ISSN 1472-2739 (on-line) 1472-2747 (printed) **519**

Algebraic & Geometric Topology
Volume 2 (2002) 519–536
Published: 28 June 2002

Morphismes injectifs entre groupes d'Artin-Tits

Eddy Godelle

Abstract We construct a family of morphisms between Artin-Tits groups which generalise the ones constructed by J. Crisp in [9]. We show that their restrictions to the positive Artin monoids respect normal forms, and that for Artin-Tits groups of type FC, these morphisms are injective. The proof of the second result uses the Deligne Complex, and the normal cube paths constructed in [14] and [6].

Résumé On construit une classe de morphismes entre groupes d'Artin-Tits qui généralise celle construite par J. Crisp dans [9]. On montre que leurs restrictions aux monoïdes respectent les formes normales, et que pour les groupes d'Artin-Tits de type FC ces morphismes sont injectifs. La démonstration du second résultat utilise le complexe de Deligne et les chemins cubiques normaux construits dans [14] et [6].

AMS Classification 20F36; 20F32,57M07

Keywords Artin-Tits groups, injective morphisms, cubical CAT(0) complex

Introduction

Soit S un ensemble fini et $M = (m_{s,t})_{s,t\in S}$ une matrice symétrique à coefficients dans $\mathbb{N} \cup \{\infty\} - \{0\}$ telle que $m_{s,s} = 1$ pour tout s de S et $m_{s,t} \neq 1$ pour $s \neq t$ dans S. On note A_S le groupe engendré par S et les relations, dites "de tresses", $\underbrace{sts\cdots}_{m_{s,t}\ termes} = \underbrace{tst\cdots}_{m_{s,t}\ termes}$ pour tout couple (s,t) d'éléments distincts de S tels que $m_{s,t} \neq \infty$:

$$A_S = \langle S|\ \underbrace{sts\cdots}_{m_{s,t}\ termes} = \underbrace{tst\cdots}_{m_{s,t}\ termes}\ ;\ \forall s,t \in S, s\neq t\ et\ m_{s,t} \neq \infty\rangle.$$

La paire (A_S, S) s'appelle un système d'Artin-Tits et A_S un groupe d'Artin-Tits (relativement à S). On note A_S^+ le sous-monoïde de A_S engendré par S. Ce monoïde A_S^+ possède la même présentation que A_S mais en tant que monoïde ([15]). Puisque les relations de tresses sont homogènes, A_S^+ est naturellement muni d'une fonction longueur ℓ compatible au produit. On appelle graphe de S et M, noté Γ_S, le graphe étiqueté dont l'ensemble des sommets est S et dont les arêtes sont les paires $\{s,t\}$ d'éléments distincts de S telles que $m_{s,t} \neq 2$, que l'on étiquette par $m_{s,t}$.

On appelle sous-groupe parabolique standard tout sous-groupe de A_S engendré par une partie T de S; on note A_T un tel sous-groupe. Van der Lek a prouvé dans [17] que pour toute partie T de S, la paire (A_T, T) est un système d'Artin-Tits pour la matrice $(m_{s,t})_{s,t\in T}$. Un sous-groupe parabolique de A_S est un sous-groupe de A_S conjugué à un sous-groupe parabolique standard de A_S.

Lorsque ce graphe est connexe, on dit que S est indécomposable. Lorsque l'on ajoute à la présentation de A_S les relations $s^2 = 1$ pour $s \in S$, on obtient un groupe de Coxeter W_S. On dit que A_S (ou S par abus) est de type sphérique lorsque son groupe de Coxeter associé est fini.

Si u et v sont dans A_S^+, on notera $u \prec v$ (resp. $v \succ u$) pour dire que u divise v à gauche (resp. à droite); on notera $u \wedge_\prec v$ (resp. $v \wedge_\succ u$) leur pgcd relativement à $\prec$ (resp. $\succ$) et $u \vee_\prec v$ (resp. $v \vee_\succ u$) leur ppcm relativement à $\prec$ (resp. $\succ$) s'il existe; s'il n'existe pas, on pose $u \vee_\prec v = \infty$ (resp. $v \vee_\succ u = \infty$). Pour $m \in \mathbb{N}$, on désignera par $[u,v\rangle^m$ le produit $\underbrace{uvu\cdots}_{m\ termes}$. Ainsi les relations de tresses s'écrivent $[s,t\rangle^{m_{s,t}} = [t,s\rangle^{m_{s,t}}$.

Rappelons le résultat classique suivant démontré par Brieskorn et Saito dans [3] : un groupe d'Artin-Tits A_S est de type sphérique si et seulement si le ppcm de S à gauche existe; dans ce cas, le ppcm à droite existe aussi et est égal au ppcm à gauche. On note Δ_S ou simplement Δ cet élément.

Définition 0.1 Soit A_S et $A_{S'}$ deux groupes d'Artin-Tits et soit p une application de S dans $\mathcal{P}(S') - \{\emptyset\}$, les parties non vides de S', telle que

(L0) si $s \neq t \in S$ alors $p(s)$ et $p(t)$ sont disjointes;

(L1) pour $s \in S$, $p(s)$ est de type sphérique;

(L2) si $s \neq t \in S$ avec $m_{s,t} \neq \infty$, on a

$$[\Delta_{p(s)}, \Delta_{p(t)}\rangle^{m_{s,t}} = [\Delta_{p(t)}, \Delta_{p(s)}\rangle^{m_{s,t}} = \Delta_{p(s)} \vee_\prec \Delta_{p(t)} \text{ dans } A_{S'}^+$$

(L3) si $s \neq t \in S$ avec $m_{s,t} = \infty$, alors

$$\begin{cases} \forall u \in p(s),\ \{u\} \cup p(t) \text{ n'est pas de type sphérique,} \\ \forall u \in p(t),\ \{u\} \cup p(s) \text{ n'est pas de type sphérique.} \end{cases}$$

On peut alors définir homomorphisme φ_p de A_S dans $A_{S'}$ par $\varphi_p(s) = \Delta_{p(s)}$ pour $s \in S$. Un morphisme provenant d'une telle construction sera appelé un LCM-homomorphisme.

Par rapport à la définition 2.1 de [9], on a ajouté la condition **(L3)** qui autorise les liaisons infinies. Notons aussi que la définition 2.1 de [9] est donnée dans le cadre des monoïdes (voir la definition 1.4 ci-dessous) ce qui est équivalent. La proposition suivante généralise la proposition 2.3 de [9]; voir également le théorème 14 de [10] pour le cas "symétrique".

