch f_i linear geordnet, als Bilder von $(0,1)$. Wir werden gleich Punkte auf Randkreisen zum Indizieren von Wegzerlegungen verwenden; dabei beziehen wir uns dann auf diese linearen Ordnungen. *Einbettungen* eines Graphen in S (oder in $S - k$) sind analog zu Einbettungen in die Ebene definiert.

Fläche

$C_1, \dots, C_k$

$S - k$

Randkreise

Es sei H ein Graph, S eine Fläche, und $k \in \mathbb{N}$. Wir nennen H *k-fast einbettbar* in S, wenn es in H eine Menge X von höchstens k Ecken gibt, so dass wir $H - X$ als $H_0 \cup H_1 \cup \ldots \cup H_k$ mit den folgenden Eigenschaften schreiben können:

k-fast einbettbar

(N1) Es existiert eine Einbettung $\sigma\colon H_0 \hookrightarrow S - k$, die nur Ecken auf Randkreise abbildet und keine Ecke auf die Wurzel eines Randkreises;

(N2) Die Graphen $H_1, \dots, H_k$ sind paarweise disjunkt (und können leer sein), und für jedes $i = 1, \dots, k$ ist $H_0 \cap H_i = \sigma^{-1}(C_i)$;

(N3) Sind $z_1, \dots z_{k_i}$ die Ecken von $H_0 \cap H_i$ in der natürlichen Reihenfolge ihrer Bilder auf C_i, so hat H_i eine Wegzerlegung $(V_1, \dots, V_{k_i})$ der Breite $\leqslant k$, mit $z_j \in V_j$ für alle $j = 1, \dots, k_i$ $(i = 1, \dots, k)$.

Satz 10.4.5. (Robertson & Seymour 2003)
Zu jedem $n \geqslant 5$ existiert ein $k \in \mathbb{N}$, so dass jeder Graph, der K^n nicht als Minor enthält, eine Baumzerlegung hat, deren Torsos k-fast einbettbar sind in eine Fläche, in die K^n nicht einbettbar ist.

Da es nur endlich viele Flächen gibt, in die K^n nicht einbettbar ist, könnten wir die in Satz 10.4.5 erwähnten Flächen durch zwei ersetzten: die orientierbare und die nicht-orientierbare Fläche maximalen Geschlechts, in die K^n nicht einbettbar ist.

Satz 10.4.5 hat auch eine Umkehrung, aber nur eine qualitative. Offenbar können Graphen, die eine Zerlegung der beschriebenen Art besitzen, durchaus einen K^n Minor haben. Es existiert aber zu jedem n ein r, so dass kein so zerlegbarer Graph einen K^r Minor hat. Dies liegt im Wesentlichen daran, dass die Größe der Trenner $V_t \cap V_{t'}$ in der Baumzerlegung (für Kanten tt' des Zerlegungsbaums) beschränkt ist, zum Beispiel durch $2k + n$; denn die Trenner induzieren ja vollständige Teilgraphen in den Torsos, und diese sind jeweils k-fast einbettbar in eine jener Flächen.

10.5 Der Minorensatz

Erbliche Grapheneigenschaften treten verschiedentlich in natürlicher Weise in der Graphentheorie auf. Das vielleicht offensichtlichste Beispiel ist die Plättbarkeit, sowie entsprechend die – analog definierte – Einbettbarkeit in irgendeine fest vorgegebene Fläche.

Nach dem Satz von Kuratowski ist Plättbarkeit darstellbar durch zwei verbotene Minoren: K^5 und $K_{3,3}$. Dies ist eine *gute Charakterisierung* im folgenden Sinne. Möchten wir jemanden von der Plättbarkeit eines Graphen G überzeugen, so können wir dies leicht tun, indem wir ihm eine Zeichnung von G vorlegen. Ist andererseits G nicht plättbar, so gibt es nach dem Satz von Kuratowski auch dafür ein leicht verifizierbares „Zertifikat“: einen in G enthaltenen MK^5 oder $MK_{3,3}$. Unsere simple Proposition 10.4.2 ist ein weiteres typisches Beispiel für diese Situation: hat ein Graph die dort charakterisierte Eigenschaft, so können wir dies durch Angabe einer Baumzerlegung der Weite < 3 nachweisen; hat er sie nicht, so können wir dies an einem MK^4-Teilgraphen festmachen.

Sätze dieser Art, die eine Grapheneigenschaft $\mathcal{P}$ durch verbotene Minoren charakterisieren, gehören vielleicht zu den reizvollsten Sätzen der Graphentheorie. Wie wir in Proposition 10.4.1 sahen, gibt es für jede erbliche Eigenschaft eine solche Darstellung: notfalls durch $\overline{\mathcal{P}}$ als Klasse verbotener Minoren. Allerdings ist eine solche Darstellung umso attraktiver, je weniger verbotene Minoren sie braucht. Und in der Tat gibt es stets eine kleinste Menge verbotener Minoren, die überdies eindeutig bestimmt ist: die Menge

Kuratowskimenge $\mathcal{K}_\mathcal{P}$

$$\mathcal{K}_\mathcal{P} := \{\, H \mid H \text{ ist } \preccurlyeq\text{-minimal in } \overline{\mathcal{P}} \,\}$$

erfüllt $\mathcal{P} = \mathrm{Forb}_\preccurlyeq(\mathcal{K}_\mathcal{P})$, und sie ist in jeder anderen Menge $\mathcal{H}$ mit $\mathcal{P} = \mathrm{Forb}_\preccurlyeq(\mathcal{H})$ als Teilmenge enthalten (Beweise?). Wir nennen $\mathcal{K}_\mathcal{P}$ die *Kuratowskimenge* für $\mathcal{P}$.

Offenbar sind die Graphen in $\mathcal{K}_\mathcal{P}$ bezüglich der Minorenrelation $\preccurlyeq$ unvergleichbar. Der *Minorensatz* von Robertson und Seymour besagt nun, dass jede Menge $\preccurlyeq$-unvergleichbarer Graphen endlich ist:

Minorensatz

Satz 10.5.1. (Robertson & Seymour 1986–2004)
Die endlichen Graphen sind durch die Minorenrelation $\preccurlyeq$ wohlquasigeordnet.

Den Beweis des Minorensatzes werden wir unten kurz skizzieren.

Korollar 10.5.2. *Die Kuratowskimenge einer erblichen Grapheneigenschaft ist stets endlich.* □

$\mathcal{P}(S)$

Als Spezialfall erhalten wir, zumindest im Prinzip, für jede Fläche eine Kuratowski-artige Charakterisierung der Eigenschaft $\mathcal{P}(S)$ der Einbettbarkeit in S:

Korollar 10.5.3. *Zu jeder Fläche S gibt es eine endliche Menge $\mathcal{K}_{\mathcal{P}(S)}$ von Graphen, so dass ein Graph genau dann in S einbettbar ist, wenn er keinen Graphen aus $\mathcal{K}_{\mathcal{P}(S)}$ als Minor enthält.* □

Ein direkter Beweis von Korollar 10.5.3, der aus der Minorentheorie lediglich die Sätze 10.3.6 und 10.4.3 verwendet, ist in der englischen Ausgabe dieses Buchs dargestellt (ab 3. Auflage).

Der Beweis des Minorensatzes selbst füllt ein Buch oder zwei. Trotz seiner Komplexität in der Durchführung ist der Grundgedanke des Beweises jedoch ganz einfach. Zu zeigen ist, dass jede unendliche Folge

$$G_0, G_1, G_2, \dots$$

endlicher Graphen ein gutes Paar enthält, also zwei Graphen $G_i \preccurlyeq G_j$ mit $i < j$. Nun dürfen wir annehmen, dass $G_0 \not\preccurlyeq G_i$ gilt für alle $i \geqslant 1$ – sonst wären wir fertig. Damit liegen aber all die Graphen $G_1, G_2, \dots$ in $\mathrm{Forb}_{\preccurlyeq}(G_0)$, und wir können die Struktur der Graphen aus $\mathrm{Forb}_{\preccurlyeq}(G_0)$ ausnutzen, um ein gutes Paar zu finden.

Für den Spezialfall, dass G_0 plättbar ist, haben wir bereits gesehen, wie dies geht: die Graphen in $\mathrm{Forb}_{\preccurlyeq}(G_0)$ haben dann nach Satz 10.4.3 beschränkte Baumweite und sind somit nach Satz 10.3.6 wohlquasigeordnet. Allgemein brauchen wir nur den Fall $G_0 = K^n$ zu betrachten: wegen $G_0 \preccurlyeq K^n$ (für $n := |G_0|$) dürfen wir annehmen, dass $K^n \not\preccurlyeq G_i$ gilt für alle $i \geqslant 1$.

Der Beweis läuft dann vom Ansatz her ganz analog: auch die Graphen in $\mathrm{Forb}_{\preccurlyeq}(K^n)$ sind durch ihre Baumzerlegungen charakterisierbar, und wiederum hilft ihre Baumstruktur wie im Satz von Kruskal beim Beweis der Wohlquasigeordnetheit. Wie bereits in Wagners Satz 6.3.4 für den Fall $n = 5$ sind die Teile der Baumzerlegungen jetzt jedoch nicht mehr in ihrer Ordnung beschränkt, sondern in ihrer Feinstruktur. Grob gesprochen existiert zu jedem n eine endliche Menge $\mathcal{S}$ von Flächen, so dass jeder Graph ohne K^n-Minor eine Baumzerlegung in Teile hat, von denen jeder „fast“ in eine der Flächen $S \in \mathcal{S}$ einbettbar ist; siehe Satz 10.4.5. Nach einer Verallgemeinerung von Satz 10.3.6 – und damit des Satzes von Kruskal – reicht es nun im Wesentlichen, zu zeigen, dass die Menge all dieser möglichen Teile wohlquasigeordnet ist: dann sind es auch die Graphen mit Baumzerlegungen in diese Teile. Da $\mathcal{S}$ endlich ist, hat aber jede unendliche Folge solcher Teile eine unendliche Teilfolge, deren Glieder alle (fast) in die gleiche Fläche $S \in \mathcal{S}$ einbettbar sind. Es reicht also zu zeigen, dass die in eine vorgegebene Fläche S einbettbaren Graphen stets wohlquasigeordnet sind.

Dies beweist man durch Induktion nach dem Geschlecht der Fläche (genauer: durch Induktion nach $2-\chi(S)$, wobei $\chi(S)$ die Euler-Charak-

teristik von S ist), mit dem schon vertrauten Ansatz: ist $H_0, H_1, H_2, \ldots$ eine unendliche Folge in S einbettbarer Graphen, so dürfen wir annehmen, dass keiner der Graphen $H_1, H_2, \ldots$ einen H_0-Minor hat. Ist $S = S^2$, so haben wir unseren bereits betrachteten Fall, dass H_0 plättbar ist; dies ist der Induktionsanfang. Zum Induktionsschritt sei nun $S \neq S^2$. Auch jetzt beschränkt das Verbot eines H_0-Minors die Struktur der Graphen $H_1, H_2, \ldots$, wenn auch diesmal topologisch: jedes H_i mit $i \geqslant 1$ besitzt eine Einbettung in S, die eine geeignete nicht kontrahierbare geschlossene Kurve $C_i \subseteq S$ in nur beschränkt vielen Ecken (und in keiner Kante) trifft, sagen wir in $X_i \subseteq V(H_i)$. (Die Schranke für $|X_i|$ hängt von H_0 ab, aber nicht von H_i.) Indem wir S entlang C_i aufschneiden und an die ein oder zwei entstandenen Randkurven jeweils eine Scheibe annähen, erhalten wir ein oder zwei Flächen geringeren Geschlechts (größerer Euler-Charakteristik). Entsteht beim Aufschneiden von S nur eine neue Fläche S_i, so zählt unsere Einbettung von $H_i - X_i$ in S_i noch als eine Fast-Einbettung von H_i in S_i (da X_i klein ist). Tritt dies für unendlich viele i ein, so ist auch die Fläche S_i dieselbe für unendlich viele i, und wir haben nach Induktionsannahme unter den entsprechenden H_i ein gutes Paar. Entstehen andererseits für unendlich viele i jeweils zwei Flächen S'_i und S''_i (oBdA dieselben beiden), so zerfällt H_i entsprechend in darin eingebettete Teilgraphen H'_i und H''_i, mit $V(H'_i \cap H''_i) = X_i$. Die Menge all dieser Teilgraphen (für alle i zusammen) ist wieder nach Induktionsannahme wohlquasigeordnet, und die Paare (H'_i, H''_i) sind es nach Lemma 10.1.3. Nach einer Verschärfung des Lemmas, die außer den Graphen H'_i und H''_i auch berücksichtigt, wie X_i in ihnen liegt, finden wir schließlich Indizes $i < j$, für die wir aus $H'_i \preccurlyeq H'_j$ und $H''_i \preccurlyeq H''_j$ überdies auf $H_i \preccurlyeq H_j$ schließen können – und der Beweis des Minorensatzes ist vollständig.

Wir bemerken noch, dass der Minorensatz auch auf die algorithmische Graphentheorie ganz fundamentale Auswirkungen hat. Mit ihrem Baumzerlegungsstruktursatz für die Graphen in $\mathrm{Forb}_{\preccurlyeq}(K^n)$ haben Robertson und Seymour gezeigt, dass die Existenz eines gegebenen Minors in einem Graphen algorithmisch im Prinzip „schnell“ zu überprüfen ist: zu jedem Graphen X existiert ein Polynom[2] P und ein Algorithmus, der zu einem Graphen auf n Ecken stets in höchstens $P(n)$ Schritten entscheidet, ob X ein Minor dieses Graphen ist. Nach dem Minorensatz ist damit jede erbliche Grapheneigenschaft in diesem Sinne polynomiell (sogar in kubischer Zeit) entscheidbar: ist $\{H_1, \ldots, H_k\}$ die zu der Eigenschaft gehörige Kuratowskimenge verbotener Minoren, so brauchen wir zu gegebenem Graphen G lediglich nacheinander die k Aussagen $H_i \preccurlyeq G$ zu testen!

[2] sogar ein Polynom dritten Grades – wenn auch mit enormer von X abhängiger Konstante

Welch einen Fortschritt diese Tatsache für die Komplexitätstheorie[3] von Graphenproblemen bedeutet, lässt sich am folgenden Beispiel ermessen. Ein Graph heißt *knotenfrei*, wenn er eine Darstellung im euklidischen Raum $\mathbb{R}^3$ besitzt, in der kein Kreis des Graphen einen nicht trivialen Knoten bildet. Bis zum Beweis des Minorensatzes war es ein bekanntes Problem der algorithmischen Topologie, ob die Frage nach der Knotenfreiheit eines Graphen entscheidbar sei, d.h. ob es *irgendeinen* Algorithmus gebe (egal wie langsam), der zu jedem gegebenen Graphen entscheiden kann, ob dieser Graph knotenfrei ist.

Bis heute ist kein solcher Algorithmus bekannt. Die Eigenschaft der Knotenfreiheit ist aber, wie man „sieht“, erblich: die Kontraktion einer Kante wird keinen Knoten schaffen, wo vorher keiner war. Nach dem Minorensatz *existiert* daher ein Algorithmus, der die Knotenfreiheit entscheidet – und sogar ein Algorithmus mit polynomieller (kubischer) Laufzeit, d.h. ein Algorithmus einer theoretisch ganz geringen Komplexitätsstufe!

So spektakulär die genannten unvermittelten Lösungen ehemals offener Probleme durch den Minorensatz auch sein mögen – man wird seiner Bedeutung nicht gerecht, wenn man sie auf diese Korollare reduziert. Mindestens ebenso wichtig sind die zum Beweis des Satzes ganz neu entwickelten Methoden der Behandlung von Minoren: Methoden, die in diesem Kapitel überwiegend nicht einmal angeklungen sind. Dem interessierten Leser sei das Studium dieser Methoden empfohlen; sie werden die Graphentheorie auf absehbare Zeit prägen.

Übungen

1.$^-$ Auf einer Menge X sei eine Quasiordnung $\leqslant$ definiert. Zwei Elemente $x, y \in X$ seien *äquivalent*, wenn sowohl $x \leqslant y$ als auch $y \leqslant x$ gilt. Zeige, dass dies in der Tat eine Äquivalenzrelation auf X ist, und dass $\leqslant$ auf der Menge der Äquivalenzklassen eine Halbordnung induziert.

2. Auf einer Menge A sei eine Quasiordnung $\leqslant$ definiert, und für Teilmengen $X \subseteq A$ sei

$$\mathrm{Forb}\,(X) := \{\, a \in A \mid a \not\geqslant x \text{ für alle } x \in X \,\}\,.$$

Zeige, dass $\leqslant$ genau dann eine Wohlquasiordnung auf A ist, wenn jede unter $\geqslant$ abgeschlossene Teilmenge B (d.h. jedes $B \subseteq A$ mit $x \leqslant y \in B \;\Rightarrow\; x \in B$) die Form $B = \mathrm{Forb}\,(X)$ hat für ein endliches $X \subseteq A$.

[3] Als *Komplexitätstheorie* bezeichnet man die Untersuchungen der „Komplexität“ algorithmischer Probleme, ihrer Lösbarkeit durch möglichst schnelle Algorithmen. Die Komplexitätstheorie liegt im Grenzgebiet zwischen Mathematik und theoretischer Informatik.

3. Beweise Proposition 10.1.1 und Korollar 10.1.2 direkt, ohne den Satz von Ramsey zu benutzen.

4. Für zwei Teilmengen A, B einer Menge X mit Halbordnung $\leqslant$ gelte $A \leqslant' B$, wenn eine *ordnungserhaltende* Injektion $f\colon A \to B$ mit $a \leqslant f(a)$ für alle $a \in A$ existiert. Gilt Lemma 10.1.3 entsprechend auch mit $\leqslant'$?

5.$^-$ Zeige, dass die im Text definierte Relation $\leqslant$ zwischen Wurzelbäumen in der Tat eine Quasiordnung ist.

6. Zeige, dass die endlichen Bäume durch die Teilgraphenrelation nicht wohlquasigeordnet sind.

7. Im letzten Schritt des Beweises vom Satz von Kruskal wird bei der topologischen Einbettung von T_m in T_n die Wurzel von T_m auf die Wurzel von T_n abgebildet. Nehmen wir induktiv an, dass auch bei der Einbettung der Bäume aus A_m in die Bäume aus A_n stets Wurzeln auf Wurzeln abgebildet werden, so erhalten wir ganz analog zum Beweis von Kruskal einen Beweis, dass die endlichen Wurzelbäume durch die Teilgraphenrelation (bei Abbildung von Wurzeln auf Wurzeln) wohlquasigeordnet sind. Wo liegt der Fehler?

8. Sind die zusammenhängenden endlichen Graphen bereits durch Kontraktion allein (d.h. durch Minorenbildung ohne Kanten- oder Eckenlöschung) wohlquasigeordnet?

9.$^+$ Schwäche die Minorenrelation ab durch Verzicht auf die Forderung, dass Verzweigungsmengen zusammenhängend sein müssen. Zeige, dass die endlichen Graphen durch diese Relation wohlquasigeordnet sind.

10.$^+$ Zeige, dass die endlichen Graphen durch die topologische Minorenrelation nicht wohlquasigeordnet sind.

11.$^+$ Ist die Klasse $\{\, G \mid G \not\supseteq P^k \,\}$ durch die Teilgraphenrelation wohlquasigeordnet?

12.$^-$ Es sei G ein Graph, T ein Baum, und $\mathcal{V} = (V_t)_{t \in T}$ eine Familie von Teilmengen von $V(G)$. Zeige, dass $(T, \mathcal{V})$ genau dann eine Baumzerlegung von G ist, wenn

   (i) für jedes $v \in V(G)$ die Menge $T_v := \{\, t \mid v \in V_t \,\}$ einen Teilbaum von T induziert;

   (ii) $T_u \cap T_v \neq \emptyset$ gilt für alle Kanten uv von G.

13.$^-$ Zeige, dass jeder Graph G eine Baumzerlegung der Weite $\mathrm{tw}(G)$ hat, in der kein Teil einen anderen enthält.

14. Zeige, dass ein Graph genau dann die Baumweite höchstens 1 hat, wenn er ein Wald ist.

15. Es sei G ein Graph, T eine Menge, und $(V_t)_{t \in T}$ eine Familie von Teilmengen von $V(G)$, die die Bedingungen (T1) und (T2) aus der Definition einer Baumzerlegung erfüllt. Zeige, dass genau dann ein Baum auf T existiert, der (T3) wahr macht, wenn T eine Aufzählung $t_1, \ldots, t_n$ hat, bei der es zu jedem $k = 2, \ldots, n$ ein $j < k$ gibt mit $V_{t_k} \cap \bigcup_{i<k} V_{t_i} \subseteq V_{t_j}$.