Proposition 0.2 *Soit $\varphi_p : A_S \to A_{S'}$ un LCM-homomorphisme. Alors φ_p induit un homomorphisme injectif $\varphi_{p,W} : W_S \to W_{S'}$.*

Ce résultat nous permet, comme dans [9], de voir les LCM-homomorphismes comme des applications entre groupes fondamentaux induites par des applications simpliciales injectives (*cf.* proposition 2.13).

Définition 0.3 [8] On dit qu'un groupe d'Artin-Tits A_S est de type FC si et seulement si la condition ci-dessous est vérifiée pour toute partie T de S:

$$\forall s, t \in T,\ m_{s,t} \neq \infty \Rightarrow A_T \text{ est de type sphérique.}$$

L'un des deux résultats principaux de cette note est le suivant:

Théorème 0.4 *Soit (A_S, S) et $(A_{S'}, S')$ deux systèmes d'Artin-Tits de type FC et $\varphi_p : A_S \to A_{S'}$ un LCM-homomorphisme. Alors φ_p est injective.*

Dans [10], Crisp prouve que le sous-groupe des points fixes d'un groupe d'Artin-Tits de type FC sous l'action d'un groupe de symétries de son graphe est aussi un groupe d'Artin-Tits de type FC. Il est assez facile de voir que le morphisme construit par Crisp pour la preuve de son résultat vérifie les axiomes de la définition 0.1 et est donc un LCM-homomorphisme. Le théorème 0.4 peut donc être vu comme une généralisation du résultat de Crisp relatif à l'injectivité.

Lemme 0.5 *Soit (A_S, S) un système d'Artin-Tits, soit W_S son groupe de Coxeter associé et $i : A_S \to W_S$ la surjection canonique. Si w est dans W_S, alors $i^{-1}(w) \cap A_S^+$ possède un unique représentant $Sec(w)$ de longueur minimale. On peut ainsi définir une section ensembliste de i, notée Sec dont l'image notée $A_{S,red}$ est dans A_S^+. Ses éléments sont caractérisés par le fait qu'aucune de leurs écritures dans A_S^+ ne fait apparaître de carrés d'un élément de S.*

Cette section ensembliste est construite grâce au lemme d'échange (voir [1] chapitre 4). Lorsque A_S est de type sphérique, alors Δ_S est l'image par cette section de l'élément de plus grande longueur de W_S. Les éléments de $A_{S,red}$ seront dit réduits ou encore minimaux. La dernière assertion du lemme implique en particulier que $A_{S,red}$ est stable par division à gauche et à droite.

Lemme 0.6 [3, 12, 13] *Soit (A_S, S) un système d'Artin-Tits. Pour tout élément g de A_S^+, l'ensemble $\{h \in A_{S,red} | h \prec g\}$ possède un plus grand élément $\alpha(g)$ pour la division à gauche. De plus pour g_1, g_2 dans A_S^+, on a $\alpha(g_1 g_2) = \alpha(g_1 \alpha(g_2))$.*

Cette fonction α permet de définir une forme normale sur A_S^+: on dira que la suite $(g_1, \cdots, g_n)$ est la forme normale de $g \in A_S^+$ si $g = g_1 \cdots g_n$ oú aucun g_i ne vaut 1 et $g_i = \alpha(g_i \cdots g_n)$ pour tout i; cette décomposition est unique d'après le lemme ci-dessus.

Si $\varphi_p : A_S \to A_{S'}$ est un LCM-homormorphisme alors l'image par φ d'un élément de A_S^+ est dans $A_{S'}^+$. Le second résultat que nous allons prouver est le suivant:

Théorème 0.7 *Soit $\varphi_p : A_S \to A_{S'}$ un LCM-homomorphisme homomorphisme. Alors φ_p est compatible avec la forme normale: si $(g_1, \cdots, g_n)$ est la forme normale de $g \in A_S^+$ alors $(\varphi_p(g_1), \cdots, \varphi_p(g_n))$ est la forme normale de $\varphi_p(g)$.*

Nous montrerons en fait ce résultat pour une famille un peu plus large de morphismes .

Dans la première partie nous rappelons les résultats utiles sur les groupes d'Artin-Tits et nous introduisons la notion de lcm-homomorphisme; celle-ci généralise celle de LCM-homomorphisme. La seconde partie est consacrée aux preuves de la proposition 0.2 et du théorème 0.7. Enfin dans la dernière partie, nous introduisons le complexe de Deligne et nous prouvons le théorème 0.4.

1 Généralités

1.1 Monoïdes d'Artin-Tits

Lemme 1.1 [3] *Soit (A_S, S) un système d'Artin-Tits.*

(i) A_S^+ *est simplifiable, c'est à dire que si* a, b, e_1, e_2 *sont dans* A_S^+ *et* $ae_1b = ae_2b$ *alors,* $e_1 = e_2$.

(ii) *Toute partie finie de* A_S^+ *possède un* pgcd *à gauche (et à droite).*

(iii) *Une partie finie de* A_S^+ *possède un* ppcm *à droite (resp. à gauche) si et seulement si elle possède un multiple commun à droite (resp. à gauche).*

1.2 Groupes d'Artin-Tits

Lemme 1.2 ([4] théorème 2.6 et [5] lemme 4.4) *Soit* (A_S, S) *un système d'Artin-Tits de type sphérique. Si* $g \in A_S$ *alors il existe* a, b *dans* A_S^+ *uniques premiers entre eux à gauche (noté* $a \perp_{\prec} b$*) tels que* $g = a^{-1}b$. *De plus si* $c \in A_S^+$ *tel que* $cg \in A_S^+$ *alors* $c \succ a$.

Nous appellerons la décomposition $g = a^{-1}b$ l'écriture normale (à gauche) de g. On peut définir de la même façon une écriture normale à droite.

Lemme 1.3 ([17] théorème 4.13) *Soit* (A_S, S) *un système d'Artin-Tits associé à la matrice de Coxeter* $M = (m_{s,t})_{s,t\in S}$. *Soit* T *une partie de* S *et* A_T *le sous-groupe de* A_S *engendré par* T. *Alors* (A_T, T) *est un système d'Artin-Tits associé à la matrice* $(m_{s,t})_{s,t\in T}$. *De plus, si* T' *est une autre partie de* S, *on a* $A_T \cap A_{T'} = A_{T\cap T'}$.