(Die angegebene Bedingung ist in der Praxis meist einfacher zu überprüfen als (T3). Sie ist daher oft nützlich bei der Konstruktion einer Baumzerlegung in eine vorgegebene Menge von Teilen.)

16. Beweise die folgende Umkehrung von Lemma 10.3.1: erfüllt $(T, \mathcal{V})$ die Bedingung (T1) und die Aussage des Lemmas, so ist $(T, \mathcal{V})$ eine Baumzerlegung von G.

17. Kann die Baumweite einer Unterteilung eines Graphen G kleiner sein als $\mathrm{tw}(G)$? Kann sie größer sein?

18.$^+$ Zeige, dass die Baumweite eines Graphen vom Umfang $k \neq 0$ höchstens $k-1$ beträgt.

19. Zwei Teilungen $\{U_1, U_2\}$ und $\{W_1, W_2\}$ von G heißen *verträglich*, wenn es $i, j \in \{1, 2\}$ gibt mit $U_i \subseteq W_j$ und $U_{3-i} \supseteq W_{3-j}$.

(i) Zeige, dass die Teilungen $S_e := \{U_1, U_2\}$ in Lemma 10.3.1 für verschiedene Wahlen der Kante $e = t_1t_2 \in T$ stets verträglich sind.

(ii)$^+$ Zeige umgekehrt, dass es zu einer gegebenen Menge $\mathcal{S}$ verträglicher Teilungen von G stets eine Baumzerlegung $(\mathcal{V}, T)$ mit $\{ S_e \mid e \in E(T) \} = \mathcal{S}$ gibt.

20.$^+$ Zeige, dass jeder 2-zusammenhängende Graph G eine Baumzerlegung $(T, (V_t)_{t \in T})$ hat, so dass $|V_t \cap V_{t'}| = 2$ gilt für jede Kante $tt' \in T$ und jeder Torso entweder 3-zusammenhängend oder ein Kreis ist. Zeige umgekehrt, dass jeder Graph mit einer solchen Baumzerlegung 2-zusammenhängend ist.

(Tip: Verwende eine Baumzerlegung, die nach Übung **19** (ii) durch die Menge all der Teilungen der Ordnung 2 induziert wird, die mit allen anderen solchen Teilungen verträglich sind.)

21. Zeige mit Hilfe von Satz 10.3.8, dass das $k \times k$-Gitter eine Baumweite von mindestens k hat, und finde eine Baumzerlegung der Weite genau k.

22. Es sei $\mathcal{B}$ ein Netz maximaler Dichte in einem Graphen G. Zeige, dass jede Baumzerlegung minimaler Weite von G genau einen Teil hat, der $\mathcal{B}$ überdeckt.

23.$^+$ In der zweiten Hälfte des Beweises von Satz 10.3.8 sei H' die Vereinigung von H mit den Wegen $P_1, \dots, P_\ell$, sowie H'' der aus H' durch Kontraktion der P_i gewonnene Graph. Weiter sei $(T, (W''_t)_{t \in T})$ die Baumzerlegung von H'', die wie in Lemma 10.3.3 durch die Baumzerlegung induziert wird, die $(T, (V_t)_{t \in T})$ auf H' induziert. Identifizieren wir H'' mit H in der offensichtlichen Weise, so ist $(T, (W''_t)_{t \in T})$ auch eine Baumzerlegung von H. Ist dies dieselbe Zerlegung wie die im Beweis definierte Zerlegung $(T, (W_t)_{t \in T})$ von H, d.h. gilt $W''_t = W_t$ für alle $t \in T$?

24.$^-$ Zeige, dass jeder Graph mit einer simplizialen Baumzerlegung in k-färbbare Teile selbst k-färbbar ist.

25. Es sei $\mathcal{H}$ eine Menge von Graphen, und G sei rekursiv aus Elementen von $\mathcal{H}$ konstruierbar durch Zusammenkleben entlang vollständiger Teilgraphen. Zeige, dass G eine simpliziale Baumzerlegung in Graphen aus $\mathcal{H}$ besitzt.

26. Zeige mit Hilfe der vorigen Übung, dass G genau dann K^5 nicht zum Minor hat, wenn G eine Baumzerlegung besitzt, bei der jeder Torso entweder plättbar ist oder isomorph zum Wagner-Graphen W (Abb. 6.3.1).

27.$^+$ Ein Graph heiße *irreduzibel*, wenn er durch keinen vollständigen Teilgraphen getrennt wird. Jeder endliche Graph G lässt sich wie folgt rekursiv in irreduzible Untergraphen zerlegen (beginnend mit $H := G$): hat $H \subseteq G$ einen trennenden vollständigen Teilgraphen S, so zerlege H in echte Untergraphen H' und H'' mit $H = H' \cup H''$ und $H' \cap H'' = S$. Nach Übung **25** hat G eine simpliziale Baumzerlegung in die hierbei schließlich erhaltenen irreduziblen Untergraphen. Zeige, dass die Menge dieser irreduziblen Teile eindeutig bestimmt ist, wenn S stets minimal gewählt wird.

28. Ist $\mathcal{F}$ eine Familie von Mengen, so nennt man den Graphen G auf $\mathcal{F}$ mit $XY \in E(G) \Leftrightarrow X \cap Y \neq \emptyset$ den *Schnittgraphen* von $\mathcal{F}$. Zeige, dass ein Graph genau dann chordal ist, wenn er isomorph ist zum Schnittgraphen einer Familie von (Eckenmengen von) Teilbäumen eines Baumes.

29. Zeige, dass ein Graph genau dann eine Wegzerlegung in sämtlich vollständige Teile besitzt, wenn er isomorph zu einem Intervallgraphen ist. (Intervallgraphen sind in Übung **40**, Kap. 4, definiert.)

30. (Fortsetzung der vorigen Übung)

    Die *Wegbreite* $\mathrm{pw}(G)$ eines Graphen G ist die geringste Breite einer Wegzerlegung von G. Zeige das folgende Analogon zu Korollar 10.3.11 für die Wegbreite: für jeden Graphen G ist $\mathrm{pw}(G) + 1$ gleich der geringsten Cliquenzahl eines Intervallgraphen $H \supseteq G$.

31.$^+$ Haben Bäume unbeschränkte Wegbreite?

32.$^-$ Betrachte eine erbliche Grapheneigenschaft $\mathcal{G}$. Zeige, dass bei einer Verschärfung der Minorenrelation (wie beispielsweise zur Relation topologischer Minoren) die Anzahl der zur Darstellung von $\mathcal{G}$ erforderlichen verbotenen Minoren nicht sinken kann.

33. Beweise unter Benutzung des Minorensatzes, dass jede erbliche Grapheneigenschaft auch durch endlich viele verbotene topologische Minoren darstellbar ist. Gilt dies auch allgemeiner für jede unter topologischer Minorenbildung abgeschlossene Grapheneigenschaft?

34. Erweitere Korollar 10.4.4 wie folgt. Es sei H ein zusammenhängender plättbarer Graph, $\mathcal{X}$ eine beliebige Menge zusammenhängender Graphen mit $H \in \mathcal{X}$, und $\mathcal{H} := \{ MX \mid X \in \mathcal{X} \}$. Zeige, dass $\mathcal{H}$ die Erdős-Pósa-Eigenschaft besitzt, und zwar mit derselben Funktion f wie im Beweis von Korollar 10.4.4. Wie kann es sein, dass f von H abhängt aber von keinem anderen Graphen aus $\mathcal{X}$?

35.$^+$ Zeige, dass für jeden nicht plättbaren Graphen H die Klasse $\mathcal{H}$ aller MH die Erdős-Pósa-Eigenschaft nicht besitzt.

(Hinweis. Bette H in eine Fläche S ein und betrachte nur in S eingebettete Graphen.)

36.$^+$ Erweitere Korollar 10.4.4 auf unzusammenhängende Graphen H oder finde ein Gegenbeispiel.

37.$^+$ Zeige, dass die vier Zutaten im Rezept der Strukturbeschreibung der Graphen in $\mathrm{Forb}_{\preccurlyeq}(K^n)$ durch Satz 10.4.5 – Baumzerlegungen, eine beschränkte Menge X unkontrollierbarer Ecken, Einbettbarkeit in Flächen beschränkten Geschlechts, und die „Strudel“ $H_1, \dots, H_k$ – alle nötig sind, um alle Graphen aus $\mathrm{Forb}_{\preccurlyeq}(K^n)$ zu erfassen. Genauer: finde Beispiele für Graphen aus $\mathrm{Forb}_{\preccurlyeq}(K^n)$, die zeigen, dass Satz 10.4.5 falsch wird, wenn wir zusätzlich verlangen, dass die Baumzerlegung nur einen Teil hat, oder dass X immer leer ist, oder dass S immer die Sphäre ist, oder dass $H_1, \dots, H_k$ immer leer sind. Es sind keine exakten Beweise gefordert.

38. Zeige ohne Benutzung des Minorensatzes, dass die chromatische Zahl der Graphen in einer $\preccurlyeq$-Antikette stets beschränkt ist.

39. Finde eine von g abhängige untere Schranke für die Anzahl der verbotenen Minoren, durch die die Einbettbarkeit in eine (orientierbare) Fläche des Geschlechts g darstellbar ist.

(Tip: Als *Geschlecht* eines Graphen bezeichnet man das kleinste Geschlecht einer (orientierbaren) Fläche, in die er einbettbar ist. Verwende den Satz, dass das Geschlecht eines Graphen gleich der Summe der Geschlechter seiner Blöcke ist.)

40. Die *self-minor conjecture* von Seymour besagt, dass jeder abzählbar unendliche Graph sein eigener echter Minor sei. Präzisiere diese Aussage, und leite daraus den Minorensatz her.

41. Aus dem $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$-Gitter H sei ein Graph G durch Hinzufügung unendlich vieler Kanten xy mit unbeschränkter „Spannweite“ $d_H(x, y)$ gewonnen. Jede Ecke von G habe endlichen Grad. Zeige, dass G einen unendlichen vollständigen Graphen als Minor enthält. Gilt dies auch, wenn die Spannweiten $d_H(x, y)$ beschränkt sind (aber mindestens 3 betragen)?

42. Ist das $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$-Gitter ein Minor des $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$-Gitters? Ist letzteres ein Minor des $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$-Gitters?

Notizen

Der Satz, dass die endlichen Bäume durch die topologische Minorenrelation wohlquasigeordnet sind, ist von J.A. Kruskal, Well-quasi ordering, the tree theorem, and Vászonyi's conjecture, *Trans. Amer. Math. Soc.* **95** (1960), 210–225. Unser Beweis, und insbesondere die Beweisidee der *minimal bad sequence* – mit der wir bereits das ursprünglich von Higman stammende Lemma 10.1.3 bewiesen haben – stammt von Nash-Williams.

Nash-Williams verallgemeinerte überdies den Satz von Kruskal auf unendliche Graphen; dies ist eines der tiefsten Resultate der unendlichen Graphentheorie. Für Einzelheiten und weitere Literaturangaben verweisen wir auf Halins Monographie *Graphentheorie*, Darmstadt 1989. Der allgemeine Minorensatz ist falsch im Unendlichen (Thomas 1988); ob die abzählbaren Graphen durch die Minorenrelation wohlquasigeordnet sind, ist ein noch offenes Problem.

Die Begriffe der Baumzerlegung und Baumweite wurden (unter anderer Bezeichnung) zuerst eingeführt und untersucht von R. Halin, *S*-functions for graphs, *J. Geometry* **8** (1976), 171–186; bereits dort findet sich der Satz, dass ebene Gitter beliebig hohe Baumweite haben können. Robertsen & Seymour formulierten die beiden Begriffe, offenbar ohne Halin's Arbeit zu kennen, in Anlehnung an die in Wagners Satz 6.3.4 vorkommenden simplizialen Baumzerlegungen. Letztere werden ausführlich behandelt in R. Diestel, *Graph Decompositions*, Oxford 1990.

Robertson & Seymours Originalbeweis des Minorensatzes ist enthalten in den Nummern IV–VII, IX–XII und XIV–XX ihrer über 20 Arbeiten mit dem Obertitel *Graph Minors*. Diese Arbeiten sind in der Zeit von 1983 bis 2004 im *Journal of Combinatorial Theory B* erschienen. Von den in unserem Kapitel zitierten Resultaten ist Satz 10.3.6 aus Graph Minors IV, Satz 10.4.3 aus Graph Minors V, und Satz 10.4.5 aus Graph Minors XVI. Einige Beweise der Reihe sind später wesentlich gestrafft worden. Der gegenwärtig kürzeste Beweis von Satz 10.4.3 findet sich in R. Diestel, K.Yu. Gorbunov, T.R. Jensen & C. Thomassen, Highly connected sets and the excluded grid theorem, *J. Comb. Theory B* **75** (1999), 61–73; er ist in der englischen Ausgabe dieses Buchs wiedergegeben.

Satz 10.3.8 stammt von P.D. Seymour & R. Thomas, Graph searching and a min-max theorem for tree-width, *J. Comb. Theory B* **58** (1993), 22–33; unser Beweis ist eine Vereinfachung des Originalbeweises. B.A. Reed, Tree-width and tangles: a new connectivity measure and some applications, in (R.A. Bailey, Hrsg.): *Surveys in Combinatorics*, Cambridge University Press 1997, 87–162, gibt eine hilfreiche – wenn auch leider nicht ganz fehlerfreie – Einführung in die Minorentheorie mit besonderem Augenmerk auf Baumzerlegungen, einschließlich algorithmischer Gesichtspunkte. Der Satz 10.3.9 über schlanke Baumzerlegungen ist von R. Thomas, A Menger-like property of tree-width; the finite case, *J. Comb. Theory B* **48** (1990), 67–76. Ein kurzer Beweis findet sich in P. Bellenbaum & R. Diestel, Two short proofs concerning tree-decompositions, *Comb. Probab. Comput.* **11** (2002), 541–547.

Die Kuratowskimenge für die Graphen der Baumweite < 4 wurde von S. Arnborg, D.G. Corneil und A. Proskurowski bestimmt, Forbidden minors characterization of partial 3-trees, *Discrete Math.* **80** (1990), 1–19. Die verbotenen Minoren sind K^5, das Oktaeder $K_{2,2,2}$, das fünfseitige Prisma $C^5 \times K^2$, und der Wagner-Graph W.

Als Vorläufer zu Satz 10.4.3 bewiesen Robertson & Seymour sein folgendes Analogon für Wegbreite (Graph Minors I): einen Graphen H als Minor zu verbieten beschränkt die Wegbreite genau dann, wenn H ein Wald ist. Ein kurzer Beweis dieses Resultats mit optimalen Schranken findet sich in der ersten Auflage dieses Buches, sowie in R. Diestel, Graph Minors I: a short proof of the path width theorem, *Comb. Probab. Comput.* **4** (1995), 27–30.

Die Kuratowskimenge $\mathcal{K}_{\mathcal{P}(S)}$ wurde bisher nur für eine Fläche S außer der Sphäre bestimmt, für die projektive Ebene. Sie enthält 35 verbotene Minoren; siehe D. Archdeacon, A Kuratowski theorem for the projective plane, *J. Graph Theory* **5** (1981), 243–246. Es ist nicht schwer zu zeigen, dass $|\mathcal{K}_{\mathcal{P}(S)}|$ mit dem Geschlecht von S rasch anwächst (Übung **39**). Eine obere Schranke gibt P.D. Seymour, A bound on the excluded minors for a surface, *J. Comb. Theory B* (to appear).

Eine etwas ältere Übersicht über Struktursätze für Grapheneigenschaften der Form $\mathrm{Forb}_{\preccurlyeq}(H)$ findet sich in Kapitel 6.1 von R. Diestel, *Graph Decompositions*, Oxford University Press 1990. Neuere Entwicklungen beschreibt R. Thomas, Recent excluded minor theorems, in (J.D. Lamb & D.A. Preece, Hrsg.) *Surveys in Combinatorics 1999*, Cambridge University Press 1999, 201–222. Struktursätze für unendliche verbotene Minoren sind zusammengestellt in N. Robertson, P.D. Seymour & R. Thomas geboten, Excluding infinite minors, *Discrete Math.* **95** (1991), 303–319.

B. Mohar, Embedding graphs in an arbitrary surface in linear time, *Proc. 28th Ann. ACM STOC* (Philadelphia 1996), 392–397, hat zu jeder Fläche einen linearen Algorithmus entwickelt, der die Einbettbarkeit eines Input-Graphen in diese Fläche entscheidet. Als Korollar ergibt dies einen unabhängigen und konstruktiven Beweis des „allgemeinen Kuratowski-Satzes“, Korollar 10.5.3.

Graph Minors XIII gibt zu jedem gegebenen Graphen X einen expliziten kubischen Algorithmus an, der die Frage $X \preccurlyeq G$ für Input-Graphen G entscheidet. Die Konstanten in dem Polynom, das die Laufzeit dieses Algorithmus beschränkt, hängen von X ab, sind aber jeweils konstruktiv nach oben beschränkt. Eine Übersicht über die algorithmische Aspekte der Minorentheorie gibt D. Johnson in seiner NPC-Kolumne im *J. Algorithms* **8** (1987), 285–303.

Der Begriff einer *guten Charakterisierung* einer Grapheneigenschaft wurde geprägt von J. Edmonds, Minimum partition of a matroid into independent subsets, *J. Research of the National Bureau of Standards (B)* **69** (1965) 67–72. In der Sprache der Komplexitätstheorie ist eine Charakterisierung *gut*, wenn sie zu gegebenem Graphen G die Äquivalenz von zwei Aussagen über G zum Inhalt hat, von denen die eine die Existenz eines in polynomiell beschränkter Zeit prüfbaren Zertifikats für eine Eigenschaft von G behauptet, die andere die Nichtexistenz eines solchen Zertifikats für die entgegengesetzte Eigenschaft. Eine gute Charakterisierung hat also stets zum Korollar, dass das Entscheidungsproblem, ob ein Graph die charakterisierte Eigenschaft hat, in $\mathrm{NP} \cap \text{co-NP}$ liegt.

Lösungshinweise für alle Übungen

Die hier gegebenen Hinweise sollen all denjenigen den Einstieg in eine mögliche Lösung der jeweiligen Aufgabe doch noch ermöglichen, die sich bereits eine zeitlang vergebens mit dieser Aufgabe beschäftigt haben. Ohne solch vorheriges eigenes Bemühen wird in der Regel der Hinweis nicht allzu verständlich sein. Überdies haben gerade die interessanteren Aufgaben meist mehrere mögliche Lösungen; wer voreilig in den Hinweisen stöbert, wird auf die schönste Lösung vielleicht nicht mehr kommen...

Hinweise zu Kapitel 0

1.$^-$ Wieviele Kanten gehen von jeder Ecke aus?

2. Durchschnittsgrad und Kantenzahl: welche Eckengrade kommen vor? Durchmesser: wie kann man den Abstand zwischen Ecken im Graphen durch Betrachten der entsprechenden 0–1 - Folgen bestimmen? Taillenweite: besitzt der Graph einen Kreis der Länge drei? Umfang: Zerlege den d-dimensionalen Würfel in zwei $(d-1)$-dimensionale Würfel und benutze Induktion.

3. Betrachte, wie P und C einander schneiden. Wo treten hier Kreise auf?

4.$^-$ Existieren Graphen G, für die in Proposition 0.3.2 Gleichheit gilt?

5. Schätze die Abstände in G mittels einer zentralen Ecke ab.

6. Zähle die Ecken wie im Beweis von Proposition 0.3.3. Für gerade Taillenweite beginne mit zwei benachbarten Ecken statt mit einer.

7.$^+$ Betrachte einen längsten Weg P in G. Wo liegen die Nachbarn seiner Endecken? Kann $G[P]$ einen Kreis auf $V(P)$ enthalten?

8.$^+$ Betrachte für zwei Ecken x, y maximalen Abstands die Distanzklassen D_i von x aus und zeige, dass viele davon groß sein müssen.

9.$^-$ Sonst entsteht ein Widerspruch zu der Definition – wie genau?

10.$^-$ Offenbar reicht es zu zeigen, dass der Graph zwei kreuzungsfreie Wege zwischen zwei fest gewählten Ecken enthält. Dies gelingt besonders leicht bei geschickter Wahl der beiden Ecken.

11. Jede Teilaufgabe besteht aus zwei Teilen: einer unteren und einer oberen Schranke. Beim Würfel verwende Induktion nach n.

12.$^-$ Suche Gegenbeispiele für $k = 1$.

13.$^+$ Formuliere (i) und (ii) als Existenzaussagen zweier Funktionen $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Um ihre Äquivalenz zu zeigen, drücke jeweils die eine Funktion mittels der anderen aus. Zeige, dass (iii) häufiger gilt als (i) und (ii), und finde eine Zusatzbedingung zu (iii), die dem abhilft.