1.3 lcm-homomorphismes

Définition 1.4 ([9] définition 1.1) Soit A_S et $A_{S'}$ deux groupes d'Artin-Tits. Si $\varphi : A_S \to A_{S'}$ est un homomorphisme tel que $\varphi(A_S^+) \subset A_{S'}^+$, on note φ^+ la restriction de φ à A_S^+ et $A_{S'}^+$. On dit que φ^+ (ou φ) respecte les ppcm si

(1) $\forall s \in S$, $\varphi^+(s) \neq 1$ et,

(2) $\forall s, t \in S$ on a $\varphi^+(s) \vee_{\prec} \varphi^+(t) = \varphi^+(s \vee_{\prec} t)$;

avec la convention $\varphi(\infty) = \infty$.

Sous ces hypothèses, on dira que φ est un "lcm-homomorphisme".

Proposition 1.5 ([9] lemme 1.2 et Théorème 1.3) *Soit* $\varphi : A_S \to A_{S'}$ *un* lcm*-homomorphisme et* U, V *dans* A_S^+*; alors* $\varphi^+(U) \prec \varphi^+(V)$ *si et seulement si* $U \prec V$. *En particulier* φ^+ *est injective.*

L'injectivité peut aussi être vu comme un cas particulier de la proposition 5.4 de [11] sur les morphismes entre groupes munis de présentations complémentées noethériennes et cohérentes.

Question 1 Un lcm-homomorphisme $\varphi : A_S \to A_{S'}$ est-il toujours injectif?

2 LCM-homomorphismes

Dans [9] on définit une sous-famille de lcm-homomorphismes, appelés *LCM-homomorphismes*; ceux-ci possèdent une réalisation géométrique naturelle. Cette définition suppose que le graphe de S soit sans liaisons infinies. Nous allons étendre cette définition et montrer que le lemme clef 2.2 de [9] est encore vrai. La construction géométrique est identique à la construction de [9].

Commençons par rappeler la définition d'un LCM-homomorphisme.

Définition 2.1 Soit (A_S, S) et $(A_{S'}, S')$ deux systèmes d'Artin-Tits et soit p une application de S dans $\mathcal{P}(S') - \{\emptyset\}$, les parties non vides de S', telle que

(L0) si $s \neq t \in S$ alors $p(s)$ et $p(t)$ sont disjointes;

(L1) pour $s \in S$, $p(s)$ est de type sphérique;

(L2) si $s \neq t \in S$ avec $m_{s,t} \neq \infty$, on a

$$[\Delta_{p(s)}, \Delta_{p(t)}\rangle^{m_{s,t}} = [\Delta_{p(t)}, \Delta_{p(s)}\rangle^{m_{s,t}} = \Delta_{p(s)} \vee_{\prec} \Delta_{p(t)} \text{ dans } A^+_{S'}$$

(L3) si $s \neq t \in S$ avec $m_{s,t} = \infty$, alors

$$\begin{cases} \forall u \in p(s),\ \{u\} \cup p(t) \text{ n'est pas de type sphérique,} \\ \forall u \in p(t),\ \{u\} \cup p(s) \text{ n'est pas de type sphérique.} \end{cases}$$

On peut alors définir un lcm-homomorphisme φ_p de A_S dans $A_{S'}$ par $\varphi_p(s) = \Delta_{p(s)}$ pour $s \in S$. Un morphisme provenant d'une telle construction sera appelé un LCM-homomorphisme.

À la place de l'axiome **(L3)**, on aurait pu se contenter, pour obtenir un lcm-homomorphisme, de l'axiome plus faible suivant:

(L3′) si $s, t \in S$ et $m_{s,t} = \infty$, alors $p(s) \cup p(t)$ n'est pas de type sphérique

mais l'axiome **(L3)** a pour objectif de prouver la proposition 2.6.

Puisqu'un LCM-homomorphisme est un lcm-homomorphisme, on a le résultat suivant:

Lemme 2.2 *Soit (A_S, S) et $(A_{S'}, S')$ deux systèmes d'Artin-Tits et φ_p un LCM-homomorphisme; alors φ_p^+ est injective de A_S^+ dans $A_{S'}^+$.*

Nous suivons dans la suite de cette partie le plan de [9]. Nous commençons par rappeler deux lemmes techniques et par en démontrer un troisième; ceux-ci vont nous servir établir la proposition 2.6.

Lemme 2.3 [3, 10] *Soit (A_S, S) un système d'Artin-Tits et $T \subset S$. Soit $t \in T$, $w \in A_T^+$ et $x \in A_S^+$. Si $t \not\prec w$ mais $t \prec wx$ alors il existe $s \in T$ tel que $s \prec x$.*

Lemme 2.4 ([3] lemme 3.4) *Soit (A_S, S) un système d'Artin-Tits, soit $x \in A_{S,red}$ et $s \in S$; si $sx \notin A_{S,red}$ alors $s \prec x$.*

Ce lemme est une version du lemme d'échange.

Lemme 2.5 *Soit (A_S, S) et $(A_{S'}, S')$ deux systèmes d'Artin-Tits et φ_p un LCM-homomorphisme. Soit $s, t \in S$ et $k \in \mathbb{N}$. Alors*

$$[\varphi_p^+(s), \varphi_p^+(t)\rangle^k \text{ n'est pas réduit} \Rightarrow m_{s,t} \neq \infty \text{ et } k > m_{s,t}.$$

Preuve Montrons cette implication par contraposée.

Si $m_{s,t} \neq \infty$ et $k \leq m_{s,t}$ alors $[\varphi_p^+(s), \varphi_p^+(t)\rangle^k$ divise $[\varphi_p^+(s), \varphi_p^+(t)\rangle^{m_{s,t}}$; or $[\varphi_p^+(s), \varphi_p^+(t)\rangle^{m_{s,t}} = \Delta_{p(s)\cup p(t)}$ par l'axiome **(L2)** et est ainsi réduit (cf. la remarque qui suit le lemme 0.5), donc $[\varphi_p^+(s), \varphi_p^+(t)\rangle^k$ est réduit. Supposons maintenant $m_{s,t} = \infty$ et montrons, par récurrence sur k, que $[\varphi_p^+(s), \varphi_p^+(t)\rangle^k$ et $[\varphi_p^+(t), \varphi_p^+(s)\rangle^k$ sont réduit pour tout k. Si $k = 0$ ou $k = 1$ c'est clair; supposons donc $k \geq 2$ et que $[\varphi_p^+(s), \varphi_p^+(t)\rangle^k$ n'est pas réduit. Par hypothèse de récurrence $[\varphi_p^+(t), \varphi_p^+(s)\rangle^{k-1}$ est réduit; donc il existe $C, D \in A_{p(s)}^+$ et $u \in p(s)$ tels que l'on a $CuD = \varphi_p^+(s)$ avec $D[\varphi_p^+(t), \varphi_p^+(s)\rangle^{k-1}$ réduit et $uD[\varphi_p^+(t), \varphi_p^+(s)\rangle^{k-1}$ qui ne l'est pas. D'après le lemme 2.4, on a alors $u \prec D[\varphi_p^+(t), \varphi_p^+(s)\rangle^{k-1}$; d'autre part, $\varphi_p^+(s)$ est réduit, donc uD l'est aussi et $u \not\prec D$. Par le lemme 2.3 appliqué avec $T = p(s)$, $w = D$ et $x = [\varphi_p^+(t), \varphi_p^+(s)\rangle^{k-1}$, il existe $v \in p(s)$ qui divise $[\varphi_p^+(t), \varphi_p^+(s)\rangle^{k-1}$ pour $\prec$. Mais ceci implique que $v \vee_\prec \Delta_{p(t)}$ existe et donc que $\{v\} \cup p(t)$ est de type sphérique; ce qui contredit l'axiome **(L3)**. Donc $[\varphi_p^+(s), \varphi_p^+(t)\rangle^k$ est réduit. Par symétrie, on a aussi que $[\varphi_p^+(t), \varphi_p^+(s)\rangle^k$ est réduit. □