14.$^+$ Versuche, den Induktionsbeweis allein mit der Annahme von $\varepsilon \geqslant c_k$ durchzuführen. Woran scheitert das?

15. Zeige (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ (i) aus den Definitionen der auftretenden Begriffe.

16.$^-$ Wie macht man aus verschiedenen Nachbarn verschiedene Blätter?

17. Durchschnittsgrad.

18. Satz 0.5.1.

19. Verwende einen normalen Spannbaum.

20.$^+$ Induktion.

21. Am einfachsten geht's mit Induktion nach $|T|$; was für eine Ecke könnte man im Induktionsschritt am besten fortlassen?

22. Eine Möglichkeit, aber nicht die einzige, ist Induktion nach $|T|$.

23.$^-$ Zähle die Kanten.

24. Wie gewinnt man aus einem nicht induzierten Kreis ungerader Länge einen induzierten Kreis ungerader Länge?

25.$^+$ Betrachte einen kürzesten ungeraden Kreis.

26.$^+$ Wie zerlegt man die Eckenmenge eines Graphen G so in zwei Teile A und B, dass der Minimalgrad des aus den A–B-Kanten von G bestehenden bipartiten Graphen H möglichst groß wird? Um f zu finden, wende diese Methode auf einen geeigneten Teilgraphen des gegebenen Graphen G' an und bestimme, wie groß $d(G')$ sein muss, damit $\delta(H) \geqslant k$ wird.

27.$^-$ Definiere f bzw. die Verzweigungsmengen V_x so, dass $f(v) = x$ gilt für alle $v \in V_x$.

28. Für die zweite Frage versuche, den Beweis für endliche Graphen nachzuahmen.

29. Versuche, den Beweis von Satz 0.8.1 nachzuahmen.

30. Weshalb erzeugen *alle* Schnitte der Form $E(v)$ den Schnittraum? Können wir dann einen davon fortlassen? Oder sogar zwei?

31. Behalte im Auge, worauf genau sich jeweils die Minimalität bezieht.

32. Ahme den Beweis von Proposition 0.9.1 nach.
33. Betrachte zunächst den Fall, dass der Graph ein Kreis ist.
34.$^+$ Betrachte eine Kantenmenge $F \subseteq E$, die jeden Kreis in gerade vielen Kanten trifft. Kontrahiere alle Kanten aus $E \setminus F$. Welche Struktur hat der entstehende Multigraph?
35. Für welche Kanten e sollten wir den Fundamentalkreis C_e mit verwenden, um einen gegebenen Kreis C zu erzeugen?
36. Für welche Kanten e sollten wir den Fundamentalschnitt D_e mit verwenden, um einen gegebenen Schnitt D zu erzeugen?
37. Induktion nach k.
38.$^+$ Induktion nach $|G|$. Zum Induktionsschritt lösche eine Ecke ungeraden Grades, und wende die Induktionsannahme auf eine die Ecke v widerspiegelnde Modifikation von $G - v$ an.

Hinweise zu Kapitel 1

1. Auf welche Weise überführt eine Verbesserungsweg eine gegebene Paarung in eine größere? Kann man diesen Prozess umkehren, d.h. aus einer gegebenen Paarung und einer größeren einen Verbesserungsweg gewinnen?
2. Suche Verbesserungswege zu den Ecken, die noch nicht gepaart sind.
3. Verwandle die Abbildungen in einen Multigraphen und betrachte dessen Komponenten.
4. Wenn es keine Paarung von A gibt, dann genügen nach dem Satz von König wenige Ecken, um alle Kanten zu überdecken. Wie kann uns diese Annahme helfen, um eine große Teilmenge von A zu finden, die wenige Nachbarn hat?
5. Zeige, dass die Heiratsbedingung in H für $A_1 \cup A_2$ versagt. Der Beweis ist fast ein Spiegelbild des dritten Beweises, wobei Vereinigungen und Durchschnitte vertauscht sind.
6.$^+$ Ist $S \subsetneq S' \subseteq A$ mit $|S| = |N(S)|$, so sichert die Heiratsbedingung im endlichen Fall, dass entsprechend $N(S) \subsetneq N(S')$ gilt: wächst die Menge S, so bekommt sie auch mehr Nachbarn. Gilt dies auch im Unendlichen?
7. Benutze den Heiratssatz.
8. Konstruiere einen bipartiten Graphen, in dem geeignet viele Kopien der Mengen A_i die eine Partitionsmenge bilden und A die andere Partitionsmenge ist. Definiere die Kanten des Graphen so, dass eine Anwendung des Heiratssatzes das gewünschte Ergebnis liefert.
9.$^+$ Zur Konstruktion der im Tip genannten Ketten finde für jedes $k < n/2$ eine Injektion φ von der Menge A der k-elementigen in die Menge B der $(k+1)$-elementigen Teilmengen von X mit $Y \subseteq \varphi(Y)$ für alle $Y \in A$.
10.$^+$ Betrachte ein minimales die Heiratsbedingung verletzendes $S \subseteq A$ und zähle die Kanten zwischen S und $N(S)$ einmal von S und einmal von $N(S)$ aus.

11.$^-$ Eine Veränderung tritt mit größerer Wahrscheinlichkeit dann auf, wenn unzufriedene Ecken diese hervorrufen können, ohne die zufriedenen fragen zu müssen. Falls Philosophie nicht hilft, hilft vielleicht K^3.

12.$^-$ Betrachte einen Knoten $a \in A$, der zunächst mit einer Ecke b und später mit einer Ecke b' gepaart ist. Falls a dies lieber hat, weshalb hat er sich dann nicht gleich mit b' statt mit b zusammengetan?

13. Alternierende Wege.

14.$^+$ Löse zuerst den zweiten Teil von Übung 11.

15. Entscheide zuerst, wo die Blätter unterzubringen sind: in faktorkritischen Komponenten oder in S?

16. Wegen der Transitivität liegt jede Ecke in einer Menge S wie in Satz 1.2.3.

17. Für die Rückrichtung wende den Satz 1.2.1 von Tutte auf $G * K^{|G|-2k}$ an oder verwende die nach Satz 1.2.3 angestellten Überlegungen.

18.$^-$ Korollar 1.2.2.

19. Es sei G bipartit mit Eckenpartition $\{A, B\}$ und erfülle die Heiratsbedingung. Reduziere zuerst auf den Fall $|A| = |B|$. Um die Voraussetzung des Tutte-Satzes nachzuweisen, schätze $|S|$ nach unten ab durch die Anzahl der Komponenten von $G - S$ ungerader Ordnung, die mehr Ecken aus A als aus B enthalten bzw. umgekehrt.

20.$^-$ Für die erste Frage betrachte einen typischen nicht paaren Graphen. Für die zweite gehe von irgendeiner maximalen Menge unabhängiger Kanten aus.

21. Wo im Beweis von Lemma 1.3.1 geht $\Delta(G) \leqslant 3$ ein?

22. Suche einen zu K^1 oder K^2 oder einem Kreis isomorphen Teilgraphen H, von dem mindestens eine Ecke keinen Nachbarn in $G - H$ hat. Dann verwende Induktion nach α.

23. Versuche zunächst, den Fehler durch genaues Lesen des Beweises zu finden. Gelingt dies nicht, so teste die (stärkere) Behauptung an extremen Fällen oder kleinen Graphen. Verfolge dann anhand eines gefundenen Gegenbeispiels nochmal den Beweis Schritt für Schritt, um den Fehler zu finden.

24. Betrachte die beiden durch eine Bipartition von $V(G)$ induzierten Untergraphen.

25.$^-$ Betrachte eine Wegüberdeckung minimaler Mächtigkeit.

26. Richte alle Kanten von A nach B.

27.$^-$ Benutze den Satz von Dilworth.

28. Beginne mit der Menge aller minimalen Elemente von P.

29. Betrachte die Elemente von A als unterhalb ihrer Nachbarn in B liegend.

30. Baue eine Teilordnung aus immer größeren endlichen Antiketten.

Hinweise zu Kapitel 2

1.$^-$ Wie sind „Komponente“ und „trennen“ definiert?

2. Fasse in Worte, was die Abbildung nahelegt.

3. Für die erste Frage verwende Übung **1**. Die zweite ist eine einfache Rechenaufgabe, die schon die Abbildung nahelegt.

4. Nur der erste Teil der Aufgabe erfordert Nachdenken; der zweite folgt dann durch Symmetrie aus dem ersten. Für den ersten Teil betrachte eine Komponente von $G - X$, die von X' nicht getroffen wird. Wo liegt X' in diesem Bild? Beachte Übung **1**.

5.$^-$ Teile den Induktionsschritt in verschiedene Fälle auf: danach, wie viele der zu verbindenden vier Ecken in dem neuen H-Weg liegen.

6.$^-$ Angenommen, ein Block ist kein maximaler 2-zusammenhängender Teilgraph: woran kann dies scheitern? Was folgt dann weiter?

7. Leite den Zusammenhang des Block-Graphen vom Zusammenhang des Graphen selbst ab, seine Kreislosigkeit von der Maximalität der Blöcke.

8. Induktion gemäß Proposition 2.1.1.

9.$^-$ Ist G/xy nicht 3-zusammenhängend, dann betrachte getrennt die Fälle, dass v_{xy} innerhalb bzw. außerhalb eines höchstens 2-elementigen Trenners liegt.

10. (i)$^-$ Betrachte die mit einem kleineren Trenner inzidenten Kanten.

    (ii) Dass jeder wie angegeben konstruierte Graph 3-zusammenhängend ist, folgt induktiv mit (i); das Ziel ist, einen kurzen Beweis ohne viele Fallunterscheidungen zu finden. Für die andere Richtung betrachte einen maximalen Teilgraphen $TH \subseteq G$, so dass H konstruierbar ist, und zeige $H = G$.

11.$^+$ Es hilft, den Beweis von Lemma 2.2.1 und Übung **4** zu kennen.

12. Prüfe die Induktion.

13. Wie groß ist S? Zum Erkennen des Restfalls sollte man die vorige Übung zuerst gelöst haben.

14. Wähle die disjunkten A–B-Wege in $L(G)$ minimal.

15. Betrachte einen längsten Kreis. Wie sind die Ecken außerhalb des Kreises mit ihm verbunden?

16. Betrachte einen Kreis, der möglichst viele der gegebenen k Ecken enthält. Können wir eine ausgelassene Ecke mit in den Kreis einbinden?

17. Betrachte den Graphen aus dem Tip. Zeige, dass es zu einer Menge von Ecken dieses Graphen, die alle H-Wege trifft (aber H nicht), eine entsprechende Teilmenge von $E(G) \setminus E(H)$ in G gibt. Zeige dann, dass man aus zwei kreuzungsfreien H-Wegen im neuen Graphen zwei kantendisjunkte H-Wege in G gewinnen kann.

18.$^-$ Zu wievielen Wegen kann jeder K^{2m+1} beitragen?

19. Es reicht, die Grade der Ecken aus B gekonnt zu wählen.

20.$^+$ Wähle als H den (kantenlosen) Graphen auf den neuen Ecken. Betrachte die Mengen X und F, die nach dem Satz von Mader existieren, falls der neue Graph nicht mindestens $|G|/2$ kreuzungsfreie H-Wege enthält. Hat G keinen 1-Faktor, so zeige, dass X die Rolle der Menge S im Satz von Tutte spielen kann.

21.$^-$ Werden zwei Ecken s, t durch weniger als $2k-1$ Ecken getrennt, dann erweitere $\{s\}$ and $\{t\}$ zu k-Mengen S und T, die G als nicht k-verbunden erweisen.

22. Um einen möglichst stark zusammenhängenden aber nicht k-verbundenen Graphen zu konstruieren, beginne mit den Ecken $s_1, \dots, s_k$, $t_1, \dots, t_k$. Stelle durch Verbieten geeigneter Kanten sicher, dass jede Verbindung zwischen den s_i und den entsprechenden t_i zusätzliche Ecken braucht. Mache den Graphen so klein, dass er für all diese Verbindungen nicht genügend weitere Ecken enthält, aber dabei so groß wie möglich, damit er hoch zusammenhängend wird.

23. Induktion nach $2k - |S \cup T|$, wobei $S := \{s_1, \dots, s_k\}$ und $T := \{t_1, \dots, t_k\}$. Für den Induktionsschritt benutze, dass $\delta(G) \geqslant 2k-1$ gilt nach Übung 21.

24. Um den TK^r zu konstruieren, wähle zunächst die Verzweigungsecken und ihre Nachbarn aus.

Hinweise zu Kapitel 3

1. Bette die Ecken induktiv ein. Wo darf die neue Ecke *nicht* liegen?

2.$^-$ Abbildung 0.6.2.

3.$^-$ Wer hierzu einen Hinweis braucht, hat Induktion durch Manipulation von Summenformeln gelernt statt durch den Beweis sorgfältig formulierter Aussagen. (Stimmt's?) Überlege noch einmal genau, was in einem Induktionsbeweis zu zeigen ist, und welche Rolle dabei die Induktionsannahme spielt.

4.$^-$ Mache den gegebenen Graphen zusammenhängend.

5. Dies ist eine Verallgemeinerung von Korollar 3.2.10.

6. Satz 1.4.4.

7. Folge dem Beweis von Korollar 3.2.10.

8. Proposition 3.2.7.

9.$^-$ Formuliere die Andersartigkeit der beiden Zeichnungen formal als Aussage über Ecken und Gebiete, sowie deren Inzidenz.

10. Kombinatorisch: benutze die Definition. Topologisch: drücke das „Nebeneinanderliegen“ der beiden kurzen bzw. langen Endstücke in G' auf eine Weise aus, die durch einen topologischen Isomorphismus auf G übertragen werden müsste (aber dort einen Widerspruch ergibt).

11. Reflexiv, symmetrisch, transitiv.

12. Suche einen Graphen, bei dem alle Zeichnungen gleich aussehen aber einen Automorphismus zulassen, der nicht zu einem Homöomorphismus der Ebene auf sich selbst fortsetzbar ist. Deute diesen Automorphismus als $\sigma_2 \circ \sigma_1^{-1}$.

13.$^+$ Sternförmigkeit: jedes Innengebiet enthält einen Punkt, der alle Punkte auf dem Rand des Gebietes sehen kann.

14. Betrachte ebene Graphen.

15. (i) Es wird nicht verlangt, dass $\mathcal{X}$ endlich sein muss.

(ii) Ist Y ein TX, dann ist jeder TY auch ein TX.

16.$^-$ Nach der folgenden Übung kann ein Gegenbeispiel immer durch zwei Ecken getrennt werden.

17. Verstärke die Induktionsannahme des Beweises entsprechend. Es kann dabei hilfreich sein, Winkel von 180 Grad in den Polygonen nicht zu gestatten.

18.$^-$ Kantenzahlen.

19. Benutze, dass jeder maximal plättbare Graph 3-zusammenhängendist, und dass die Nachbarn jeder Ecke einen Kreis induzieren.

20. Ist $G = G_1 \cup G_2$ mit $G_1 \cap G_2 = \overline{K^2}$, so entsteht ein Problem. Dieses verschwindet, wenn man etwas mehr einbettet als nötig.

21. Simuliere die Outerplanarität durch eine geeignete Modifikation des betrachteten Graphen G.

22. Benutze, dass $\mathcal{C}(G)$ die direkte Summe von $\mathcal{C}(G_1)$ und $\mathcal{C}(G_2)$ ist.

23.$^+$ Euler.

24. Die Gebietsränder erzeugen $\mathcal{C}(G)$.

25.$^+$ Löse die vorige Aufgabe zuerst.

26.$^-$ Wieviele Ecken hat das Dual?

27.$^-$ Verbinde zwei gegebene Ecken des Duals zunächst durch eine Strecke in der Ebene. Gewinne aus dieser einen Weg im Dual.

28.$^+$ Definiere die erforderlichen Bijektionen $F \to V^*$, $E \to E^*$ und $V \to F^*$ nacheinander in dieser Reihenfolge, und konstruiere gleichzeitig G^*.

29. Löse die vorige Übung zuerst.

30. Benutze die zu den Dualen G_1^* und G_2^* gehörigen Bijektionen, um den gesuchten Isomorphismus zu definieren und als kombinatorisch zu erweisen.

31. Benutze den Satz von Menger und Proposition 3.6.1. Für (iii) betrachte einen 4-zusammenhängenden Graphen auf 6 Ecken.

32. Beachte die genaue Definition des kombinatorischen Duals.

33. Zum Beweis bedarf es keines Umwegs über ebene Graphen.

Hinweise zu Kapitel 4

1.$^-$ Dualität.

2.$^-$ Treffen sich mehr als 3 Länder in einem Punkt, dann verändere die Karte lokal an der Stelle.

3.$^-$ Wo im Beweis des Fünffarbensatzes wird benutzt, dass v höchstens so viele Nachbarn hat, wie es Farben gibt?

4. Wie können die Färbungen verschiedener Blöcke einander beeinflussen?

5.$^-$ Benutze eine Färbung von G, um eine geeignete Aufzählung zu finden.

6. Wie kann man Kanten so löschen, dass die vom Greedy-Algorithmus benötigte Zahl der Farben steigt?

7. Wie könnte man den neuen Algorithmus genauer implementieren? Wie unterscheidet er sich dann vom Greedy-Algorithmus?

8. Vergleiche die Kantenzahl eines Teilgraphen H wie in 4.2.2 mit der Kantenzahl m von G.

9. Gehe den Umweg über Minimalgrade.

10. Um f zu finden, konstruiere zu gegebenem Graphen kleiner Reihenzahl induktiv eine Zerlegung in wenige Wälder. Für g benutze Proposition 4.2.2 und die triviale Richtung von Satz 1.4.4.

11.$^-$ Mache den Graphen durch sukzessives Weglassen von Ecken kritisch k-chromatisch. Was können wir über den Grad der verbleibenden Ecken sagen?

12. Proposition 0.6.1.

13.$^+$ Verändere Färbungen der beiden Seiten eines etwaigen Schnittes aus weniger als $k-1$ Kanten so, dass sie zu einer $(k-1)$-Färbung des gesamten Graphen kombiniert werden können (mit Widerspruch).

14. Proposition 0.3.1.

15.$^-$ Für welche Graphen mit hohem Minimalgrad liefert Proposition 4.2.2 eine besonders niedrige Schranke?

16.$^+$ (i) Wie werden am Anfang v_1 und v_2 gefärbt, wie am Ende v_n?

(ii) Betrachte den Untergraphen auf den Nachbarn von v_n.

17.$^+$ Zur Implikation (ii)→(i) betrachte einen maximalen gerichteten Teilgraphen D der gegebenen Orientierung von G, der keinen gerichteten Kreis enthält. Benutze die Annahme, dass es in D keine langen gerichteten Wege gibt, zur Konstruktion einer k-Färbung des D zugrundeliegenden ungerichteten Graphen. Zeige dann, dass dies auch eine k-Färbung von G ist.

18. Zum Induktionsschritt vergleiche die Größen $P_G(k)$, $P_{G-e}(k)$ und $P_{G/e}(k)$.

19.$^+$ Vielfachheit von Nullstellen.

20. Imitiere den Beweis von Satz 4.2.6.

21.$^-$ $K_{n,n}$.

22. Was haben Kantenfärbungen mit Paarungen zu tun?

23. Finde einen bipartiten $\Delta(G)$-regulären Graphen, der G als Teilgraphen enthält. Dabei kann es notwendig sein, auch neue Ecken hinzuzufügen.

24.$^+$ Induktion nach k. Beim Induktionsschritt $k \to k+1$ könnte es helfen, mehr als ein Exemplar des Graphen für k zu verwenden.

25.$^-$ Eckengrade.

26. $K_{n,n}$. Um n so zu wählen, dass $K_{n,n}$ nicht einmal k-listenfärbbar ist, betrachte Listen aus k-elementigen Teilmengen einer k^2-elementigen Menge.

27.$^-$ Vizing.

28. Außer den Definitionen, Proposition 4.2.2, und einem Standardargument aus Kapitel 0.2 wird nichts weiter gebraucht.

29.$^+$ Damit der Induktionsschritt glatt durchgeht, sollte es möglich sein, ein Paar Ecken und nur eine Farbe aus den Listen der anderen Ecken zu löschen. Was können wir über die Listen sagen, wenn das unmöglich ist? Diese Information allein wird es uns ermöglichen, den Graphen zu färben, ohne ihn auch nur noch einmal anzuschauen.

30. Zeige zunächst $\chi''(G) \leqslant \mathrm{ch}'(G) + 2$, und leite dann damit aus der Listenfärbungsvermutung die Ungleichung $\chi''(G) \leqslant \Delta(G) + 3$ her.

31. Für die erste Frage versuche, einen orientierten Graphen ohne Kern induktiv Kante um Kante zu basteln. Für die zweite und dritte ist die einführende Diskussion zum Begriff des Kerns im Text relevant.

32.$^+$ Eine Menge S von Ecken eines gerichteten Graphen D sei ein *Schwamm*, wenn D für jede Ecke $v \in D - S$ einen gerichteten Weg von v nach S enthält. Gibt es zusätzlich in D keinen gerichteten Weg zwischen zwei Ecken von S, so heiße S ein *Schwämmchen*. Zeige zunächst, dass jeder Schwamm ein Schwämmchen enthält. Definiere dann induktiv eine Partition von $V(D)$ in „Schichten“ $S_0, \ldots, S_n$, so dass S_i für gerade i ein geeignetes Schwämmchen in $D_i := D - (S_0 \cup \ldots \cup S_{i-1})$ ist und für ungerade i aus den Ecken von D_i besteht, die eine Kante nach S_{i-1} schicken. Zeige, dass die geraden Schichten zusammen einen Kern von D bilden, wenn D keinen gerichteten Kreis ungerader Länge enthält.

33.$^+$ Suche die für die Anwendung von Lemma 4.4.3 erforderliche Orientierung schrittweise: hat eine gegebene Orientierung noch Ecken v mit $d^+(v) \geqslant 3$, so ändere die Richtung einer Kante an v und fange die Auswirkung dieser Änderung eventuell durch weitere Richtungsänderungen auf. Sollte es nötig werden, den Durchschnittsgrad eines bipartiten plättbaren Graphen zu beschränken, so sei an die Eulerformel erinnert.

34.$^-$ Beginne mit einem nicht perfekten Graphen.

35.$^-$ Gilt $(*)$ für ungerade Kreise oder ihre Komplemente?

36. Jeder Untergraph eines perfekten Graphen ist nach Definition wiederum perfekt.

37. Der Satz von König bahauptet die Existenz einer alle Kanten treffenden Eckenmenge. Formuliere Perfektion als die Behauptung der Existenz einer Eckenmenge (oder mehrerer), die „alle Farbklassen treffen“.

38. Betrachte das Komplement.

39. Definiere die Farbklassen eines gegebenen Untergraphen $H \subseteq G$ induktiv, beginnend mit der Klasse aller minimalen Elemente.

40. (i) Können die Ecken eines induzierten Kreises einander als Intervalle enthalten?

    (ii) Benutze die natürliche Ordnung der reellen Zahlen.

41. Vergleiche $\omega(H)$ mit $\Delta(G)$.

42.$^+$ Wie vermeidet man zumindest, dass Kreise ungerader Länge $\geqslant 5$ als Untergraphen im Kantengraphen auftauchen? Zum Beweis, dass die Kanten eines Graphen G mit $\omega(L(G))$ Farben gefärbt werden können, imitiere den Beweis des Satzes von Vizing.

43. Verwende die Menge A als Farbklasse.

44.$^+$ (i) ist ganz einfach mit Induktion.

    (ii) Nehmen wir an, G enthalte keinen P^3, aber in einem Untergraphen H gebe es eine maximale unabhängige Eckenmenge A und einen dazu disjunkten maximalen vollständigen Teilgraphen K. Zu jeder Ecke von K betrachte die Menge ihrer Nachbarn in A. Wie schneiden diese Nachbarmengen einander? Gibt es unter ihnen eine kleinste?

45.$^+$ Betrachte als Anfangskandidaten für die Menge $\mathcal{O}$ irgendeine Menge von Eckenmengen maximaler vollständiger Teilgraphen, die G überdecken. Enthält jede Menge aus $\mathcal{O}$ genau $\omega(G)$ Ecken, so folgt die Existenz von $\mathcal{A}$ aus der Perfektion von G – wie? Sind einige Mengen aus $\mathcal{O}$ kleiner, so versuche, sie so zu Eckenmengen der Größe $\omega(G)$ aufzufüllen, dass der erweiterte Graph wiederum perfekt ist. Für diesen gibt es dann die erwünschte Menge $\mathcal{A}$ nach dem schon behandelten Fall. Wie lässt diese sich in eine Menge $\mathcal{A}$ für G verwandeln?

46.$^+$ Führe den allgemeinen Fall auf den Fall zurück, dass nur eines der G_x nicht trivial ist. Ahme den Beweis von Lemma 4.5.5 nach.

Hinweise zu Kapitel 5

1.$^-$ Überführe schrittweise die Ecken von der $\overline{S}$-Seite auf die S-Seite des Schnittes. Wie verändert sich dabei die Größe $f(S, \overline{S})$?

2. (i) Versuche den Algorithmus dazu anzustiften, die mittlere Kante in jedem Schritt in anderer Richtung zu benutzen.

   (ii) Betrachte für jede Ecke v den kürzesten gerichteten s–v-Weg, der als Anfangsstück eines Verbesserungsweges geeignet wäre. Zeige für jedes v, dass die Länge eines solchen s–v-Weges sich während des gesamten Algorithmus nie verringert. Betrachte dann eine Kante, die zweimal in der gleichen Richtung für einen Verbesserungsweg benutzt wird. Zeige, dass der zweite Verbesserungsweg länger ist als der erste, und leite daraus die erwünschte Schranke ab.

3.$^+$ Für die Kantenversion definiere die Kantenkapazitäten so, dass ein Fluss der größtmöglichen Stärke es erlaubt, genügend viele kantendisjunkte s–v-Wege zu konstruieren. Für die Eckenversion spalte jede Ecke x in zwei benachbarte Ecken x^-, x^+ auf, so dass Fluss durch die neue Kante x^-x^+ die Benutzung von x durch einen Weg simuliert.

4.$^-$ H-Flüsse sind nach Definition nirgends null.

5.$^-$ Benutze die Definition und Proposition 5.1.1.

6.$^-$ Sind auch Teilgraphen Minoren?

7.$^-$ Betrachte nacheinander $k = 2, 3, \ldots$. Um einen k-Fluss zu suchen, lege zunächst den Fluss durch eine Kante versuchsweise fest und sieh dann, was daraus für benachbarte Kanten folgt.

8. Zum Beweis der Eindeutigkeit betrachte einen geeigneten Schnitt.

9. Drücke G als Vereinigung von Kreisen aus.

10. Kombiniere $\mathbb{Z}_2$-Flüsse auf Teilgraphen zu einem Fluss auf ganz G.

11. Sende zunächst etwas Fluss durch jede Kante außerhalb von T.

12. Betrachte G als Vereinigung geeigneter Kreise.

13. Korollar 5.3.2 und Proposition 5.4.1.

14.$^-$ Dualität.

15. Betrachte einen Graphen H mit bekannt hoher Flusszahl. Kann man diese durch Hinzufügen neuer Kanten verringern?

16. Euler.

17.$^+$ Satz 5.5.3.

18. Satz 5.5.3.

19. (i) Satz 5.5.3.

(ii) Man kann. Zeige zum Beweis durch Betrachtung eines minimalen Gegenbeispiels, dass mit jedem 3-zusammenhängenden auch jeder brückenlose kubische plättbare Multigraph 3-kantenfärbbar ist (und somit einen 4-Fluss hat).

20.$^+$ Für die Vorwärtsrichtung benutze Proposition 5.1.1. Umgekehrt betrachte einen Rundfluss f auf G mit Werten in $\{0, \pm 1, \ldots, \pm(k-1)\}$, der die gegebene Orientierung respektiert (also in Kantenrichtung jeweils nicht negativ ist) und auf möglichst wenigen Kanten null ist. Zeige wie folgt, dass f nirgends null ist: ist f null auf $e = st \in E$, und ist e in D von t nach s gerichtet, so definiere ein Netzwerk N mit Quelle s und Senke t, für das jeder Fluss durch N positiver Stärke der Wahl von f widerspricht, und jeder Schnitt in N der Kapazität null der vorausgesetzten Eigenschaft von D widerspricht.

21.$^-$ Wandle den gegebenen Multigraphen in einen Graphen mit den gleichen Flusseigenschaften um.

Hinweise zu Kapitel 6

1.$^-$ Verwende die Definition.

2.$^-$ Lege bei der Konstruktion dieser Graphen zuerst die Farbklassen fest.

3. Es ist nicht schwierig, eine obere Schranke für $\mathrm{ex}(n, K_{1,r})$ zu finden. Zu zeigen ist, dass diese Schranke für alle r und n erreicht werden kann.

4. Proposition 0.7.2 (ii).

5.$^+$ Wieviele Kanten kann ein Graph der Struktur aus Satz 1.2.3 höchstens haben, wenn er keine k unabhängige Kanten enthält? Wie verteilt man am günstigsten die Ecken von G auf S und die Komponenten von $G-S$? Existieren auch Graphen, deren Kantenzahlen die entsprechende Schranke erreichen?

6. Betrachte eine Ecke $x \in G$ maximalen Grades und zähle die Kanten in $G-x$.

7. Wähle k und i so dass $n = (r-1)k+i$ mit $0 \leqslant i < r-1$. Behandle erst den Fall $i = 0$ und zeige dann allgemein, dass stets $t_{r-1}(n) = \frac{1}{2}\frac{r-2}{r-1}(n^2-i^2)+\binom{i}{2}$ gilt.

8. Die beiden Schranken des Tips sind die Kantenzahlen besonders einfacher Turangraphen. Welcher?

9. Suche unter den m Ecken s Ecken, denen nach der Kantenlöschung möglichst wenige Kanten fehlen.

10. Zum Beweis der ersten Ungleichung verdopple die Eckenmenge eines extremalen $K_{s,t}$-freien Graphen, um einen bipartiten Graphen mit doppeltsovielen Kanten aber weiterhin ohne $K_{s,t}$ zu erhalten.

11.$^+$ Um die hervorgehobene Ungleichung zu zeigen, zähle die Paare (x, Y) mit $x \in A$ und $Y \subseteq B$, für die $|Y| = r$ ist und x ist zu ganz Y benachbart. Zum Beweis der Schranke für $\mathrm{ex}(n, K_{r,r})$ benutze die Abschätzung $(s/t)^t \leq \binom{s}{t} \leq s^t$ und die Tatsache, dass die Funktion $z \mapsto z^r$ konvex ist.

12. Nimm an, die obere Kantendichte sei größer als $1-\frac{1}{r-1}$. Was heißt dies genau, und was folgt dann mit dem Satz von Erdős & Stone?

13. Proposition 0.2.2 und Korollar 0.5.4.

14. Vollständige Graphen.

15.$^-$ Durchschnittsgrad.

16. Erzwingen mehr als $\frac{1}{2}(k-1)n$ Kanten einen Teilgraphen von hinreichend hohem Minimalgrad?

17.$^+$ Welche Graphen beispielsweise haben besonders hohen Durchschnittsgrad bei niedriger chromatischer Zahl? Welche Bäume finden sich induziert darin? Gibt es eine Ursache dafür, dass man gerade diese Bäume immer induziert in Graphen hohen Durchschnittsgrads und niedriger chromatischer Zahl finden wird?

18. Dies ist keine Denkaufgabe sondern lediglich eine Anleitung, einen groben Überblick zu behalten. Jede der festzustellenden Beziehungen ist ganz leicht zu zeigen oder folgt aus einem im Text erwähnten Sachverhalt.

19.$^+$ Kontrahiere eine Eckenmenge der Form $\{\, v \mid d(v_0, v) \leqslant i \,\}$.

20. Induktion nach r.

21.$^-$ Erzwingt hohe chromatische Zahl hohen Durchschnittsgrad? Siehe Kapitel 4.

22.$^+$ Es sei $G' \preccurlyeq G$ ein minimaler Minor mit $\varepsilon(G') \geqslant k$. Zeige, dass für jede Ecke $v \in G'$ der Teilgraph H von G', der von den Nachbarn von v

induziert wird, einen Minimalgrad von mindestens k hat. Kann man v so wählen, dass $|H| \leqslant 2k$ ist?

23.$^+$ Zeige zunächst, dass wir nur Graphen mit Minimalgrad $\delta \geqslant 3$ betrachten müssen. Finde dann mit Hilfe von Korollar 0.3.5 einen Kreis C der Länge höchstens etwa $2 \log n$. Nimm oBdA an, dass der Graph genau $n + \lceil 2k\,(\log k + \log\log k + c)\rceil \geqslant 3n/2$ Kanten hat, beschränke $\|C\|$ nach oben durch einen Ausdruck in k, und zeige, dass für geeignetes c das Löschen höchstens so vieler Kanten eine Induktion ermöglicht.

24. Folge der Idee des Beweises von Satz 6.2.1, aber verbinde die r Verzweigungsecken aus X direkt in H, ohne eine Menge Y von Nachbarn zu definieren.

25.$^+$ Wie bettet man am besten einen TK^{2^r} in einen $K_{s,s}$ ein, wenn man s klein halten will?

26. Welche der wie im Tip konstruierten Graphen haben den höchsten Durchschnittsgrad?

27.$^-$ Was hat Plättbarkeit mit Minoren zu tun?

28.$^-$ Betrachte einen geeigneten Obergraphen.

29.$^-$ Vergleiche die vorausgesetzte untere Schranke für χ mit Schranken aus bekannten Sätzen.

30. Induktion nach der Anzahl der Konstruktionsschritte.

31. Induktion nach $|G|$.

32. Beachte die vorige Übung.

33. Beginne mit einem Graphen hohen Minimalgrads. Mit welchem Resultat aus Abschnitt 6.2 kann man diesen Minimalgrad weiter so erhöhen, dass er als Eingabe für Satz 6.2.2 reicht?

34.$^+$ Zeige mit Induktion nach $|G|$, dass sich in einem Graphen $G \not\succcurlyeq K^4$ jede 3-Färbung eines induzierten Kreises auf ganz G fortsetzen lässt.

35.$^+$ Führe die Aussage auf kritisch r-chromatische Graphen zurück und verwende den Satz von Vizing.

36. Welche der wie in Satz 6.3.4 konstruierten Graphen haben den höchsten Durchschnittsgrad?

37.$^-$ Warum wäre es ungünstig, wenn z.B. einelementige Mengen X, Y mit in den Vergleich einbezogen würden?

38.$^-$ Rechne.

39. Bei der Begriffsbestimmung des Wortes „ungefähr“ sei $|V|$ im Vergleich zu k als groß angenommen. Bei der zweiten Frage ist keine technische Diskussion der Einzelheiten des Beweises von Satz 6.1.2 gefragt, sondern eine Erklärung im Stil der informellen Erläuterungen danach.

40. Magere Graphen haben wenige Kanten. Welchen Einfluss hat das auf die Durchschnittsgradbedingung in der Definition der ϵ-Regularität?

Hinweise zu Kapitel 7

1.$^-$ Kann man die Kanten des K^5 derartig rot und grün färben, dass weder ein rotes noch ein grünes Dreieck entsteht? Wird Entsprechendes für den K^6 gelingen?

2.$^-$ Induktion nach c: fasse im Induktionsschritt zwei Farben zu einer zusammen.

3. Ist die chromatische Zahl eines Graphen klein, so enthält er einen großen kantenlosen Untergraphen. Warum? Wie groß ist dieser mindestens?

4.$^+$ Wähle eine Wohlordnung auf $\mathbb{R}$, und vergleiche sie mit der natürlichen Ordnung. Benutze, dass jede abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen abzählbar ist.

5.$^+$ Angenommen, für viele Sehnen xy mit $x <_T y$ treffen sich die Wege xTy paarweise in mindestens einer Kante. Finde entweder viele solche Ecken x, deren Partnerecken y übereinstimmen, oder eine Ecke in T, über der viele unvergleichbare y liegen, oder einen langen aufsteigenden Weg in T, deren größte Ecke t_y auf xTy für viele y verschieden ist. Finde dann eine lange Folge $x_1 \leqslant \ldots \leqslant x_n$ von zu diesen y gehörigen Partnerecken x, und viele kantendisjunkte Kreise in der Vereinigung der Wege x_iTy_i zusammen mit den Sehnen x_iy_i.

6.$^+$ Die beiden ersten Fragen sind einfach. Zum Beweis des Satzes von Erdős & Szekeres benutze Induktion nach k für festes ℓ, und betrachte im Induktionsschritt die letzten Elemente aufsteigender Teilfolgen der Länge k. Alternativ verwende den Satz von Dilworth.

7. Verwende den Satz, dass $n \geqslant 4$ Punkte genau dann ein konvexes Polygon aufspannen, wenn je vier von ihnen es tun.

8. Zu gegebener Partition von $\{1, \ldots, n\}$ in k Teilmengen definiere eine geeignete k-Färbung der Kanten des K^n.

9. (i) ist einfach. Für (ii) benutze die Existenz von $R(2, k, 3)$.

10. Finde zuerst unendlich viele Mengen, deren paarweise Schnitte alle gleich groß sind.

11. Betrachte einen Hilfsgraphen, dessen Ecken gefärbte endliche Teilgraphen des gegebenen Graphen sind.

12. Ahme den Beweis von Proposition 7.2.1 nach.

13. Die untere Schranke ist einfach. Für die obere Schranke betrachte zu gegebener Färbung die Nachbarn einer Ecke mittels der Kanten einer geeigneten Farbklasse.

14.$^-$ Aus gegebenen H_1 und H_2 konstruiere ein H, für das der Graph G aus Satz 7.3.1 die Eigenschaft $(*)$ besitzt.

15. $G[U \to H]$.

16. Zeige $\omega(G^k) = \omega(H)$ induktiv für $k = 0, \ldots, m$.

17. Unendlichkeitslemma.

18.$^-$ Es sei $\{\mathcal{Q}_1, \ldots, \mathcal{Q}_\ell\}$ eine weitere Kuratowskimenge für $\mathcal{C}$. Gibt es ein $\mathcal{P}_i \leqslant \mathcal{Q}_1$? Wenn ja, gilt sogar $\mathcal{P}_i \sim \mathcal{Q}_1$?

19. Mache eine Liste der zu zeigenden Einzelaussagen und folge dann den Definitionen.

Hinweise zu Kapitel 8

1. Induktion.
2. Betrachte die Vereinigung zweier Farbklassen.
3. Induktion nach k für festes n; zum Induktionsschritt betrachte $\overline{G}$.
4. Wie sehen k-zusammenhängende Graphen aus, die $\chi(G) \geqslant |G|/k$ erfüllen aber nicht $\alpha(G) \leqslant k$?
5. Ein guter Trick bei der Konstruktion nicht-hamiltonscher Graphen ist es, die Kanten an einer Ecke ungeraden Grades zu unterteilen. Zur Lösung von (ii) wende diesen Trick auf einen kleinen aber hoch zusammenhängenden Graphen an.
6. Wie hoch kann denn der Zusammenhang eines plättbaren Graphen sein?
7. $^-$ Benutzte die Definition eines hamiltonschen Tupels.
8. $^-$ Für welche Ecken fordert die Chvátal-Bedingung überhaupt etwas? Um die Gültigkeit der Bedingung für G zu überprüfen, finde zunächst eine solche Ecke.
9. Betrachte in G^2 einen Trenner aus k Ecken. Wo liegen deren Nachbarn in G?
10. Satz 8.2.1.
11. Wie unterscheidet sich ein beliebiger zusammenhängender Graph von den Graphen, deren Quadrat nach dem Satz von Fleischner einen Hamiltonkreis enthält? Wie könnte dieser Unterschied die Existenz eines Hamiltonkreises stören?
12. $^+$ Zum Induktionsschritt betrachte einen minimalen Schnitt.
13. $^+$ Wie kann man aus einem Hamiltonweg $P \in \mathcal{H}$ einen anderen gewinnen? Auf wieviele Weisen? Was hat das mit dem Grad in G der letzten Ecke von P zu tun?

Hinweise zu Kapitel 9

1. $^-$ Betrachte m fest gewählte Kanten auf $\{0, \dots, n-1\}$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Kantenmenge von $G \in \mathcal{G}(n,p)$ aus genau diesen Kanten besteht?
2. Betrachte geeignete charakteristische Zufallsgrößen, wie im Beweis von Lemma 9.1.5.
3. Betrachte geeignete charakteristische Zufallsgrößen.
4. Erdős.

5. Welches Maß hätte dann die Menge $\{G\}$ für festes G?
6. Betrachte die Komplementäreigenschaften.
7.$^-$ $\mathcal{P}_{2,1}$.
8. Verwende Lemma 9.3.2.
9. Induktion nach $|H|$ mit Hilfe von Übung 6.
10. Ahme den Beweis von Lemma 9.2.1 nach.
11. Ahme den Beweis von Proposition 9.3.1 nach. Bei der Abschätzung der Wahrscheinlichkeiten verwende die Ungleichung $1 - x \leqslant e^{-x}$ wie im Beweis von Lemma 9.2.1.
12.$^+$ (i) Berechne die zu erwartende Anzahl isolierter Ecken und verwende Lemma 9.4.2 ähnlich wie im Beweis von Satz 9.4.5.