Proposition 2.6 *Soit A_S et $A_{S'}$ deux groupes d'Artin-Tits et φ_p un LCM-homomorphisme. Alors la restriction de φ_p^+ à $A_{S,red}$ est un morphisme injectif dont l'image est incluse dans $A_{S',red}$.*

Pour parler de cette propriété de φ_p, on dira que φ_p est QF-injective.

Preuve Puisque φ_p est un LCM-homomorphisme, sa restriction φ_p^+ est injective et la restriction à $A_{S,red}$ aussi. Il suffit donc de montrer que l'image par φ_p^+ d'un élément réduit est réduit. Soit $U \in A_{S,red}$; on montre par récurrence sur la longueur de U que $\varphi_p^+(U)$ est réduit. Si $\ell(U) = 0$ ou $\ell(U) = 1$, alors le résultat est vrai. Supposons donc $\ell(U) \geq 2$. Dans ce cas, puisque U est réduit, on peut écrire $U = [s,t\rangle^m V$ avec $s, t \in S$ distincts et $V \in A_S^+$ divisible pour $\prec$ ni par s ni par t; de plus on a alors $2 \leq m \leq m_{s,t}$ et V réduit. On a alors que $[\varphi_p^+(s), \varphi_p^+(t)\rangle^m$ est réduit d'après le lemme 2.5. Comme $V \in A_{S,red}$ et $\ell(V) < \ell(U)$, on a par hypothèse de récurrence $\varphi_p^+(V)$ réduit. Supposons que $\varphi_p^+(U)$ ne soit pas réduit et procédons comme dans la preuve du lemme 2.5: il existe $C, D \in A^+_{p(s)\cup p(t)}$ et $u \in p(s) \cup p(t)$ tel que $CuD = [\varphi_p^+(s), \varphi_p^+(t)\rangle^m$ et $D\varphi_p^+(V)$ est réduit mais pas $uD\varphi_p^+(V)$; par le lemme 2.4, on a $u \prec D\varphi_p^+(V)$. D'autre part, comme $[\varphi_p^+(s), \varphi_p^+(t)\rangle^m$ est réduit, uD l'est aussi et donc $u \not\prec D$. Par le lemme 2.3, il existe $v \in p(s) \cup p(t)$ qui divise $\varphi_p^+(V)$ pour $\prec$. Supposons $v \in p(s)$; puisque $\Delta_{p(s)} \succ v$, $\varphi_p^+(sV)$ n'est pas réduit. D'autre part, $\ell(sV) < l(U)$, donc par hypothèse de récurrence on a que sV n'est pas réduit, ce qui implique par le lemme 2.4 que $s \prec V$; ceci est impossible par construction de V. Si $v \in p(t)$ on procède de la même façon pour obtenir une nouvelle contradiction. Donc U est réduit. □

Corollaire 2.7 *Soit $\varphi_p : A_S \to A_{S'}$ un LCM-homomorphisme. Alors φ_p induit un homomorphisme injectif $\varphi_{p,W} : W_S \to W_{S'}$.*

Preuve $\varphi_p(s^2) = \Delta^2_{p(s)}$ a pour image 1 dans $W_{S'}$; donc $\varphi_{p,W}$ est bien définie. D'autre part grâce à la proposition 2.6 et la section Sec, il est clair que $\varphi_{p,W}$ est injective. □

Définition 2.8 Soit $\varphi : A_S \to A_{S'}$ un lcm-homomorphisme. Pour $s \in S$ on pose $p_\prec(s) = \{t \in S' | t \prec \varphi(s)\}$ et $p_\succ(s) = \{t \in S' | \varphi(s) \succ t\}$. On dira que φ est un *lcm*-homomorphisme symétrique si $\forall s \in S$, on a $p_\prec(s) = p_\succ(s)$. Dans ce cas on notera simplement cet ensemble $p(s)$.

Un LCM-homomorphisme est en particulier un lcm-homomorphisme symétrique.

Lemme 2.9 *Soit $\varphi : A_S \to A_{S'}$ un lcm-homomorphisme QF-injectif. Soit $U \in A_S^+$ réduit et $s \in S$; s'il existe $t \in p_{\succ}(s)$ tel que $t \prec \varphi^+(U)$ alors $s \prec U$. Suposons de plus que φ est symétrique. Si U et V sont dans A_S^+ et réduit, alors $\varphi^+(U) \wedge_{\prec} \varphi^+(V) = 1 \iff U \wedge_{\prec} V = 1$.*

Preuve Si U est réduit et $s \in S$ avec $s \not\prec U$, alors sU est aussi réduit. Donc $\varphi^+(s)\varphi^+(U)$ est réduit et aucun élément de $p_{\succ}(s)$ ne peut diviser $\varphi^+(U)$. Supposons maintenant que φ est symétrique et que U et V sont dans A_S^+ réduit et différents de 1. Par contreapposée, il est clair que $\varphi^+(U) \wedge_{\prec} \varphi^+(V) = 1 \Rightarrow U \wedge_{\prec} V = 1$. Montrons l'autre implication par l'absurde. Supposons que $U \wedge_{\prec} V = 1$ mais $\varphi^+(U) \wedge_{\prec} \varphi^+(V) \neq 1$. Soit $t \in S'$ tel que $t \prec \varphi^+(U) \wedge_{\prec} \varphi^+(V)$ et notons $s \in S$ tel que $t \in p(s)$. En utilisant la première partie du lemme, on a $t \prec \varphi^+(U) \Rightarrow s \prec U$ et $t \prec \varphi^+(V) \Rightarrow s \prec V$. Ce qui donne finalement $s \prec U \wedge_{\prec} V$ et la contradiction voulue. □