    (ii) Linearität.
13.$^+$ Kapitel 6.2, der Satz von Erdős, und ein bisschen Tschebyschev.
14. Für die erste Aufgabe ändere eine monotone Eigenschaft ein wenig ab, so dass sie nicht mehr monoton ist aber ihre Schwellenfunktion behält. Für die zweite finde eine monotone Eigenschaft, deren Wahrscheinlichkeit gar nicht wirklich von p abhängt.
15.$^-$ Permutationen auf $V(H)$.
16.$^-$ Dies ist ein Resultat aus dem Text in Verkleidung.
17.$^-$ Ausgewogenheit.
18. Es gibt nur endlich viele Bäume der Ordnung k.
19. Für $p/t \to 0$ verwende Lemmas 9.1.4 und 9.1.5. Für $p/t \to \infty$ verwende Korollar 9.4.6.
20. Für (i) benutze, dass $A_i \to 0$ für $i \geqslant 1$. Für (ii) vergleiche die Definition von A_1 mit der von A_0. Falls nötig, verfolge die Berechnung von A_i für $i = 1$: wo liegt der entscheidende Unterschied zur Berechnung von A_0?
21.$^+$ Zeige zunächst, dass eine hypothetische Schwellenfunktion $t = t(n)$ nicht für $n \to \infty$ gegen null gehen kann. Leite hieraus mit Hilfe von Übung 11 einen Widerspruch ab.

Hinweise zu Kapitel 10

1.$^-$ Zu einer Halbordnung gehört außer Reflexivität und Transitivität auch Antisymmetrie.
2. Zum Beweis der Rückrichtung betrachte zunächst den Fall, dass A eine unendliche Antikette hat: dieser Fall ist einfacher. Der andere Fall ist nicht ganz so offensichtlich, aber sein Beweis ist ähnlich. Übrigens ist $A = \mathbb{Z}$ kein Gegenbeispiel – warum nicht?
3. Zum Beweis von Proposition 10.1.1 betrachte eine unendliche Folge, in der jede echt absteigende Teilfolge endlich ist. In welcher Beziehung steht das letzte Element einer maximalen absteigenden Teilfolge zu den darauf folgenden Elementen? Zum Beweis von Proposition 10.1.2 zeige zunächst, dass zumindest ein Element mit unendlich vielen späteren Elementen ein gutes Paar bildet.

4. Ein möglicher Ansatz wäre, den Beweis von Lemma 10.1.3 für $\leqslant'$ nachzumachen: wenn er schiefgeht, woran liegt es? Alternativ kann man überlegen, ob sich jede durch Lemma 10.1.3 gelieferte Injektion nachträglich in eine ordnungserhaltende Injektion verwandeln lässt, unter Erhalt der Eigenschaft $a \leqslant f(a)$ für alle a.

5.$^-$ Dies ist eine handwerkliche Präzisionsaufgabe: „Sieht man doch“ ist kein Beweis!

6. In einer möglichen schlechten Folge von Bäumen wird es sich nicht vermeiden lassen, dass diese immer größer werden. Wir suchen also möglichst einfache Beispiele zweier Bäume T, T' mit $|T| < |T'|$ aber $T \not\leqslant T'$. Iteriere ein geeignetes Beispiel zu einer schlechten Folge.

7. Wird im ursprünglichen Beweis jemals eine Abbildung benutzt, die eine Wurzel auf eine gewöhnliche Ecke abbildet?

8. Konstruiere eine unendliche Antikette aus Graphen, die zwar paarweise Teilgraphen voneinander sind aber nicht durch Kontraktion vergleichbar. Wie kann man einen gegebenen Graphen G zu einem Graphen G' so erweitern, dass zwar $G \subseteq G'$ gilt, aber G' nicht zu G kontrahierbar ist?

9.$^+$ Können die Graphen einer schlechen Folge beliebig viele unabhängige Kanten haben? Wenn nicht, dann treffen beschränkt viele Ecken in ihnen alle Kanten. (Warum?) Betrachte eine Teilfolge, in der diese Ecken isomorphe Teilgraphen induzieren, und finde darin eine gute Teilfolge.

10.$^+$ Bei der Einbettung eines Graphen TG in einen Graphen H kommen als Bilder der Verzweigungsecken des TG nur Ecken von mindestens dem gleichen Grad infrage. Vergrößere G zu einem ähnlichen Graphen H, der G nur deshalb nicht als topologischen Minor enthält, weil diese Ecken in H ungünstig zueinander liegen. Iteriere dann das Beispiel zu einer unendlichen Antikette.

11.$^+$ Sie ist‘s. Ein möglicher Beweis verwendet normale Spannbäume und folgt dem Beweis des Satzes von Kruskal.

12.$^-$ Bei dem „Teilbaum“ geht es darum, dass er zusammenhängend sein soll. Und zusammenhängende Graphen sind nach Konvention nicht leer.

13.$^-$ Beginne mit einer Baumzerlegung geringster Weite und ändere diese dann schrittweise.

14. Warum gibt es keinen Kreis der Baumweite 1?

15. Für die Vorwärtsrichtung benutze Korollar 0.5.2. Zur Rückrichtung verwende Induktion nach n.

16. Zum Beweis von (T2) betrachte die Kante e in Abbildung 10.3.1. Der Nachweis von (T3) ist ganz einfach.

17. Zur ersten Frage beachte Proposition 10.3.5. Für die zweite versuche, eine Baumzerlegung von G in eine des TG umzuwandeln, ohne ihre Weite zu erhöhen.

18.$^+$ Als Zerlegungsbaum wähle einen normalen Spannbaum T. Wähle eine Eckenaufzählung $t_1, \dots, t_n$ von T, bei der t_1 die Wurzel ist und jede

Menge der Form $\{t_1, \ldots, t_i\}$ zusammenhängend in T. Definiere dann die Zerlegungsteile V_t induktiv für $t = t_1, \ldots, t_n$ unter Berücksichtigung der Bedingung aus Übung 15.

19. Für (i) übersetze die Verträglichkeitsbedingung in eine entsprechende Bedingung an die Komponenten von $T - e$ für die beiden Wahlen der Kante e. Für (ii) definiere entweder die V_t auf geniale Weise direkt, oder verwende Induktion nach $|\mathcal{S}|$ und Lösche zum Induktionsschritt eine Teilung (A, B) aus $\mathcal{S}$ mit minimalem A. In der zu $\mathcal{S} \setminus \{\{A, B\}\}$ gehörigen Baumzerlegung füge A als neuen Teil an einen durch Orientierungen wie in Lemma 10.3.4 gefundenen Teil an.

20.$^+$ Für die erste Aussage sei $H = H_t$ ein Torso, der nicht 3-zusammenhängend ist. Finde zwei unverträgliche 2-Teilungen und zeige, dass deren vier trennende Ecken einen Kreis C bilden (nicht notwendig mit $C \subseteq H$), so dass zwei Ecken $u, v \in C$ zwei andere Ecken $x, y \in C$ genau dann in C trennen, wenn sie es in H tun. Wähle nun einen solchen Kreis C mit $V(C) \subseteq V(H)$ maximal bezüglich Unterteilung und zeige, dass dann $H = C$ gilt. Zum Beweis der zweiten Aussage baue den Graphen induktiv aus den Torsos seiner Baumzerlegung auf. Wähle deren Reihenfolge so, dass die entsprechenden Knoten des Zerlegungsbaums stets einen (zusammenhängenden) Teilbaum induzieren.

21. Die im Anschluss an Satz 10.3.8 besprochenen Kreuze liefern eine Baumweite von mindestens $k - 1$. Modifiziere das Beispiel, um $k - 1$ auf k zu erhöhen.

22. Die Existenz ist bereits im Satz 10.3.8 bewiesen; zu zeigen ist also nur die Eindeutigkeit.

23.$^+$ Beschreibe die Mengen W'_t explizit, entsprechend der Definition der W_t, und vergleiche dann die beiden Definitionen.

24.$^-$ Induktion.

25. Induktion.

26. Verwende einen Satz aus Kapitel 6.3. Und verzweifle nicht an einem Teilgraphen von W!

27.$^+$ Beweise, dass die Teile der konstruierten Baumzerlegung genau die maximalen irreduziblen Untergraphen von G sind.

28. Übung 12.

29. Zur Vorwärtsrichtung deute die Teilwege des Zerlegungsweges als Intervalle. Welcher Teilweg entspricht einer Ecke von G in natürlicher Weise?

30. Gehe ähnlich vor wie im Beweis des Korollars.

31.$^+$ Ja. Zum Beweis zeige zunächst unter Verwendung einer geeigneten Wegzerlegung, dass jeder zusammenhängende Graph G einen Weg enthält, nach dessen Löschen die Wegbreite von G sinkt. Konstruiere dann eine Folge von Bäumen $T_1, T_2, \ldots$, für die die Löschung eines beliebigen Weges in T_{n+1} stets einen Rest hinterlässt, der noch einen T_n enthält (und damit nach Induktionsannahme hohe Wegbreite hat).

32.$^-$ Vergleiche $\mathcal{K}_\mathcal{P}$ mit der analogen Menge für die stärkere Relation.

33. Zum ersten Teil finde für jeden verbotenen Minor X endlich viele Graphen, deren Verbot als topologischer Minor äquivalent ist zum Verbot von X als Minor. Für die zweite Frage verwende Übung **10**.

34. Wie viel schwieriger wird es, alle MX aus G zu überdecken, wenn $\mathcal{X}$ und die Graphen $X \in \mathcal{X}$ größer werden? Wie verändert sich das Problem, wenn wir $\mathcal{X}$ durch die Menge seiner Minor-minimalen Elemente ersetzen?

35.$^+$ Es sei S eine Fläche, in die H einbettbar ist. Die Anzahl an Kopien von H, die disjunkt in S einbettbar sind, ist durch eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ beschränkt; dies darf ohne Beweis benutzt werden. Zeige nun, dass man f für $k > n$ nicht definieren kann. Betrachte dazu einen Kandidaten $\ell \in \mathbb{N}$ für $f(k)$, und erweitere irgendeine Zeichnung von H auf S zu einem Graphen H' auf S, der nach Löschen beliebiger ℓ Ecken immer noch einen H-Minor hat.

36.$^+$ Finde ein Gegenbeispiel.

37.$^+$ Für ein Beispiel, das nicht-triviale Baumzerlegungen als notwendig erweist, benutze Übung **31** und die Tatsache, dass keine Fläche unbeschränkt viele disjunkte Kopien von K^5 aufnehmen kann. Für die übrigen Beispiele arbeite mit Abwandlungen großer Gitter oder gitterähnlicher Graphen auf anderen Flächen als der Sphäre.

38. Was enthalten denn Graphen hoher chromatischer Zahl so alles? Siehe Kapitel 6.2.

39. K^5.

40. Beweise den Minorensatz zuerst für zusammenhängende Graphen.

41. Verwende geeignete Strahlen in H als Verzweigungsmengen, und verbinde diese durch die neuen Kanten.

42. Für die erste Frage finde im $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$-Gitter eine Substruktur, die unendlich viele disjunkte Teile enthält, die nicht alle unter Wahrung dieser Struktur in das $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$-Gitter einbettbar sind.

Register

Kursiv gesetzte Seitenzahlen verweisen auf Definitionen; bei Namen verweisen sie auf Sätze des genannten Autors. Den Übersetzungen der graphentheoretischen Fachwörter liegt die in der englischen Ausgabe dieses Buches verwendete Terminologie zugrunde; dies ist eine weithin akzeptierte englische Terminologie, aber nicht die einzige.

abgeschlossen (*closed*)
  bzgl. $\geqslant$, 295
  bzgl. Addition, 157
  bzgl. Isomorphismus, 3, 259, 287
  bzgl. Minoren, s. *erblich*
  nach oben oder unten, in Baumordnung, *16*
  bzgl. Obergraphen, 262
  bzgl. Teilgraphen, 137–138, 147
  bzgl. Untergraphen, 137
Abschluss
  nach oben (*up-closure*), *16*
  nach unten (*down-closure*), *16*
Abstand (*distance*), *9*
abstrakter Graph, *3*, 91, 95, 101, 259
adjazent (*adjacent*), *3*
Adjazenzmatrix (*adjacency matrix*), *30*, 35
Ahuja, R.K., 175
Ajtai, M., 202
algebraische
  Färbungstheorie, 150
  Flusstheorie, 157–173, 175
  Graphentheorie, 24–30, 36
  Plättbarkeitskriterien, 111–112
algorithmische Graphentheorie, 175, 294, 301
Alon, N., *10*, 36, *133*, 150, 272
alternierend (*alternating*)
  Kantenzug, *71*
  Weg, *38*
Anfangsecke (einer gerichteten Kante) (*initial vertex*), *30*
Antikette (*antichain*), *56*, 59, 276, 318, 319
Antiloch (*antihole*), *150*
Appel, K., 149
Äquivalenz (*equivalence*)
  von Einbettungen in die Ebene, 101–*105*, 117
  von Grapheneigenschaften, 226
  von Grapheninvarianten, 200
  von Punkten in topologischem Raum, *92*
  in Quasiordnung, *295*
Arborizität (*arboricity*), 51–*54*, 117, 125, 200
  und Reihenzahl, 145
Archdeacon, D., 301
Arnborg, S., 300
Artikulation (*cutvertex*), *12*, 62–63
Ast (in einer Baumzerlegung) (*branch*), 285
auf (*on*), *2*
aufspannend (*spanning*)
  Bäume, *15*, 17
    Anzahl an, 271
    kantendisjunkt, 51–54

normale, 16–17, 34, 174, 227
Teilgraph, *4*
ausgewogen (*balanced*), *59*, *270*
Außengebiet (*outer face*), *95*, 102, 118
Automorphismus (*automorphism*), *3*, 34, 309

Babson, E., 150
Bauer, D., 248
Baum (*tree*), *14*–18
aufspannend, *15*, 17
als erzwungene Teilstruktur, 15, 183, 200
normaler, *16*–18, 34, 168, 174, 319
Schicht eines, *16*
Schwellenfunktion für, 270, 271
Überdeckung durch Bäume, 51–54
Wegbreite, 298
Wohlquasiordnung von Bäumen, 277–279
Baumordnung (*tree-order*), *15*, 278
Baumpackungen, 51–54, 58, 60
Baumweite (*tree-width*), *282*–291
Dualitätssatz, *283*–285
eines Gitters, 285, 297, 300
Hindernis an kleiner, 283–285, 289, 300
eines Minors, 282
und Netze, 282–285, 297
einer Unterteilung, 297
und verbotene Minoren, 287–291
Baumzerlegung (*tree-decomposition*), 204, *279*–287, 291, 296, 297, 299, 300
Hindernis, 282–285, 289, 300
auf Minoren vererbt, 281
schlanke, *285*
simpliziale, *286*, 290, 297, 298, 300
Teil von, *280*
auf Teilgraphen vererbt, 281
Weite von, *282*
Zerlegung 2-zusammenhängender Graphen in 3-zusammenhängende Teile, 64, 297
Behzad, M., 150
Bellenbaum, P., 300
benachbart (*adjacent*), *3*
Berge, C., 140
berühren (*touch*), *282*
Biggs, N.L., 36
bipartit (*bipartite*), *18*–19, 34, 121, 138
ebene Graphen, 118
Flusszahl, 162
Kantenfärbungen, 129, 147, 148
Listenfärbungen, 136–137, 147, 150
Paarungen, 38–40, 56
in Ramseytheorie, *219*–220
als Teilgraph erzwungen, 183–184, 192, 193
Birkhoff, G.D., 149
Blatt (*leaf*), *14*, 33
Block (*block*), *62*, 63, 307
Block-Graph (*block graph*), *64*, 87, 307
Böhme, T., 90, 203
Bollobás, B., 60, 89, 202, 203, 229, 248, 261, 262, 272
Bondy, J.A., 248
Brandt, S., 202
Breite (*width*)
einer Wegzerlegung, *290*
Broersma, 248
Brooks, R.L., *125*, 146
Satz von Brooks, *125*, 146, 149
Listenversion, 150
Brücke (*bridge*), *12*, 45, 153, 164, 169–170, 234
überbrücken (*to bridge*), *237*
Bruhn, H., 120
Burr, S.A., 229

Catlin, P.A., 203
Cayley, A., 149, 271
charakteristische Zufallsgröße (*indicator random variable*), *255*, 317
chordal (*chordal*), *138*–139, 148, 286, 287, 298
k-chromatisch (k-*chromatic*), *121*, 145
chromatische Zahl (*chromatic number*), *121*, 146, 167, 299
Dreieck erzwingend, 147, 228
und Durchschnittsgrad, 127, 133, 183–184, 187, 200
und extremale Graphen, 182, 199
und Flusszahl, 167
als globales Phänomen, 127–128, 137
fast aller Graphen, 261
und Kantenzahl, 124
Konstruktionen, 127–129, 146, 150
und K^r-Teilgraph, 127, 137
kurze Kreise erzwingend, 127, 257
resp. listenchromatische Zahl, 132
und Maximalgrad, 125
und Minimalgrad, 125, 127
und Minoren, 187–190, 200, 201, 204
und Reihenzahl, 125
und Taillenweite, 127, 150, 190, 257
Teilgraphen erzwingend, 127
und Zusammenhang, 127

chromatischer Index (*chromatic index*), *122*, 129, 130
  bipartiter Graphen, 129, 147
  resp. listenchromatischer Index, 132, 135
  und Maximalgrad, 129–131
chromatisches Polynom (*chromatic polynomial*), *146*, 175
Chudnovsky, M., *140*, *150*
Chvátal, V., *211*, *233*, *234*, *235*, 248
Cliquenzahl (*clique number*), *137*–144, 219, 287
  Schwellenfunktion, 270
  eines Zufallsgraphen, 252
Corneil, D.G., 300
Cornuejols, G., *150*
Curran, S., 60
cycle double cover conjecture, 170, *174*

darstellbar durch verbotene Minoren, *288*, 291–295
Δ-System, *228*
Deuber, W., *214*, 229
dichte Graphen (*dense graphs*), *178*, 181, 182
Dichte (*density*)
  Kantendichte, *178*
  eines Netzes (*order of a bramble*), *282*
  obere Kantendichte, *199*
  eines Paares von Eckenmengen, *191*
Diestel, R., 120, 204, 300, 301
Differenz von Graphen (*difference of graphs*), *4*, 95
Digraph, s. *gerichteter Graph*
Dilworth, R.P., *56*, 59, 306, 316
Dirac, G.A., 204, *232*
disjunkte Graphen (*disjoint graphs*), *3*
Doppelkante (*double edge*), *31*, 113
Doppelrad (*double wheel*), *225*–227
doppelte Kreisüberdeckung (*cycle double cover*), 170, *174*
doppeltes Zählen (*double counting*), 100, *119*, 141–142, 254, 266
Drehsinn, *165*–166
Dreieck (*triangle*), *3*
Dreiecksgraph, ebener (*plane triangulation*), *98*, 100, 116, 174, 286
Dreifarbensatz, *123*
Dreiflussvermutung, *170*, 174
Dual (*dual*)
  kombinatorisches, *115*–116, 119
  topologisches, *113*–114, 118, 119
  und Zusammenhang, 118, 119
Dualität (*duality*)
  Baumzerlegungen und Netze, 283
  ebener Multigraphen, 113–116, 118
  Flüsse und Färbungen, 165–168, 313
  Kreise und Minimalschnitte, 28–30, 115–116, 165–167
  und Plättbarkeit, 113–116, 118, 119, 165–168
  unendlicher Graphen, 120
Dualitätssatz der Baumweite (*tree-width duality theorem*), *283*
magere Graphen (*sparse graphs*), *177*, 184–186, 202, 204, 210, 211
Durchmesser (*diameter*), *9*, 271
  und Maximalgrad, 9
  und Minimalgrad, 10, 33
  und Radius, 9, 33
  und Taillenweite, 8
Durchschnitt (*intersection*), *3*, 4
Durchschnittsgrad (*average degree*), *5*
  beschränkt, 229
  eines bipartiten ebenen Graphen, 311
  und chromatische Zahl, 127, 133, 183–184, 187, 200
  und listenchromatische Zahl, 133
  und Listenfärbung, 133
  und Kantenzahl, 5
  und Minimalgrad, 5–6
  Minoren erzwingend, 177, 185–186, 200, 203–204
  und Ramseyzahlen, 229
  und Regularitätslemma, 191, 202
  und Taillenweite, 9, 10, 258
  Teilgraphen erzwingend, 270
  topologische Minoren erzwingend, 78, 184–185
  und Zusammenhang, 13

eben (*plane*)
  Dreiecksgraph, *98*, 100, 116, 174, 286
  Graph, *94*–101
  Multigraph, *113*–116, 118, 119, 165–168
  von hoher Taillenweite, 117
echte Teilung (*proper separation*), *12*
Ecke (*vertex*), *2*
  eines ebenen Graphen, *94*
eckenchromatische Zahl (*vertex-chromatic number*), *121*
Eckenerweiterung, *140*
Eckenfärbung (*vertex colouring*), *121*, 124–129, 228
Eckengrad, *5*–6
  einer Schlinge, *31*

Eckenraum (*vertex space*), *24*
eckentransitiv (*vertex-transitive*), *58*
Eckenüberdeckung (*vertex cover*), *39*, 55–56, 282
Eckenverdopplung (*vertex duplication*), 140, *181*
Eckenzusammenhang (*vertex-connectivity*), *12*
Edmonds, J., 48, 59, 301
Eigenschaft (*property*), *3*, 226, *259*
  $\mathcal{P}_{i,j}$, 259, 271
  Äquivalenz, *226*
  erblich, *288*, 298
  fast aller Graphen, 259–264, 270
  monoton, *262*
  nicht-trivial, *226*
Einbettung (*embedding*)
  bipartiter Graphen (Ramseytheorie), *219*–222
  in die Ebene, *101*, 105–120
  k-fast einbettbar, *291*
  eines Graphen, *22*–23
  in höhere Flächen, 119, 290–295, 299, 301
  in S^2, 94, 102
  in $\mathbb{R}^3$, 116
einfarbig (*monochromatic*) (in der Ramseytheorie)
  (Ecken-) Menge, *208*–210
  Teilgraph, *213*, 210–213
  Untergraph, 213–224
Einheitskreis S^1 (*unit circle*), *92*
Einsfaktorsatz, *44*, 59, 90
Endecke
  einer gerichteten Kante (*terminal vertex*), *30*
  einer Kante (*end*), *2*
  einer Schlinge, *31*, *113*
  eines Weges, *7*
endlicher Graph (*finite graph*), *2*
Endpunkte eines Polygonzuges, *92*
enthält (*contains*), *3*
entweder. . . oder, *1*
erbliche Grapheneigenschaft (*minor-closed graph property*), *288*, 292, 294, 295, 298
  algorithmische Entscheidbarkeit, 294
Erdős, P., *50*, 60, *127*, 150, *182*, 183, 195, 202, 203, *214*, 227, 229, *233*, 248, 249–250, *253*, 256–258, *257*, *263*, *269*, 272, 317
Erdős-Pósa-Eigenschaft, *48*–*49*, 58, *289*–290, 298, 299
Erdős-Pósa-Satz, *50*, 60
  Kantenversion, 201, 227
  Verallgemeinerung, 289–290
Erdős-Sós-Vermutung, *183*, 200, 202–203
Ereignis (*event*), *251*
erster Punkt auf dem Rand, *93*
Erwartungswert (*expected value*), *253*–255, 264–265
Erzwingung
  Baum, 15, 183
  hohe chromatische Zahl, 127
  Dreieck, 147, 228
  Hamiltonkreise, 232–234, 237, 246, 248
  kurze Kreise, 10, 185–186, 190, 257, 258
  lange Kreise, 8, 33, 88, 146, 231–248
  Minor hohen Minimalgrades, 185, 203
  MK^r, 184–190, 202–204, 291, 299
  $MK^{\aleph_0}$, 299
  kantendisjunkte Spannbäume, 52
  Teilgraph, 15, 177–184, 191–204
  TK^5, 189, 204
  TK^r, 78, 184–185, 186, 187, 190, 204
  Verbundenheit, 78–86, 90
  lange Wege, 8, 33
  hohen Zusammenhang, 13
Euler, L., *24*, 36, *99*
  Geschlecht, 293
  Polyederformel, *99*–100, 116, 117, 311
eulersch (*Eulerian*)
  Graph, *23*, 313
  Kantenzug, *23*
Evolution der Zufallsgraphen, 262, 272
Existenzbeweis, probabilistischer, 150, 249, 254, 256–258
extremal (*extremal*)
  resp. kantenmaximal, 179, 188
  bipartiter Graph, 199
  Graph, *178*–180
  Graphentheorie, 177–204
  ohne MK^5, 189
  ohne $TK_{3,3}$, 201
  ohne TK^4, 188
  ohne $K_{s,t}$, 199
  ohne k unabhängige Kanten, 199

Fächer (*fan*), *74*
Fächerform des Satzes von Menger, 74
Fajtlowicz, S., 203
Faktor (*factor*), *37*
  1-Faktor, 37–48, 58
  1-Faktor-Satz, *44*, 46, 58, 59, 89, 90
  2-Faktor, 43

k-Faktor, *37*
faktorkritisch (*factor-critical*), *46*, 306
k-färbbar (k-*colourable*), *121*, 132, 286
3-Farben-Satz, s. *Dreifarbensatz*
4-Farben-Satz, s. *Vierfarbensatz*
5-Farben-Satz, s. *Fünffarbensatz*
Farbklasse (*colour class*), *124*
Färbung (*colouring*), *121*–150, 228
  Algorithmen, 124, 135, 145
  siehe auch *chromatische Zahl*
  ebener Graphen, 122–123, 165–168
  und Flüsse, 165–168
  in der Ramseytheorie, *207*
  Totalfärbung, *147*, 150
fast alle/jeder/kein (*almost all/every/no*), *259*, 270–271
k-fast einbettbar (k-*nearly embeddable*), *291*
Fläche (*surface*), *291*, 292–293
Fleischner, H., *237*, 246, 248, 317
Fluss (*flow*), *154*, 151–175
  k-Fluss, *159*–164, 169–173, 174, 175
  2-Fluss, 162
  3-Fluss, 162, 170, 174
  3-Fluss-Vermutung, 170, 174
  4-Fluss, 163–164, 169–170, 174, 175
  4-Fluss-Vermutung, 169, 170, 175
  5-Fluss-Vermutung, 169, 170, 175
  6-Fluss-Satz, *170*–173, 174, 175
  H-Fluss, *157*–162, 173
  in ebenen Graphen, 165–168
  und Färbungen, 165–168, 313
  ganzzahliger (*integral*), *154*, 156
  gruppenwertiger (*group-valued*), 157–162, 173, 175
  in Netzwerk (*network flow*), *153*–156, 173, 175, 313
  und Orientierung, 174
  Stärke (*value*), *155*
Flusspolynom (*flow-polynomial*), *159*, 162, 175
Flusszahl (*flow-number*), *159*–164, 169, 173, 174
Ford, L.R. Jr., *155*, 175
Frank, A., 89, 175
Fulkerson, D.R., *155*, 175
Fundamentalkreis (*fundamental cycle*), *28*, 35
Fundamentalschnitt (*fundamental cut*), *28*, 35
Fünffarbensatz, *122*, 149, 170
  Listenversion, *133*, 150
Fünfflussvermutung, *169*, 170, 175
Gale, D., *42*
Gallai, T., 35, 48, *55*, 59, 60, 90, 202
Galvin, F., *136*, 150
ganzzahlig (*integral*), *154*
  Fluss, 154, 156
  Funktion, *154*
Gasparian, G.S., 150
Gebiet
  eines ebenen Graphen (*face*), *95*, 94–101
  einer offenen Punktmenge (*region*), *92*–94
  auf S^2, *94*
Gebietsrand (*facial cycle*), *111*
geodätischer Kreis (*geodesic cycle*), *35*
gepaart (*matched*), *37*
Gerüst, *11*, 15
gerade (*even*)
  Eckengrad, 24, 43
  Graph, *162*, 164, 174
  Kreislänge, 19, 34, 118
gerichtet (*directed*)
  Graph, *30*, 55, 135, 147, 311
  Kante, *30*
  Kreis, 146, 147
  Weg, *55*, 146, 310, 311
Geschlecht (*genus*)
  Eulergeschlecht, 293
  und Färbung, 149
  einer Fläche, 293
  eines Graphen, *299*
    orientierbar, *299*
geschlossener Kantenzug (*closed walk*), *11*, 23
Gilmore, P.C., 148
Gitter (*grid*), 117, *283*, 300
  Baumweite von, 285, 297, 299
  als Minor, 285, 288, 299
Godsil, C., 36
Golumbic, M.C., 150
Gorbunov, K.Yu., 300
Göring, F., 90
Grad (*degree*), *5*
  einer Schlinge, *31*
Gradsequenz (*degree sequence*), *235*
Graham, R.L., 228
Graph (*graph*), *2*–4, 30, *32*
  ebener, *94*–101, 113–116, 122–123, 133–135, 165–168
  schlichter, *32*
Grapheneigenschaft (*graph property*), *3*, 226, *259*, 271, 287–288, 292, 298, 301

Grapheninvariante (*graph invariant*), *3*, 33, 200, 253
Graphenprozess, *273*
graphentheoretischer Isomorphismus, *103*
Graphentheorie, 1–301
  algebraische, 24–30, 36
  algorithmische, 175, 294, 301
  extremale, 177–204
  probabilistische, 272–273
  topologische, 119–120
Graphenzerlegung (*graph partition*), *54*
Greedy-Algorithmus, *124*, 135, 145
Grötzsch, H., *123*, 149, 170, 174
Grünwald, T., s. *Gallai*
gruppenwertiger Fluss, 157–162, 173, 175
Gusfield, D., 59
gut (*good*)
  Charakterisierung, 292, *301*
  Folge, *276*
  Paar, *276*, 293, 294
Guthrie, F., 149
Gyárfás, A., 184, 200, 204

Hadwiger, H., *187*, 203
  Vermutung, *187*–190, 201, 203–204
Hajós, G., *128*, 150, 190
  Konstruktion, 127
  Operation, 128
  Vermutung, *190*, 203
Hajnal, A., *214*, 229
Haken, W., 149
Halbordnung, 56, 59
  auf der Klasse aller Graphen, 3, 19–20, 22
Halin, R., 89, 90, 300
Hall, P., *40*, 57
Hamilton, W.R., 247
Hamiltonkreis (*Hamilton cycle*), *231*–248
  in fast allen Graphen, 262
  hinreichende Bedingungen, 231–237
  und 4-Fluss, 174, 234
  in G^2, 237–246
  in G^3, 247
  und Gradsequenz, 235–237, 246
  in Kantengraphen, 248
  und Minimalgrad, 232
  in plättbaren Graphen, 234
  Potenz von, 246
  und Vierfarbensatz, 234
hamiltonsch (*hamiltonian*)
  Graph, *231*
  Tupel, *235*, 246
Hamiltonweg (*Hamilton path*), *231*, 237, 246, 247
Handelsreisender (*travelling salesman*), 247
Harant, J., 90
Heawood, P.J., 149, 174
Heesch, H., 149
Heiratsbedingung (*marriage condition*), *40*
Heiratssatz (*marriage theorem*), *40*, 43, 57, 59, 305
  stable marriage theorem, *42*, 59, 137
Higman, D.G., *276*, 299
Hindernis (*obstruction*)
  kleiner Baumweite, 283–285, 289, 300
Hoffman, A.J., 148
Höhe (*height*), *16*
Hoory, S., *10*, 36
Hypergraph (*hypergraph*), *30*

induziert (*induced*)
  Kreis, *8*, 25, 34, 66, 98, 112, 138, 140, 312, 315
  in Ramseytheorie, 207, 213–224, 227
  Teilgraph, *3–4*, 76, 137, 140, 143, 312
Innengebiet (*inner face*), *95*
innere Ecke (*inner vertex*), *7*
Inneres (*interior*)
  eines ebenen Polygonzugs, *92*
  eines Weges, 7
Intervallgraph (*interval graph*), 138, *148*, 298
Invariante (*invariant*), *3*
inzident (*incident*), *2*
Inzidenzfunktion, 32
Inzidenzmatrix (*incidence matrix*), *30*
inzidieren, *2*
irreduzibel (*irreducible*), *298*
Irving, R.W., 59
isolierte Ecke (*isolated vertex*), *5*, 271
isomorph (*isomorphic*), *3*
Isomorphismus (*isomorphism*), *3*
  ebener Graphen, 101–105, 117
Itai, A., 60

Jaeger, F., 175
Janson, S., 272
Jensen, T.R., 149, 175, 300
Johnson, D., 301
Jordan, C., *93*, *94*
  Kurvensatz, *93*, 119
Jung, H.A., *78*, 204
Jungnickel, D., 175

Kahn, J., 150
kanonischer Homomorphismus, 159
Kante (*edge*), *2*
  X–Y Kante, *2*
  Doppelkante, *31*
  ebene, *95*
  gerichtete, *30*
  eines Multigraphen, *31*
  parallele, *30*
  eine Partition kreuzend, *26*
kantenchromatische Zahl (*edge-chromatic number*), s. *chrom. Index*
Kantendichte, 5, 6, *178*
  und Durchschnittsgrad, 6
  obere, *199*
  und Regularitätslemma, 191, 202
  Teilgraphen/Minoren erzwingend, 78, 178–184, 184–185
  erzwingt Wegverbindungen, 79–86
kantendisjunkte Spannbäume, 51–54, 58
Kantenfärbung (*edge colouring*), *122*, 129–131, 208, 215
  eindeutige, 246
  und Flusszahl, 164
  und Paarungen, 147
  in Ramseytheorie, 207
Kantengraph (*line graph*), *4*, 122, 148, 201, 248
Kantenkontraktion (*edge contraction*), *20*
  und Minorenbildung, 20–21, 34
  in Multigraph, *32*
  und 3-Zusammenhang, 65
kantenmaximal (*edge-maximal*), *4*
  resp. extremal, 179, 188, 199
  ohne MK^5, 189
  ohne $TK_{3,3}$, 201
  ohne TK^4, 188, 201
  ohne TK^5, $TK_{3,3}$, 109
Kantenraum (*edge space*), *25*, 35, 111
Kantenüberdeckung (*edge cover*), 148
Kantenzug (*walk*), *11*, 34
  alternierender, *71*
  geschlossener, *11*
  der Länge k, *11*
Kantenzusammenhang (*edge-connectivity*), *12*, 51–53, 74, 87, 88, 145, 163
ℓ-kantenzusammenhängend (ℓ-*edge-connected*), *12*
Kapazität (*capacity*), *154*
Kapazitätsfunktion (*capacity function*), *154*
Karoński, M., 272
Kawarabayashi, K., 203
Kelmans, A.K., *112*, 120
Kempe, A.B., 149, 248
Kern (*kernel*)
  eines gerichteten Graphen, *135*, 147
  einer Inzidenzmatrix, 30
Kette (*chain*), *16*, *56*, 59
Kirchhoff-Regel, *151*, 153
Klasse 1/2 (*class* 1/2), *131*
Klein'sche Vierergruppe, 164
Kleitman, D.J., 150
Knoten (= Ecke) (*node*), *2*
knotenfreie Einbettung (*knotless embedding*), *295*
Knotentheorie, 175
Kochol, M., 162, 175
Kohayakawa, Y., 204
Kollár, J., 202
kombinatorisch (*combinatorial*)
  Dual, *115*–116, 119
  Isomorphismus, *102*, 103, 117, 119
  Mengenlehre, 228
Komlós, J., 202, 203, 204, 229, 246, 248
Kompaktheitsschluss , 209–210, 228, *229*
Komplement (*complement*)
  eines bipartiten Graphen, 138, 147
  einer Eigenschaft, *288*, 292
  eines Graphen, *4*
  und Perfektion, 140, 311
Komplexitätstheorie, 138, 292, 294, 295, 301
Komponente (*component*), *11*, 33
  ungerade, *44*–48
König, D., *39*, 59, *129*, *209*
  Überdeckungssatz, *39*, 55, 57, 58, 59, 71, 138, 148
  Unendlichkeitslemma, *209*, 210, 228, 229
Königsberger Brücken, 23–24
k-konstruierbar (k-*constructable*), *128*, 146, 150
Kontraktion (*contraction*), *20*, 19–23
  und Baumweite, 281, 282
  und Minoren, 19–23, 34
  in Multigraphen, 32, 173
  und 3-Zusammenhang, 65–66
Kontraktionsabbildung, 20, 34, 304
konvex (*convex*)
  Gebiet, 106, 117, 119–120
  Polygon, 227
  Zeichnung, 117, 119, 316
Kostochka, A.V., 150, *185*, 203, 229
Kozlov, D., 150

Kreis (*cycle*), *8*–9
und Blöcke, 63
disjunkte, 49–50
doppelte Kreisüberdeckung (*cycle double cover conjecture*), 170, *174*
mit Drehsinn, *165*–167
Dualität mit Minimalschnitten, 28–30, 115–116, 165–167
Fundamentalkreis, *28*, 35
geodätisch, *35*
gerichtet, 146, 147
Hamilton, 174, *231*–248
induziert, *8*, 25, 66, 98, 112, 138, 140, 312, 315
kantendisjunkte, 201, 227
kurzer, 10, 127, 185–186, 256–258
Länge, *8*
langer, 8, 33, 88, 146
mittlere Anzahl, 255
in Multigraphen, 31
auf S^2, *94*
Schwellenfunktion für, 270, 271
nicht trennender, 66, 98, 112
(un)gerader Länge, 18–19, 125, 140, 304, 312
kreislos (*acyclic*), 15, 54, 146
Kreuz in einem Gitter, *283*
kreuzende Kanten zu Eckenpartition (*crossing edges*), *26*, 51–52
kreuzungsfreie Wege (*independent paths*), *7*–*8*, 74, 75–77, 88, 89, 304
Kriesell, 59
kritisch k-chromatisch (*critically k-chromatic*), *145*, 310, 315
Krone, *225*–227
Kruskal, J.A., *277*, 299, 319
kubischer Graph (*cubic graph*), *5*
und Zusammenhang, 87
1-Faktoren, 45, 58
Flusszahl, 162, 164, 170, 175
Multigraph, 49, 58, 170, 238
Kühn, D., 90, *186*, *190*, 203, 204
Kuratowski, C., *106*–*110*, 119, 301
-artige Charakterisierung, 117, 127, 226, 292–293, 301
-satz für höhere Flächen, 292–293
Kuratowskimenge (*Kuratowski set*)
von Graphen, *292*–293, 300
von Grapheneigenschaften, *226*

Landkartenfärbungen (*map colourings*), 121–123, 145, 148, 165
Länge (*length*)
eines Kantenzuges, *11*
eines Kreises, *8*
eines Weges, *7*, 8
Larman, D.G., *78*
Lateinisches Quadrat (*Latin square*), *146*
Lee, O., 60
leerer Graph (*empty graph*), *2*, 11
Lemma von Sperner, *57*
lineare (*linear*)
Algebra, 24–30, 67–69, 111–112, 144
Optimierung, 175
Linial, N., *10*, 36
listenchromatische Zahl (*choice number; list-chromatic number*), *132*
bipartiter plättbarer Graphen, 147
und Durchschnittsgrad, 133
plättbarer Graphen, 133
und Reihenzahl, 147
listenchromatischer Index (*list-chromatic index*), *132*, 135–137, 147, 150
k-listenfärbbar (*k-choosable; k-list-colourable*), *132*
Listenfärbung, *132*–137, 150
bipartiter Graphen, 136–137, 147
Satz von Brooks, 150
Listenfärbungsvermutung, *135*, 147
asymptotisch, 150
für bipartite Graphen, 136–137
Liu, X., *150*
Lloyd, E.K., 36
Loch (*hole*), *150*
Logarithmus, 1
löschen (*delete*), *4*
Lovász, L., 59, *140*, *143*, 150, 202
Łuczak, T., 272, 273

MacLane, S., *111*, 120
Mader, W., *13*, 36, *75*–*77*, 89, 90, 185, 200, 203
Magnanti, T.L., 175
Maharry, J., 203
Mani, P., *78*
Markovkette, 273
Markov-Ungleichung, *254*, 258, 264, 267
matching, s. *Paarung*
Máté, A., 229
Matroidtheorie, 60, 120
Max-Flow Min-Cut Theorem, 153, *155*, 173, 175
maximal (*maximal*), *4*
eben, *98*, 106, 116
kreislos, 15
plättbar, *106*, 110, 118, 120, 201, 309