Théorème 2.10 *Soit $\varphi : A_S \to A_{S'}$ un lcm-homomorphisme symétrique QF-injectif. Alors φ^+ est compatible avec la forme normale: si $(g_1, \cdots, g_n)$ est la forme normale de $g \in A_S^+$ alors $(\varphi^+(g_1), \cdots, \varphi^+(g_n))$ est la forme normale de $\varphi^+(g)$. De plus, si $g_1, g_2 \in A_S^+$ alors*

$$\begin{array}{ll} (a) & \varphi^+(g_1) \vee_{\prec} \varphi^+(g_2) = \varphi^+(g_1 \vee_{\prec} g_2) \\ (b) & \varphi^+(g_1) \wedge_{\prec} \varphi^+(g_2) = \varphi^+(g_1 \wedge_{\prec} g_2). \end{array}$$

Ce théorème est en particulier valable pour les LCM-homomorphismes par la proposition 2.6 et dans le cas des lcm-homomorphismes provenant des automorphismes de graphes (*cf.* théorème 14 de [10]). Le (a) est en fait connu puisque Crisp a montré dans le théorème 8 de [10] que c'est déjà le cas pour un lcm-homomorphisme.

Preuve Puisque φ est QF-injective, la suite $(\varphi^+(g_1), \cdots, \varphi^+(g_n))$ a bien ses termes dans $A_{S',red}$. On montre le résultat par récurrence sur n; rappelons qu'au lemme 0.6, on a défini une fonction α qui, à un élément d'un monoïde d'Artin-Tits associe son plus grand diviseur réduit et qui vérifie que $\alpha(gh) = \alpha(g\alpha(h))$. Puisque $\alpha(\varphi^+(g_1) \cdots \varphi^+(g_n)) = \alpha(\varphi^+(g_1)\alpha(\varphi^+(g_2) \cdots \varphi^+(g_n)))$, il suffit de montrer le résultat pour $n = 2$. Supposons donc $n = 2$. Puisque $\varphi^+(g_1)$ est réduit, il divise $\alpha(\varphi^+(g))$. Si $\varphi^+(g_1) \neq \alpha(\varphi^+(g))$ alors il existe $t \in p(s) \subset S'$ avec $s \in S$ tel que $t \prec \varphi^+(g_2)$ et $\varphi^+(g_1) \not\succ t$ mais dans ce cas $g_1 \not\succ s$ et par le lemme 2.9, on a $s \prec g_2$; ceci implique que $g_1 s$ est réduit et divise g; ce qui contredit le fait que $g_1 = \alpha(g)$. Donc $\varphi^+(g_1) = \alpha(\varphi^+(g))$.

Soit maintenant $g_1, g_2 \in A_S^+$. Il est clair que $\varphi^+(g_1) \vee_\prec \varphi^+(g_2) \prec \varphi^+(g_1 \vee_\prec g_2)$ et que $\varphi^+(g_1 \wedge_\prec g_2) \prec \varphi^+(g_1) \wedge_\prec \varphi^+(g_2)$. D'autre part, si on note $g_1 = (g_1 \wedge_\prec g_2)h_1$ et $g_2 = (g_1 \wedge_\prec g_2)h_2$ alors $h_1 \wedge_\prec h_2 = 1$. Il est facile de voir que $h_1 \wedge_\prec h_2 = 1 \iff \alpha(h_1) \wedge_\prec \alpha(h_2) = 1$ et que $\varphi^+(h_1) \wedge_\prec \varphi^+(h_2) = 1 \iff \alpha(\varphi^+(h_1)) \wedge_\prec \alpha(\varphi^+(h_2)) = 1$ (voir le lemme 0.6). On en déduit alors par le lemme 2.9 et la première partie du théorème que $\varphi^+(h_1) \wedge_\prec \varphi^+(h_2) = 1$, ce qui montre le (b).

Le (a) se montre de la même façon : si on écrit $g_1 \vee_\prec g_2 = g_1 h_1 = g_2 h_2$, on a $h_1 \wedge_\succ h_2 = 1$ et $\varphi^+(h_1) \wedge_\succ \varphi^+(h_2) = 1$. □

Remarquons que l'on a vraiment eu besoin du fait que le lcm-homomorphisme est symétrique et que l'on ne peut espérer étendre ce résultat à tous les lcm-homomorphismes QF-injectifs comme le montre l'exemple suivant: soit φ le lcm-homomorphisme du groupe libre à un générateur $\langle t \rangle$ dans le groupe libre à deux générateurs $\langle x, y \rangle$ qui envoie t sur xy. Alors $\varphi(t^2) = xyxy$ est réduit donc $\alpha(xyxy) = xyxy$ mais $\varphi(\alpha(t^2)) = \varphi(t) = xy$.

Corollaire 2.11 *Soit $\varphi_p : A_S \to A_{S'}$ un LCM-homomorphisme entre groupes d'Artin-Tits de type sphérique. Alors φ_p^+ conserve l'écriture normale: si $g_1^{-1}g_2$ est l'écriture normale de $g \in A_S$ alors $\varphi_p^+(g_1)^{-1}\varphi_p^+(g_2)$ est l'écriture normale de $\varphi_p(g)$.*

Preuve C'est clair par la seconde partie du théorème 2.10. □

2.1 Une réalisation géométrique

Le réalisation géométrique se construit maintenant exactement comme dans [9]; on se contente donc d'introduire les notations utiles et d'énoncer le résultat.

Soit (A_S, S) un système d'Artin-Tits, (W_S, S) son système de Coxeter associé et posons $\mathcal{S}_{f,S} = \{T \subset S | W_T \text{ est fini }\}$. On ordonne l'ensemble $W_S \times \mathcal{S}_{f,S}$ par la relation:

$$(w_1, T_1) \leq (w_2, T_2) \text{ si } \begin{cases} w_1 W_{T_1} \subset w_2 W_{T_2} \\ \ell(\Delta_{T_1}) + \ell(w_1^{-1}w_2) = \ell(\Delta_{T_1} w_1^{-1} w_2) \end{cases}$$

et on note $\widetilde{\Sigma}_S$ la réalisation géométrique du complexe dérivé de cet ensemble ordonné; c'est un complexe simplicial. Le complexe $\widetilde{\Sigma}_S$ s'appelle le complexe de Salvetti et a été introduit dans [16]. Le groupe W_S agit simplicialement et librement sur $\widetilde{\Sigma}_S$ (par multiplication à gauche sur le premier facteur); on note $Z_S = \widetilde{\Sigma}_S / W_S$ l'espace des orbites pour cette action. Il est connu que $\pi_1(Z_S) \cong A_S$.