Maximalgrad (*maximum degree*), *5*
beschränkt, 194, 211
und chromatischer Index, 129–131
und chromatische Zahl, 125
und Durchmesser, 9
und listenchromatischer Index, 137, 150
und Radius, 9
und Ramseyzahlen, 211–212
und Totalfärbungszahl, 147
Mehrfachkante (*multiple edge*), *30*
Menger, K., 59, *69–75*, 88, 90, 173
Satz von, *69*–75, 88, 90, 173
Milgram, A.N., *55*, 59, 60
minimal (*minimal*), *4*
Menge verbotener Minoren, 292, 298, 300, 301
nicht plättbar, 118
minimaler Schnitt, 27, 35, 63, 115, 165
Trenner, 86–87
k-zusammenhängend, *89*–90
zusammenhängend, 15
Minimalgrad (*minimum degree*), *5*
Bäume erzwingend, 15
und chromatische Zahl, 125, 127
und Durchmesser, 10, 33
und Durchschnittsgrad, 5
Hamiltonkreis erzwingend, 232, 246
und Kantenzusammenhang, 13
kurze Kreise erzwingend, 10, 185–186, 190, 258
lange Kreise erzwingend, 8
und listenchromatische Zahl, 132–133
und Taillenweite, 9, 10, 185–186, 203, 258
und Umfang, 8
und Verbundenheit, 79
lange Wege erzwingend, 8, 33
und Zusammenhang, 13, 33, 89
Minimalschnitt (*bond*), *27*, 35, 63, 115–116, 120
Dualität zu Kreisen, 28–30, 115–116, 165–167
Minor (*minor*), *21*, 19–23, 184–186
(*siehe auch* topologischer Minor)
$K_{3,3}$, 120, 201
K^4, 188–189, 288
K^5, 189, 204, 298
K^5 und $K_{3,3}$, 106–110
K^6, 190
K^r, 185, 186, 187, 200, 201, 203–204, 271, 291, 299
$K^{\aleph_0}$, 299
großer 3- oder 4-zusammenhängender Graphen, 225–227
erzwungener, 184–190
und Kontraktion, 19–23, 34
von Multigraphen, 32
als Ordnungsrelation, 22, 34
Petersen-Graph, 169
und Plättbarkeit, 106–110, 117, 118
resp. topologischer Minor, 21–23, 106
unendlicher Graphen, 299, 301
unvollständiger, 203
verbotener, 187–190, *287*–295, 298, 299–301
und WQO, 275–301
von Zufallsgraphen, 271
Minorenrelation, *21*, 34, 226, 282, 292
Minorensatz, 275, *292*–295, 299, 300
Beweis, 293–295
für Bäume, 277–279
Mittelwert (*expected value*), *253*
Möbiuskrone, *225*–227
Möbiusleiter, 189
Mohar, B., 119, 149, 203, 301
Moment (*moment*)
erstes, s. *Markov-Ungleichung*
zweites, 264–270
monotone Eigenschaft (*monotonic property*), *262*, 271, 272
Moore-Schranke, 10, 36
Multigraph (*multigraph*), *31*–32, 157
kubischer, 49, 58, 170, 238
listenchromatischer Index von, 150
ebener, *113*
Murty, U.S.R., 248
Myers, J.S., 203

Nachbar (*neighbour*)
einer Ecke, *3*
einer Menge von Ecken, *5*
Nash-Williams, C.St.J.A., *52*, *54*, 60, 299, 300
Nešetřil, J., 228, 229
Netz (*screen; bramble*), *282*–285, 297
Dichte von, *282*
Netzwerk (*network*), *153*–156
Theorie, 175
nirgends
dicht (*nowhere dense*), 54
null (*nowhere zero*), *157*, 175
normaler Baum (*normal tree*), *16*–18, 34, 168, 174, 227, 319

oBdA, *1*

oberhalb (*above*), *16*
obere Kantendichte, *199*
Obergraph (*supergraph*), *3*
Oktaeder (*octahedron*), *12*, 18–19, 300
Oporowski, B., *225*, *226*, 229
Ordnung (*order*)
  Baumordnung, *15–16*, 34
  eines Graphen, *2*
  partielle, 15, 21, 34, 55–56, 59, 148, 295
  Quasiordnung, *276*
  einer Teilung, *12*
  Wohlquasiordnung, *276*–277, 292, 295, 296, 299, 300
Ordnungsrelationen für Graphen, 3, 19–20, 22
orientierbare Fläche (*orientable surface*), 299
  Ebene, 166
Orientierbarkeit, 166
orientierter Graph (*oriented graph*), *30–31*, 246
Orientierung (*orientation*), *30–31*, 135, 146, 174, 200, 311
  Kreis mit Drehsinn, *165*–166
  stark zusammenhängende, *34*
Orlin, J.B., 175
Osthus, D., 90, *186*, *190*, 203, 204
outerplanar, *118*
Oxley, J.G., 120, *225*, *226*, 229

paar (*bipartite*), *18*
paarbar (*matchable*), *46*
Paarung (*matching*), *37*–61
  in allgemeinen Graphen, 44–48
  in bipartiten Graphen, 38–40, 57, 138
  einer Eckenmenge, *37*
  und extremale Graphen, 199
  und Kantenfärbung, 147
  stabile, *42*, 57–58, 137
Packung (*packing*), *37*, 48–54, 58
Palmer, E.M., 272
parallele Kanten (*parallel edges*), *30*
Parität (*parity*), 6, 43, 47, 247
r-partit (*r-partite*), *18*
Partition, s. *Schnitt; Zerlegung*
  -kanten (*cross-edges*), *51*–52
Perfect Graph Conjectures, *140*
perfekt (*perfect*), *137*–144, 147–148, 150, 227
  Paarung, s. *1-Faktor*
  Vermutungen über perfekte Graphen, *140*
  Sätze über perfekte Graphen, *140*, 147, 150
Petersen, J., *43*, *45*
Petersen-Graph, *169*–170
plättbar (*planar*), *106*
  siehe auch *ebener Graph*
Plättbarkeit (*planarity*)
  und Dualität, 113–116, 118, 119, 165–168
  und Färbungen, 122–123, 133
  von Minoren, 288–289
  Zertifikate für Nichtplättbarkeit, 292
Plättbarkeitskriterien
  Kelmans, *112*
  Kuratowski, *110*
  MacLane, *111*
  Tutte, 120
  Whitney, *116*
Plummer, M.D., 59
Polyederformel, *99*, 100
Polygon (*polygon*), *92*
Polygonzug (*polygonal arc*), *92*, 93, 94
Pósa, L., *50*, 60, *214*, 229
Potenz (*power*)
  eines Graphen, *237*, 247
Präferenzliste (*preferences*), *42*, 57, 137
probabilistische Methode, 249, 256–259, 272
Problem des Handelsreisenden, 247
projektive Ebene, 301
Proskurowski, A., 300
punktweise größer (*pointwise greater*), *235*

Quadrat (*square*)
  eines Graphen, *237*–246, 247
  lateinisches, *146*
Quasiordnung (*quasi-ordering*), *276*–277, 292, 295, 296
  äquivalent in, 295

Rad (*wheel*), *66*, 227
  wheel theorem, 66, 89
Radius (*radius*), *9*
  und Durchmesser, 9, 33
  und Maximalgrad, 9
  und Minimalgrad, 9, 33
Rado, R., 59, 229
Radograph, 263
Ramsey, F.P., *206–210*
Ramseygraph, *213–214*
Ramsey-minimal, *213*
Ramseytheorie, 205–229

induziert, 213–224
unendlich, 208–210, 228
und Zusammenhang, 224–227
Ramseyzahl (*Ramsey number*), *207*, *210*, 227, 229, 253, 272
Rand
eines Gebietes (*boundary*), *97*–99, 118
einer Punktmenge (*frontier*), *92*
Randkreis (*cuff*), *290*
reduzierbare Konfiguration, *149*
Reed, B.A., 60, 300
regulär (*regular*), *5*, 42, 43, 147, 246
ϵ-regulär, *191*, 202
Regularitätsgraph (*regularity graph*), *193–194*, 211–212
Regularitätslemma, 178, *192*, 191–198, 202, 204, 229
Reihenzahl (*colouring number*), *124*, 145, 147
und Arborizität, 145
Rényi, A., *263*, *269*, 272
Repräsentantensystem, 55, 57
Richardson, M., 147
Richtung (einer Kante) (*direction*), *152*
Říha, S., 248
Robertson, N., 60, *140*, 149, 150, 175, *190*, 203, *282*, *289*, *291*, *292*, 294, 300, 301
t-robust (t-*tough*), *234*, 246, 247
Robustheitsvermutung (*toughness conjecture*), *234*, 246, 248
Rödl, V., 204, *211*, *214*, 229
Rónyai, L., 202
Rothschild, B.L., 228
Royle, G.F., 36
Ruciński, A., 272
Rundfluss (*circulation*), *152*–153, 166

Sanders, D.P., 149
Sárközy, G.N., 246, 248
Satz erster Ordnung, 260, 272
Schicht (*level*), *16*
schlanke Baumzerlegung (*lean tree-decomposition*), *285*
schlechte Folge (*bad sequence*), *276*, 299
schlicht (*simple*)
Basis, *111*, 118, 120
Graph, *32*
Kantenmenge, *111*
Schlinge (*loop*), *30*
Schnitt (*cut*), *26*
Fluss durch, 153
Fundamentalschnitt, *28*, 35
Kapazität, *154*, 155
Dualität zu Kreisen, 115–116, 165–167
minimal, 27, 35, 63, 115
in Netzwerk, *154*
Schnittgraph (*intersection graph*)
einer Familie von Bäumen, *298*
Schnittraum (*cut space*), *27*–30, 35, 111, 115
Basis, 27, 29, 35
Dimension, 35
Schoenflies, A.M., *94*
Schrijver, A., 59, 89, 90, 150, 175
Schur, I., 227
Schwamm (*core*), *311*
Schwämmchen (*strong core*), *311*
Schwellenfunktion (*threshold function*), *262*–270, 272
Sechsflusssatz, *170*–173, 174, 175
Sehne (*chord*), *8*
self-minor conjecture, *299*
series-parallel, *201*
Seymour, P.D., 60, *140*, 149, *150*, *170*, 175, *190*, 203, *246*, 248, *282*, *283*, *289*, *291*, *292*, 299, 300, 301
Shapley, L.S., *42*
Simonovits, M., 60, 202, 204, 229
simpliziale Baumzerlegung (*simplicial tree-decomposition*), *286*, 297, 298, 300
Slivnik, T., 150
Snark (*snark*), *170*, 175
plättbar, 170, 174, 234
Sós, V., 183, 200, 202
Spannbaum (*spanning tree*), *15*, 29
kantendisjunkte, 51–54, 58
mittlere Anzahl, 265, 271
normale, *16*–17, 34, 174, 227
Spencer, J.H., 228, 272
Sperner-Lemma, 57
Sphäre S^2, 94, 102–105
Sprüssel, Ph., 36
Stärke eines Flusses (*value of a flow*), *155*
stückweise geradlinig (*piecewise linear*), 92
stabil (*stable*)
Menge, *3*
Paarung, *42*, 57–58, 137
Stabilitätszahl (*stability number*), *137*
Standardbasis (*standard basis*), *25*
stark zusammenhängend, *34*
Steinitz, E., 119–120
stereographische Projektion, 94

Stern (*star*), *18*, 200, 213, 226, 309
  Zentrum eines, *18*
  induziert, 224
  unendlich, 228
Stiebitz, M., 150
Stillwell, J., 119
Stone, A.H., *182*, 195
Strecke (*straight line segment*), *92*
Strudel (*vortex*), *299*
Sudakov, B., 229
Summe
  von Flüssen, 162
  von Kantenmengen, *25*
symmetrische Differenz, 25, 38, 72
Δ-System, *228*
Szabó, T., 202
Szekeres, G., 227
Szemerédi, E., *192*, 202, 203, 204, *211*, 229, 246, 248
  siehe auch *Regularitätslemma*

Taillenweite (*girth*), *8*
  und chromatische Zahl, 127, 150, 256–258
  und Durchmesser, 9
  und Durchschnittsgrad, 10, 258
  und Minimalgrad, 9, 10, 33, 185–186, 258
  und Minoren, 185–186, 201, 203
  und Plättbarkeit, 117
  und topologische Minoren, 186, 190
  und Zusammenhang, 90, 258
Tait, P.G., 149, 248
Tarsi, M., 150
Teil (*part*)
  einer Baumzerlegung, *280*
Teilgraph (*subgraph*), *3*
  aufspannend, *4*
  induziert, *3*
  erzwungen durch Kantendichte, 178–184, 191–198, 199, 201
  hohen Minimalgrades, 6, 125, 145
  und WQO von Bäumen, 296
  großer k-zusammenhängender Graphen, 224–227
  hohen Zusammenhangs, 13
Teilung (*separation*), *12*
  und Baumzerlegung, 280, 296, 297, 299
  Ordnung einer, *12*
  verträglich, *297*
Teilweg (*segment*) eines Weges, 7
Thomas, R., 60, *79*, 90, *140*, 149, 150, 175, *190*, 203, *225*, *226*, 229, *283*, *286*, 300, 301
Thomason, A.G., 185, 203, 262, 272
Thomassen, C., 89, 119, *133*, 149, 150, *186*, 203, 248, 300
Tiefensuchbaum (*depth-first search tree*), *17*, 34
Toft, B., 149, 175
Topologie, 91–94
topologischer Isomorphismus, *102*, 103, 114, 117
topologischer Minor (*topological minor*), *21*–22
  Baum (induziert), 183
  erzwungen durch chromatische Zahl, 190
  erzwungen durch Durchschnittsgrad, 78, 184–186
  jedes großen 2-zusammenhängenden Graphen, 225
  induziert, 184
  $K_{3,3}$, 101, 106, 109, 110, 120, 201
  K^4, 66, 188–189, 201, 288
  K^5, 101, 106, 109, 110, 120, 189, 204, 298
  K^5 und $K_{3,3}$, 101, 106, 109, 110, 118, 120
  K^r, 78, 180, 184–186, 190, 200, 201, 203–204, 207, 224, 291
  $K^{\aleph_0}$, 299
  resp. gewöhnlicher Minor, 21–23, 106
  als Ordnungsrelation, 22
  und Plättbarkeit, 101, 106–110, 117
  erzwungen durch Taillenweite, 186, 190
  verbotener, *287*–291, 298, 299, 300–301
  und WQO von allgemeinen Graphen, 296
  und WQO von Bäumen, 277
topologisches Dual, *113*–*114*, 118–119
Torso (*torso*), *290*–291
Totalfärbung (*total colouring*), *147*, 150
  Vermutung, *147*, 150
Totalfärbungszahl (*total chromatic number*), *147*
transitiv (*transitive*), *58*, 88
trennen (*separate*)
  die Ebene, *92*
  einen Graphen, *11*–12, 69, 74
Trenner (*separator*), *11*–12, 86–87, 88
trianguliert (*triangulated*), *138*
trivialer Graph (*trivial graph*), *2*
Trotter, W.T., *211*, 229
Tschebyschev-Ungleichung, 265, 318

Turán, P., *180*
  Satz, *180*, 202, 211
Turángraph, 179, *180*–184, 199, 202, 314
Turnier (*tournament*), *246*
Tutte, W.T., *44*, *52*, 59, 60, 64, *66*, 89, 112, 120, *157*, *160*, *167*, 175, *234*, 248
  Baumpackungssatz, *52*, 60
  -Bedingung, *44*
  1-Faktor-Satz, *44*, 59
  Flussvermutungen, *169*–*170*, 175
  Plättbarkeitskriterium, 112, *120*
  -Polynom, 175
  Rad-Satz, *66*, 89
  Erzeugung des Zyklenraums, *66*

Überdeckung (*cover*)
  durch Antiketten, 59
  durch Bäume, 54, 117
  durch Ecken, *37*, *38*–39, 48–51, *282*, 289
  durch Kanten, 148
  von Kanten, *39*
  durch Ketten, 56, 57
  von Kreisen, 49
  eines Netzes, *282*
  durch Wege, 55–56
Umfang (*circumference*), *8*, 297
  und Minimalgrad, 8
  und Unabhängigkeitszahl, 146
  und Zusammenhang, 88, 232
unabhängig (*independent*), *3*
  Eckenmenge, 55, 135, 252
  Ereignisse, 251
  Kantenmenge, 37–48, 58
Unabhängigkeitszahl (*independence number*), *137*–144
  und Hamiltonkreise, 233
  und lange Kreise, 146
  und Perfektion, 143
  und Umfang, 146
  und (Weg-) Überdeckungen, 55, 58
  Wahrscheinlichkeit von, 252
  von Zufallsgraphen, 252, 271
  und Zusammenhang, 233
unendliche Graphen, *2*, 34, 57, 120, 199, 208–209, 228, 229, 262–264, 299, 300, 301
Unendlichkeitslemma (*Infinity Lemma*), *209*, 210, 228, 229
ungepaart (*unmatched*), *37*
ungerade
  Grad, 6, 247, 317
  Komponente, *44*–48
  Kreislänge, 18–19, 125, 140, 147, 150, 304, 311, 312
unterhalb (*below*), *16*
Unterdrücken einer Ecke, *32*
Untergraph (*induced subgraph*), *3*–*4*, 76, 137, 140, 143, 312
  Baum, 183, 200
  erzwungen durch hohe chromatische Zahl, 184
  fast aller Graphen, 259, 271
  aller großen zusammenhängenden Graphen, 224
  Kreis, *8*, 25, 34, 66, 98, 112, 138, 140, 312, 315
  aller perfekten Graphen, 139, 147
  in Ramseytheorie, 207, 213–224, 227
  Schwellenfunktion für, 272
  Wahrscheinlichkeit, 252
  2-zusammenhängender, 61–64
Unterteilung (*subdivision*), *21*
Unterteilungsecke (*subdividing vertex*), *22*
Urquhart, A., 150

Valenz (*valency*), *5*
Varianz (*variance*), *265*
Veldman, H.J., 248
Verbesserungsweg (*augmenting path*), *38*, 56, 305
verbinden (Ecken)
  durch Kante (*join*), *2*, *92*
  durch Weg (*link*), *7*, 61
Verbindungswege gegebener Endecken, 77–86, 90, 184
verbotene Minoren (*forbidden/excluded minors*), *287*–295
  und Baumweite, 287–291
  und chromatische Zahl, 187–190
  darstellbar durch, *288*, 291–295, 298, 299
  minimale Menge, 292, 298, 300, 301
  plättbar, 288–289
verbunden (*linked*), *77*
  Ecken, *7*, *92*
  durch einen Polygonzug, *92*
  k-verbunden, *77*–86, 89, 90, 184
    resp. k-zusammenhängend, 77–79, 89, 90
  durch einen Weg, *7*
Verdopplung einer Ecke, 140, *181*
Vereinigung (*union*), *3*, 4
Vergleichbarkeitsgraph (*comparability graph*), 138, *148*

Vernetzungsgrad (*bramble number*), *285*
verträgliche Teilungen (*compatible separations*), *297*
Verzweigungsecke (*branch vertex*), *22*
Verzweigungsmenge (*branch set*), *20*
Vierfarbenproblem, 145, *149*, 204
Vierfarbensatz, *122*, 170, 174, 187, 189–190, 201, 234, 248
  Beweisgeschichte, 149
Vierflussvermutung, *169*–170, 175
Vizing, V.G., *130*, 150, 311, 312, 315
Voigt, M., 150
vollständig (*complete*), *3*
  Teil einer Baumzerlegung, 286
  bipartit, *18*, 199
  Graph, *3*, 163
  Minor, 106, 110, 184–190, 200, 201, 203–204, 291, 293
  multipartit, *18*, 181
  Paarung, s. *1-Faktor*
  r-partit, *18*
  Teilgraph, 127, 137–138, 177–182, 252, 270, 271, 281
  trennender Teilgraph, 271, 286, 298
  topologischer Minor, 75–78, 90, 106, 110, 120, 184–185, 186, 190, 200, 204
  Teil einer Wegzerlegung, 298
von. . . nach, *7*
Vušković, K., *150*

Wagner, K., *110*, 119, 120, *189*, 200, 201, 203, 204, 300
Wagner-Graph, *189*, 286, 298, 300
„Wagner-Vermutung“, s. *Minorensatz*
Wald (*forest*), *14*, 288
  Baumweite von, 288, 296, 297
  ebener, 97, 117
  als Minor, 300
  Zerlegung in Wälder, 54, 60
Weg (*path*), *7*–11
  a–*b*-Weg, *7*–8, 74
  A–*B*-Weg, *7*, 69–75, 88
  H-Weg, *8*, 62, 75–77, 88, 89, 90
  alternierend, *38*–40, *71*
  disjunkt, 55, 69–75, 77–86
  zwischen vorgegebenen Eckenpaaren, 77–86
  als erzwungene Teilstruktur, 33, 225
  gerichtet, *55*
  induziert, 226
  kantendisjunkt, 51–52, 74, 76
  kreuzungsfrei, *7*–*8*, 74, 75–77, 88, 89, 304
  Länge, *7*
  langer, 8
  unendlicher, 228
  Verbindungswege, 77–86, 90, 307
Wegbreite (*path-width*), *298*, 300
Weg-hamiltonsches Tupel, *237*
Wegüberdeckung (*path cover*), *55*–56, 306
Wegzerlegung (*path-decomposition*), *290*–291, 298
  in vollständige Teile, 298
Weite (*width*)
  einer Baumzerlegung, *282*
Welsh, D.J.A., 175
Wheel Theorem, 66, 89
Whitney, H., 90, *105*, *116*
Wilson, R.J., 36
Winkler, P., 272
Wirth, B., 150
Wohlquasiordnung (*well-quasi-ordering*), *276*–301
Wollan, P., *79*, 90
Würfel (*cube*), *32*, 33, 271
Wurzel (*root*), *15*
Wurzelbaum (*rooted tree*), *15*, 34, 278, 296

Yu, X., 60

Zehavi, A., 60
Zeichnung (*drawing*), 91–92, *101*–105, 108
  geradlinig (*straight-line*), 117, 118
  konvex, 117, 119
zentral (*central*)
  Ecke, *9*, 303
  Moment, 265
Zentrum (eines Sterns) (*centre*), *18*
Zerlegung (*decomposition; partition*), *54*
  siehe auch *Baumzerlegung*
  Partition, *1*, 33, 52, 192, 207
  in Wälder, 54
Zertifikat (*certificate*), 137, 292, 301
Zufallsgröße (*random variable*), *253*
  charakteristische, *255*, 317
Zufallsgraph (*random graph*), 185, 191, 210, *251*, 249–273
  Evolution, 262, 270, 272
  unendlicher, *263*, 262–264
zugänglicher Punkt, 93
(1-) Zusammenhang (*connectedness*), *11*, 15

Zusammenhang (*connectivity*), *12*, 11–14, 61–90
2-Zusammenhang, 61–64, 87, 97, 103, 226, 237
3-Zusammenhang, 64–69, 87, 88, 98, 105, 107, 110, 112, 117, 225, 227
4-Zusammenhang, 119, 226, 227, 234
äußerer Zusammenhang, 286
und chromatische Zahl, 127
und Darstellung in der Ebene, 105
und ebenes Dual, 118, 119
und Durchschnittsgrad, 13
und Hamiltonkreise, 233–234, 248
und Kantenzusammenhang, 13, 87
Minoren erzwingend (in unendlichen Graphen), 299
und Minimalgrad, 13
und Paarungen, 58
Ramseysätze bei gegebenem, 224–227
durch Spannbäume, 52, 60
und Taillenweite, 258
und Umfang, 88
und Verbundenheit, 78–79, 89, 90
eines Zufallsgraphen, 260
zusammenhängend (*connected*), *11*
k-zusammenhängend, *12*, 13, 74, 88
und Eckenaufzählung, 11, 15
minimal, 15
minimal k-zusammenhängend, *89*–90
stark zusammenhängend (in gerichteten Graphen), *34*
Zufallsgraph, 271
Zusammenkleben, *138*, 188, 189, 201, 286, 298
zweites Moment, *265*, 264–270
zwischen (*between*), *7*, *92*
Zyklenraum (*cycle space*), *25*–30, 35, 66–69, 111–112, 115, 118, 120, 309
zyklomatische Zahl (*cyclomatic number*), *25*
Zyklus, *25*
Zykov, A.A., 202

Englisch-deutscher Index

Dieser Index enthält die gebräuchlichsten englischen Wörter all derjenigen Begriffe, die im Text definiert sind – zusammen mit ihrer deutschen Entsprechung und der Textstelle der Definition.

acyclic (kreislos), 15
adjacency matrix (Adjazenzmatrix), 30
adjacent (benachbart), 3
almost all/every/no (fast alle/jeder/kein), 259
alternating (alternierend), 38, 71
antichain (Antikette), 56
arboricity (Arborizität), 54
arc (gerichtete Kante oder injektiver topologischer Weg)
articulation point (Artikulation), 12
augmenting path (Verbesserungsweg), 38
automorphism (Automorphismus), 3
average degree (Durchschnittsgrad), 5
balanced (ausgewogen), 58, 270
biconnected (2-zusammenhängend), 61
bipartite (bipartit), 18
block (Block), 62
  (-cutvertex) graph (Block-Graph), 64
bond (Minimalschnitt), 27
  space (Schnittraum), 27
boundary (Rand), 97
bramble (Netz), 282
  number (Vernetzungsgrad), 285
branch set (Verzweigungsmenge), 20
branch vertex (Verzweigungsecke), 22
bridge (Brücke), 12
capacity (Kapazität), 154
centre (zentrale Ecke; insbes. Zentrum eines Sterns), 9, 18
chain (Kette), 16, 56
choice number (listenchromatische Zahl), 132
k-choosable (*k*-listenfärbbar), 132
chord (Sehne), 8
chordal (chordal), 138
chromatic (chromatisch), 121
  index (Index), 122
  number (Zahl), 121
  polynomial (Polynom), 146
circuit (Kreis; geschlossener Kantenzug ohne Kantenwiederholung), 8
circulation (Rundfluss), 152
circumference (Umfang), 8
claw ($K_{1,3}$-Untergraph), 18
clique (K^n-Teilgraph, evtl. maximal), 3, 137
  number (Cliquenzahl), 137
closed walk (geschlossener Kantenzug), 11
colour class (Farbklasse), 124
colour-critical (kritisch), 145
colouring (Färbung), 121
  number (Reihenzahl), 124
comparability graph (Vergleichbarkeitsgraph), 148
complement (Komplement), 4

complete (vollständig)
  bipartite (bipartit), 18
  graph (Graph), 3
  matching (Paarung der ganzen Eckenmenge), 37
  multipartite (multipartit), 18
  r-partite (*r*-partit), 18
complexity (Komplexität), 295
component (Komponente), 11
k-connected (*k*-zusammenhängend), 12
connectedness (die Eigenschaft, zusammenhängend zu sein), 11
connectivity (Zusammenhang), 12
k-constructible (*k*-konstruierbar), 128
contraction (Kontraktion), 20
cover (Überdeckung)
critical (kritisch), 145
k-cube (*k*-dimensionaler Würfel), 32
cubic (kubisch), 5
cuff (Randkreis), 290
cut (Schnitt), 26, 154
  space (Schnittraum), 27
  -set (trennende Menge), 11–12
  -vertex (Artikulation), 12
cycle (Kreis; Zyklus), 8; 25
  double cover (doppelte Kreisüberdeckung), 174
  space (Zyklenraum), 25
cyclomatic number (zyklomatische Zahl), 25
decomposition (Zerlegung), 54
  tree (Zerlegungsbaum)
k-degenerate (ohne Teilgraph vom Minimalgrad $> k$), 124–125
degree (Grad), 5
  sequence (Gradsequenz), 235
delete (löschen), 4
density (Dichte), 178, 191
depth-first search tree (Tiefensuchbaum), 17
diameter (Durchmesser), 9
digon (Doppelkante), 31
digraph (gerichteter Graph), 30
directed (gerichtet), 30
disconnected (unzusammenhängend), 11
disconnect (trennen), 11
disjoint (disjunkt), 3
distance (Abstand), 9
double edge (Doppelkante), 31
double wheel (Doppelrad), 225
down-closure (Abschluss nach unten), 16
drawing (Zeichnung), 101
dual (dual), 113, 115
edge (Kante), 2
  k-edge-choosable (aus Listen von je *k* Farben stets kantenfärbbar), 132
  -chromatic number (kantenchromatische Zahl), 122
  colouring (Kantenfärbung), 122
  ℓ-edge-connected (*ℓ*-kantenzusammenhängend), 12
  -connectivity (Kantenzusammenhang), 12
  cover (Kantenüberdeckung), 148
  cut (Schnitt), 26
  density (Kantendichte), 178
  independence number (größte Mächtigkeit einer Paarung), 39
  -maximal (kantenmaximal), 4
  space (Kantenraum), 25
embedding (Einbettung), 22, 101
empty graph (leerer Graph), 2
endblock (Blatt des Block-Graphen), 64
end (-vertex) (Endecke), 2
excluded minor (verbotener Minor), 287
exterior face/region (Außengebiet), 95
extremal (extremal), 178
face (Gebiet), 95
facial cycle (Gebietsrand), 111
k-factor (*k*-Faktor), 37
factor-critical (faktorkritisch), 46
fan (Fächer), 74
flow (Fluss), 154
  number (Flusszahl), 159
  polynomial (Flusspolynom), 159
forbidden (subgraph, minor etc.) (verboten), 177, 287
forcibly hamiltonian sequence (hamiltonsches Tupel), 235
forest (Wald), 14
four-colour theorem (Vierfarbensatz), 122
frontier (Rand einer Punktmenge), 92
fundamental (Fundamental-)
  cut (-schnitt), 28
  cycle (-kreis), 28
genus (Geschlecht), 299
geodesic (geodätisch), 35
geometric dual (topologisches Dual), 113
girth (Taillenweite), 8
graph (Graph), 2, 32
graphic sequence (Gradsequenz irgendeines Graphen), 235
grid (Gitter), 283
Hamilton (Hamilton-)
  cycle (-kreis), 231

path (-weg), 231
hamiltonian (hamiltonsch), 231
head (Endecke ter(e)), 30
hereditary (erblich), 288
homeomorphic graphs (Graphen mit isomorphen Unterteilungen), 21
homomorphism (adjazenzerhaltene Eckenabbildung, Homomorphismus), 3
hypergraph (Hypergraph), 30
incidence matrix (Inzidenzmatrix), 30
incident (inzident), 2
independence number (Unabhängigkeitszahl), 137
independent
paths (kreuzungsfreie Wege), 7–8
vertices/edges (unabhängige Ecken/Kanten), 3
indicator random variable (charakteristische Zufallsgröße), 255
induced (induziert), 3
subgraph (Untergraph), 3–4
initial vertex (Anfangsecke), 30
integral flow (ganzzahliger Fluss), 154
interior (im Innern), 7, 92
internal (im Innern), 7
internally disjoint (kreuzungsfrei), 7–8
intersection (Schnitt), 3
graph (Schnittgraph), 298
interval graph (Intervallgraph), 148
invariant (Invariante), 3
irreducible (irreduzibel), 298
isolated vertex (isolierte Ecke), 5
isomorphic (isomorph), 3
isomorphism (Isomorphismus), 3
isthmus (Brücke), 12
join
operation $*$ ($*$-Produkt), 4
vertices (verbinden), 2
kernel (Kern), 135
leaf (Blatt), 14
lean (schlank), 285
length (Länge), 7
level (Schicht), 16
line (Kante), 2
graph (Kantengraph), 4
link (einfache Kante eines Multigraphen), 31
k-linked (k-verbunden), 77
list (Liste), 132
-chromatic index (listenchromatischer Index), 132
colouring (Listenfärbung), 132
loop (Schlinge), 30
map (Landkarte), 121
marriage condition (Heiratsbedingung), 40
match (paaren), 37
matching (Paarung), 37
number (größte Mächtigkeit einer Paarung), 38
maximal (maximal, meist bzgl. $\subseteq$), 4
maximum (zahlenmäßig maximal), 4
minimal (minimal, meist bzgl. $\subseteq$), 4
minimum (zahlenmäßig minimal), 4
minor (Minor), 21
-closed (erblich), 288
monochromatic (einfarbig), 208, 213
monotone/monotonic (monoton), 262
multigraph (Multigraph), 31
multiple edge (Mehrfachkante), 30
multiplicity (Vielfachheit)
neighbour (Nachbar), 3
network (Netzwerk), 153
node (Knoten, Ecke), 2
nowhere-zero (nirgends null), 157
null (leer), 2
obstruction (Hindernis)
octahedron (Oktaeder), 12
order (Ordnung), 2
orientation (Orientierung), 30–31
packing (Packung), 37
parallel edges (parallele Kanten), 30
r-partite (r-partit), 18
partition (Partition; Zerlegung), 1; 54
path (Weg), 7
cover (Wegüberdeckung), 55
-decomposition (Wegzerlegung), 290
-width (Wegbreite), 298
perfect
graph (perfekter Graph), 137
matching (Paarung der ganzen Eckenmenge), 37
planar (plättbar), 106
embedding (Einbettung in die Ebene), 101
plane (eben), 94, 113
triangulation (ebener Dreiecksgraph), 98
point (Ecke), 2
polygon (Polygon), 92
polygonal arc (Polygonzug), 92
power (Potenz), 237
projective plane (projektive Ebene), 301
property (Eigenschaft), 3, 259
quasi-ordering (Quasiordnung), 276
radius (Radius), 9

Ramsey number (Ramseyzahl), 207, 210
random
  graph (Zufallsgraph), 251
  variable (Zufallsgröße), 253
  walk (Irrfahrt), 36
reducible (reduzierbar), 149
region (Gebiet), 92
regular (regulär), 5
regularity graph (Regularitätsgraph), 193–194
rigid-circuit (chordal), 138
root (Wurzel), 15
rooted tree (Wurzelbaum), 15
saturated (kantenmaximal), 4
segment of a path (Teilweg), 7
separable (eine Artikulation enthaltend, separabel), 12
separate (trennen), 11, 92
separation (Teilung), 12
separator (Trenner), 11
sequential colouring algorithm (Greedy-Algorithmus), 124
set system (Hypergraph), 30
simple (schlicht)
  basis (Basis), 111
  graph (Graph), 32
size (Größe, Kantenzahl), 2
spanned (aufgespannt), 4
spanning (aufspannend), 3–4
  tree (Spannbaum), 15
sparse (mager), 177
stability number (Stabilitätszahl), 137
stable (stabil), 3, 42
star (Stern), 18
subcontraction (Minor), 21
subdivision (Unterteilung), 21
subgraph (Teilgraph), 3
supergraph (Obergraph), 3
tail (Anfangsecke init(e)), 30
terminal vertex (Endecke ter(e)), 30
threshold function (Schwellenfunktion), 262
topological G (Unterteilung von G), 21
topological minor (topologischer Minor), 21
total chromatic number (Totalfärbungszahl), 147
total colouring (Totalfärbung), 147
tough (robust), 234
tournament (Turnier), 246
trail (Kantenzug ohne Kantenwiederholung), 11
transitive (transitiv), 58
travelling salesman (Handelsreisender), 247
tree (Baum), 14
  -decomposition (Baumzerlegung), 279
  -width (Baumweite), 282
triangle (Dreieck), 3
triangulated (trianguliert), 138
triangulation (Triangulierung)
  plane triangulation (ebener Dreiecksgraph), 98
union (Vereinigung), 3
unmatched (ungepaart), 37
up-closure (Abschluss nach oben), 16
valence/valency (Valenz), 5
value of a flow (Flussstärke), 155
vertex (Ecke), 2
  colouring (Eckenfärbung), 121
  cover (Eckenüberdeckung), 39
  cut (trennende Eckenmenge), 11–12
  space (Eckenraum), 24
  -transitive (eckentransitiv), 58
vortex (Strudel), 299
walk (Kantenzug), 11
well-quasi-ordering (Wohlquasiordnung), 276
wheel (Rad), 66
width (Weite), 282
  of a path-decomposition (Breite), 290

Symbolverzeichnis

Die Einträge sind grob nach typographischen Gesichtspunkten gruppiert. Auf der ersten Seite finden sich reine Zeichen, lose nach Funktion geordnet; die auftretenden Buchstaben sind hier lediglich Variablen. Der Eintrag „[ ]“ beispielsweise verweist ebenso auf induzierte Teilgraphen $H[U]$ wie auf Gebietsränder $G[f]$. Auf der zweiten Seite sind die Symbole aufgelistet, die Buchstaben enthalten, innerhalb jeder typographischen Gruppe alphabetisch. Als Variablen auftretende weitere Buchstaben werden von der alphabetischen Sortierung ignoriert.

$\emptyset$ 2
$=$ 3
$\simeq$ 3
$\subseteq$ 3
$\not\asymp$ $\not\preccurlyeq$ 278
$\not\asymp$ 21

$+$ 4, 25, 157
$-$ 4, 95, 157
$\in$ 2
$/$ 95
$\bigcup$ 1
$\cup, \cap$ 3
$*$ 4

$\lfloor\ \rfloor$ 1, 16
$\lceil\ \rceil$ 1, 16
$|\ |$ 2, 155
$\|\ \|$ 2, 191
$[\ ]$ 3, 95, 97
$[\ ]^k$, $[\ ]^{<\omega}$ 1, 276

$\langle\ ,\ \rangle$ 25
$/$ 20, 32
$\mathcal{C}^\perp,\ \mathcal{F}^\perp, \ldots$ 25
$\overline{0},\ \overline{1},\ \overline{2}, \ldots$ 1
$(n)_k, \ldots$ 255
$E(v),\ E'(w), \ldots$ 2
$E(X,Y),\ E'(U,W), \ldots$ 2
$(e,x,y), \ldots$ 152
$\vec{E},\ \vec{F},\ \vec{C}, \ldots$ 152, 165, 167
$\overleftarrow{e},\ \overleftarrow{E},\ \overleftarrow{F}, \ldots$ 152
$f(X,Y),\ g(U,W), \ldots$ 153
$G^*,\ F^*,\ \vec{e}^*, \ldots$ 114, 166
$G^2,\ H^3, \ldots$ 237
$\overline{G},\ \overline{X},\ \overline{\mathcal{P}}, \ldots$ 4, 152, 288
$(S,\overline{S}), \ldots$ 154
$xy,\ x_1 \ldots x_k, \ldots$ 2, 7, 8
$xP,\ Px,\ xPy,\ xPyQz, \ldots$ 7
$\mathring{P},\ \mathring{x}Q, \ldots$ 7, 92
$xTy, \ldots$ 15

$\mathbb{F}_2$	24
$\mathbb{N}$	1
$\mathbb{Z}_n$	1
$\mathcal{C}_G$	44
$\mathcal{C}(G)$	25
$\mathcal{C}^*(G)$	27
$\mathcal{E}(G)$	25
$\mathcal{G}(n,p)$	250
$\mathcal{K}_{\mathcal{P}},\ \mathcal{K}_{\mathcal{P}(S)}$	292, 293
$\mathcal{P}_H$	266
$\mathcal{P}_{i,j}$	259
$\mathcal{V}(G)$	24
C^k	8
$E(G)$	2
$E(X)$	253
$F(G)$	95
$\mathrm{Forb}_{\preccurlyeq}$	287
$G(H_1,H_2)$	215
K^n	3
$K_{n_1,\ldots,n_r}$	18
K_s^r	18
$L(G)$	4
MX	20
$N(v),\ N(U)$	5
$N^+(v)$	135
P	251
P^k	7
P_G	146
$R(H)$	210
$R(H_1,H_2)$	210
$R(k,c,r)$	210
R_s	194
S^n	94
TX	21
$T^{r-1}(n)$	180
$V(G)$	2
$\mathrm{ch}(G)$	132
$\mathrm{ch}'(G)$	132
$\mathrm{col}(G)$	124
$d(G)$	5
$d(v)$	5
$d^+(v)$	135
$d_G(x,y)$	9
$d(X,Y)$	191
$\mathrm{diam}\,(G)$	9
$\mathrm{ex}(n,H)$	179
$f^*(v)$	114
$g(G)$	8
$\overline{i}$	1
$\mathrm{init}(e)$	30
$\log,\ \ln$	1
$\mathrm{pw}(G)$	298
$q(G)$	44
$\mathrm{rad}\,(G)$	9
$t_{r-1}(n)$	180
$\mathrm{ter}(e)$	30
$\mathrm{tw}(G)$	282
$v_e,\ v_{xy},\ v_U$	20
$v^*(f)$	114
$\Delta(G)$	5
$\alpha(G)$	137
$\delta(G)$	5
$\varepsilon(G),\ \varepsilon'(G)$	5, 267
$\kappa(G)$	12
$\kappa_G(H)$	76
$\lambda(G)$	12
$\lambda_G(H)$	76
μ	265
$\pi\colon S^2 \setminus \{(0,0,1)\} \to \mathbb{R}^2$	94
$\sigma_k\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_k$	159
σ^2	265
$\varphi(G)$	159
$\chi(G)$	121, 293
$\chi'(G)$	122
$\chi''(G)$	147
$\omega(G)$	137

Reinhard Diestel (*1959) promovierte 1986 bei B. Bollobás an der Universität Cambridge, als Stipendiat und Knight-Preisträger des Trinity-College. Als Fellow von St. John's College blieb er bis 1989 in Cambridge und habilitierte sich während dieser Zeit (1987) in Hamburg. Nach Forschungsaufenthalten in den USA und in Bielefeld verbrachte er das Jahr 1993-94 als Heisenbergstipendiat in Oxford und wurde anschließend Professor für Mathematik an der TU Chemnitz. Seit 1999 lehrt er an der Universität Hamburg.

Reinhard Diestels Hauptforschungsgebiet ist die endliche und unendliche Graphentheorie; er veröffentlichte zahlreiche Artikel und eine Monographie, *Graph Decompositions* (1990).