Lemme 2.12 (Proposition 3.2 de [9]) *Soit A_S et $A_{S'}$ deux groupes d'Artin-Tits. Soit φ_p un LCM-homomorphisme. Alors l'application $\widetilde{p} : W_S \times \mathcal{S}_{f,S} \to W_{S'} \times \mathcal{S}_{f,S'}$ définie par $\widetilde{p}(w,T) = (\varphi_{p,W}(w), p(T))$ pour $(w,T) \in W_S \times \mathcal{S}_{f,S}$ préserve strictement l'ordre et induit une application $\widetilde{\Phi}$ qui est simpliciale injective et $(W_S, W_{S'})$-équivariante de $\widetilde{\Sigma}_S$ dans $\widetilde{\Sigma}_{S'}$.*

Proposition 2.13 (Théorème 3.4 de [9]) *Soit $\varphi_p : A_S \to A_{S'}$ un LCM-homomorphisme; identifions $A_S, A_{S'}$ respectivement à $\pi_1(Z_S)$ et $\pi_1(Z_{S'})$. Alors l'application $\widetilde{\Phi}$ du lemme 2.12 induit une application simpliciale injective $\Phi : Z_S \to Z_{S'}$ telle que*

$$\varphi_p = \Phi_*,$$

où Φ_* désigne l'application induite par Φ entre les groupes fondamentaux.

3 Injectivité des LCM-homomorphismes

Nous commençons par introduire le complexe de Deligne puis la notion de complexe de cubes. C'est grâce à ces objets que nous allons établir l'injectivité des LCM-homomorphismes pour les groupes d'Artin-Tits de type FC.

3.1 Le complexe de Deligne et les espaces de cubes

Le complexe de Deligne a été défini pour la première fois par Deligne dans [12] pour le cas des groupes d'Artin-Tits de type sphérique. Cette construction a été ensuite généralisée par Charney et Davis dans [7] et a permis de montrer plusieurs résultats sur les groupes d'Artin-Tits (par exemple dans [4, 5, 8, 7, 10]).

Soit (A_S, S) un système d'Artin-Tits. Rappelons que

$$\mathcal{S}_{f,S} = \{T \subset S;\ A_T \text{ est de type sphérique}\}$$

et posons

$$A_S\mathcal{S}_{f,S} = \{xA_T;\ x \in A_S \text{ et } T \in \mathcal{S}_{f,S}\}.$$

Rappelons que si $(P, <)$ est un ensemble partiellement ordonné, son complexe de drapeaux est le complexe simplicial abstrait qui a pour sommets les éléments de P et pour simplexes les suites finies croissantes d'éléments de P. Un sous-simplexe d'un simplexe, donc d'une suite, est alors une sous-suite de celle-ci.

On appelle "complexe de Deligne" le complexe de drapeaux D_S obtenu à partir de l'ensemble $A_S\mathcal{S}_{f,S}$ munie de l'inclusion comme ordre partiel (notons que

$xA_X \subset yA_Y \iff X \subset Y$ et $y^{-1}x \in A_Y$). C'est un complexe simplicial abstrait. On peut associer à ce complexe une réalisation géométrique sous forme de complexe simplicial euclidien par morceaux. On identifie souvent le complexe et sa réalisation, bien que celle-ci ne soit pas unique. Le groupe A_S agit sur son complexe de Deligne par multiplication à gauche. Si l'on note K_S, le sous-complexe de drapeaux associé à $\mathcal{S}_{f,S}$, alors K_S est un domaine fondamental pour l'action de A_S sur D_S. Si l'on munit K_S d'une réalisation géométrique, on peut étendre celle-ci à D_S tout entier via l'action de A_S. Dans ce cas, A_S agit naturellement par isométries sur la réalisation géométrique de D_S.

Dans [7], on associe au complexe de Deligne une réalisation géométrique liée à la métrique dite "de Moussong"; nous ne détaillons pas ici cette construction. Disons simplement que cette réalisation est conjecturalement la plus adaptée pour tous les groupes d'Artin-Tits. Lorsque A_S est de type FC (*cf.* définition 0.3), on associe à D_S une réalisation géométrique cubique grâce à K_S, comme vu ci-dessus. La structure cubique de K_S est donnée par les sous-complexes associés aux sous-groupes paraboliques standards A_X de type sphérique dont les réalisations géométriques sont alors des cubes de $\mathbb{R}^n$ pour $n = |X|$.

Un complexe de cubes est un complexe polyédrique où les faces fermées sont des cubes d'un espace euclidien; celles-ci sont appelées les cubes du complexe. Si (A_S, S) est un système d'Artin-Tits de type FC alors la réalisation cubique de son complexe de Deligne est naturellement munie d'une structure de complexe de cubes sous-jacente qui consiste à ne garder que les arêtes $\{aA_X, aA_Y\}$ telles que $aA_X \subset aA_Y$ avec $a \in A_S$ et $Y = X \cup \{s\}$ dans $\mathcal{S}_{f,S}$ avec $s \in S - X$. Si K est un cube de dimension n, alors il possède pour l'inclusion un sommet minimal aA_R et un sommet maximal aA_T, avec $a \in A_S$, et avec $R \subset T$ dans $\mathcal{S}_{f,S}$ tels que $\#(T - R) = n$. L'ensemble des sommets de K est alors $\{aA_X | R \subset X \subset T\}$ et il forme un treillis pour l'inclusion. On notera $K = K(aA_R, aA_T)$.

Définition 3.1 Soit D un complexe de cubes.

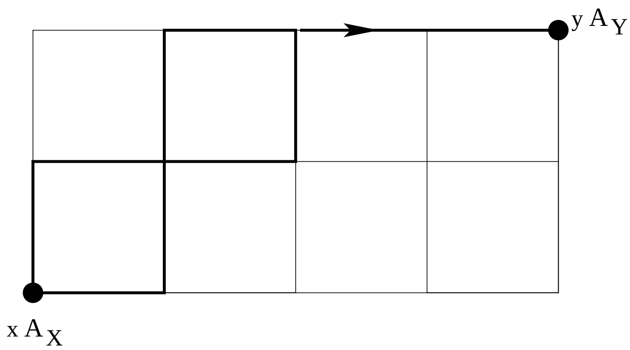
(i) Si $C_1, C_2, \cdots, C_n$ sont des cubes de D, on note $span(C_1, C_2, \cdots, C_n)$ le plus petit cube, s'il existe, qui contient les C_i. On dit que c'est le cube tendu par les C_i.

(ii) Soit C un cube de D. On appelle étoile de C, et on note $Et(C)$, le sous-complexe $Et(C) = \bigcup_{C \subset C'} C'$.

(iii) Soit x, y deux sommets de D. On dit que la suite $x_1, \cdots, x_n$ de sommets de D est un chemin cubique normal de x à y si

$$\begin{cases} (a) & x = x_0; y = x_n; \\ (b) & \forall i \in \{1, \cdots, n\}, C_i = span(x_{i-1}, x_i) \text{ existe;} \\ (c) & \forall i \in \{0, \cdots, n-1\}, Et(C_i) \cap C_{i+1} = \{x_i\}. \end{cases}$$

Proposition 3.2 ([14], [6] théorème 4.4) *Soit (A_S, S) un système d'Artin-Tits de type FC; on munit D_S de sa structure de complexe de cubes. Soit xA_X, yA_Y deux sommets de D_S; alors il existe un unique chemin cubique normal de xA_X à yA_Y.*



Chemin cubique normal de xA_X à yA_Y

Cet énoncé est lié au fait que la réalisation géométrique cubique d'un groupe d'Artin-Tits de type FC est un espace CAT(0) (*cf.* [7]). Nous ne détaillons pas ici cette notion qui ne nous servira pas directement. On pourra se référer à [2] pour plus d'explications sur les espaces métriques à courbure négative.

Le lemme suivant permet de mieux comprendre la structure cubique du complexe de Deligne.

Lemme 3.3 ([6] lemme 4.1) *Soit (A_S, S) un système d'Artin-Tits de type FC et D_S son complexe de Deligne munit de sa structure de complexe de cubes. Soit $K_1 = K(aA_{R_1}, aA_{T_1})$ et $K_2 = K(bA_{R_2}, bA_{T_2})$ deux cubes de D_S. Alors,*

$$span(K_1, K_2) \text{ existe} \iff T_1 \cup T_2 \in \mathcal{S}_{f,S} \text{ et } aA_{R_1} \cap bA_{R_2} \neq \emptyset.$$

De plus, dans ce cas,

$$span(K_1, K_2) = K(cA_{R_1 \cap R_2}, cA_{T_1 \cup T_2})$$

avec $c \in aA_{R_1} \cap bA_{R_2}$.

3.2 Injectivité des LCM-homomorphismes

Dans cette partie, on se donne (A_S, S) et $(A_{S'}, S')$ deux systèmes d'Artin-Tits de type FC et $\varphi_p : A_S \to A_{S'}$ un LCM-homomorphisme. On identifie les complexes de Deligne D_S et $D_{S'}$ avec leurs réalisations géométriques cubiques. On définit une application simpliciale continue $\Phi_p : D_S \to D_{S'}$ en posant $\Phi_p(xA_X) = \varphi_p(x)A_{p(X)}$. Cette application est bien définie car si $X \subset Y \subset S$ alors $p(X) \subset p(Y) \subset S'$. L'énoncé du lemme suivant est largement inspiré du lemme 18 de [10].

Lemme 3.4 *On a:*

(i) *la restriction $\Phi_p|_{K_S}$ de Φ_p à K_S est injective et son image est dans $K_{S'}$.*

(ii) *Si Φ_p est injective alors φ_p est injective.*

(iii) *$Im\varphi_p = stab(Im\Phi_p)$ et $Im\Phi_p = Im\varphi_p \cdot \Phi_p(K_S)$.*

Question 2 Il n'est pas très compliqué de voir que la définition de Φ_p et le lemme 3.4 sont indépendants du fait que les groupes d'Artin-Tits sont de type FC (c'est indépendant de la réalisation géométrique). Une question naturelle est donc de savoir si la réciproque du (ii) est vraie en général.

Preuve (i) La restriction de Φ_p à K_S est injective sur les sommets puisque p envoie des générateurs distincts sur des parties disjointes. Par simplicialité, elle est donc injective sur K_S et par définition $\Phi_p(K_S) \subset K_{S'}$. Pour montrer le (ii), il suffit de considérer l'orbite de $A_\emptyset$.

(iii) L'inclusion $Im\varphi_p \subset stab(Im\Phi_p)$ et l'égalité $Im\Phi_p = Im\phi_p \cdot \Phi_p(K_S)$ sont claires. D'autre part, on a $1A_\emptyset \in Im(\Phi_p)$, donc si $w \in stab(Im(\Phi_p))$ alors $w(1A_\emptyset) = wA_\emptyset \in Im(\Phi_p)$ et $w \in Im\varphi_p$. □

Avant d'énoncer la proposition importante 3.7 nous commençons par un lemme utile pour la preuve de celle-ci.

Lemme 3.5 *Soit A_S un groupe d'Artin-Tits.*

(i) *Soit $w \in A_S^+$, $X \subset S$, et $s \in S$. Si $w \in A_X^+$ et s apparaît dans une écriture de w alors $s \in X$.*

(ii) *Soit $\varphi_p : A_S \to A_{S'}$ un LCM-homomorphisme. Soit $R \subset S$ et $Y \subset S'$. On pose $Z = \{s \in S | p(s) \subset Y\}$. Soit $w \in A_S^+$ alors*

$$\exists \alpha \in A_{p(R)}^+ , \exists \beta \in A_Y^+ , \ \varphi_p(w) = \alpha\beta \Rightarrow \exists u \in A_R^+ , \exists\, v \in A_Z^+ , \ w = uv.$$

En particulier si $R = \emptyset$ (donc $\alpha = 1$ et $\varphi_p(w) \in A_Y^+$) alors $w \in A_Z^+$.

Au cours de la preuve de ce lemme et de la proposition suivante, nous aurons besoin des notions d'élément X-réduit et réduit-X:

Définition 3.6 Soit A_S un groupe d'Artin-Tits; soit X est une partie de S et $w \in A_S^+$. On dit que w est X-réduit (resp. réduit-X) s'il n'est divisible pour $\prec$ (resp. $\succ$) par aucun élément de X.

Preuve du lemme 3.5 (i) Supposons que $w \in A_X^+$. Cela signifie qu'il existe un représentant de w dans A_S^+ où n'apparaissent que des éléments de X; mais si s apparaît dans une écriture, alors il apparaît dans toutes car les relations de tresses ne font ni apparaître ni disparaître de générateurs. Donc $s \in X$.

(ii) Supposons $l(\alpha) = 0$ pour commencer et remarquons que si $X, X' \subset S$ alors $X \subset X' \iff p(X) \subset p(X')$. Soit X minimal tel que $w \in A_X^+$: $w = s_1 \cdots s_n$ avec $X = \{s_1, \cdots s_n\}$ (les s_i ne sont pas forcément distincts). Alors $\varphi_p^+(w) = \Delta_{p(s_1)} \cdots \Delta_{p(s_n)}$. D'où $p(X) = \bigcup_{i=1}^n p(s_i) \subset Y$ par le (i) et donc $X \subset Z$ par définition de Z.

Revenons maintenant au cas général : $\varphi_p(w) = \alpha\beta$.

Quitte à modifier α et β, on peut supposer que β est $p(R)$-réduit. On procède par récurrence sur $l(\alpha)$. Si $l(\alpha) = 0$, le résultat est vrai par le début de la preuve. Supposons donc $l(\alpha) \geq 1$. Soit $t \in p(R)$ tel que $t \prec \alpha$ et $s \in R$ tel que $t \in p(s)$. Alors, $t \prec \varphi_p(w)$ et comme φ_p conserve la forme normale, $s \prec w$. Donc $\Delta_{p(s)} \prec \alpha\beta$; mais comme $p(s) \subset p(R)$ et β est $p(R)$-réduit, on a alors $\Delta_{p(s)} \prec \alpha$ car tout élément de $p(s)$ divise α par le lemme 2.3. On peut donc simplifier par s dans w et par $\Delta_{p(s)}$ dans α pour appliquer l'hypothèse de récurrence. $\square$

Proposition 3.7 *Soit xA_X et yA_Y deux sommets de D_S. Alors Φ_p envoie le chemin cubique normal de xA_X à yA_Y sur le chemin cubique normal de $\Phi_p(xA_X)$ à $\Phi_p(yA_Y)$.*

Preuve Soit xA_X et yA_Y des sommets de D_S. Notons $x_0A_{X_0} = xA_X, x_1A_{X_1}, \cdots, x_nA_{X_n} = yA_Y$ l'unique chemin cubique normal de xA_X à yA_Y dans D_S. Posons $R_i = X_{i-1} \cap X_i$ et $T_i = X_{i-1} \cup X_i$. Soit $a_i \in x_{i-1}A_{X_{i-1}} \cap x_iA_{X_i}$; on a

$$K(a_iA_{R_i}, a_iA_{T_i}) = span(x_{i-1}A_{X_{i-1}}, x_iA_{X_i}).$$

L'image par Φ_p du chemin cubique normal de x à y est la suite de sommets de $D_{S'}$: $\varphi_p(x_0)A_{p(X_0)} = \varphi_p(x)A_{p(X)}$, $\varphi_p(x_1)A_{p(X_1)}$, $\cdots$, $\varphi_p(x_n)A_{p(X_n)} = \varphi_p(y)A_{p(Y)}$. Posons $C_i = span(\varphi_p(x_{i-1})A_{p(X_{i-1})}, \varphi_p(x_i)A_{p(X_i)})$. Celle-ci existe et est en fait clairement égale à $C_i = K(\varphi_p(a_i)A_{p(R_i)}, \varphi_p(a_i)A_{p(T_i)})$.

Nous devons prouver que cette suite de sommets vérifie les axiomes (a),(b), et (c) de la définition 3.1 (iii). Le (a) et le (b) sont triviaux; montrons donc le (c) par l'absurde. Soit i tel que $Et(C_i) \cap C_{i+1} \neq \{\varphi_p(x_i)A_{p(X_i)}\}$ et soit $\varphi_p(a_{i+1})A_Y$ un sommet de $Et(C_i) \cap C_{i+1}$ distinct de $\varphi_p(x_i)A_{p(X_i)}$. Par le lemme 3.3, on a

$$span(\varphi_p(x_i)A_{p(X_i)}, \varphi_p(a_{i+1})A_Y) = K(\varphi_p(a_{i+1})A_{p(X_i)\cap Y}, \varphi_p(a_{i+1})A_{p(X_i)\cup Y}).$$

D'autre part, $p(X_i) \cup Y \neq p(X_i)$ ou $p(X_i) \cap Y \neq p(X_i)$; quitte à remplacer Y par $p(X_i) \cap Y$ ou $p(X_i) \cup Y$, on peut donc se ramener soit au cas où $\varphi_p(x_i)A_{p(X_i)} \subsetneq \varphi_p(a_{i+1})A_Y$ soit au cas où $\varphi_p(a_{i+1})A_Y \subsetneq \varphi_p(x_i)A_{p(X_i)}$.

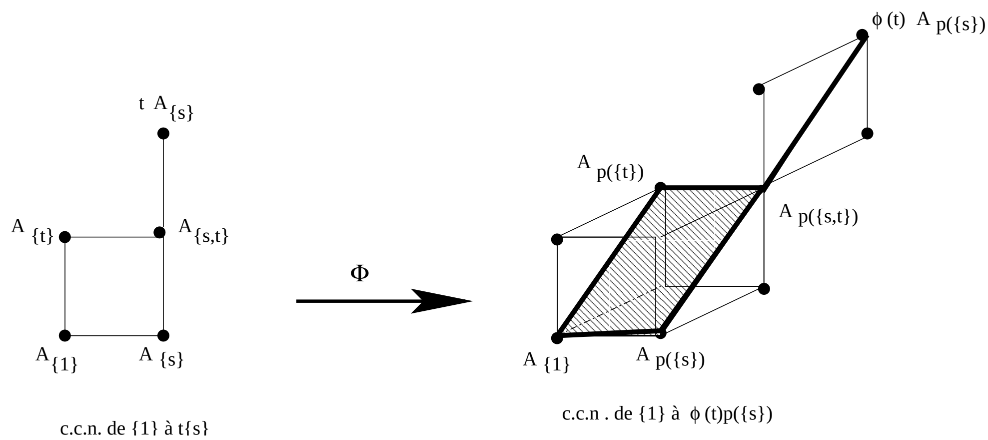
Premier cas: supposons que $\varphi_p(a_{i+1})A_Y \subsetneq \varphi_p(x_i)A_{p(X_i)}$ et posons $Z = \{s \in S; p(s) \subset Y\}$. On a donc $Z \subsetneq X_i$.

Puisque $a_iA_{X_i} = a_{i+1}A_{X_i} = x_iA_{X_i}$, on a $a_{i+1}^{-1}a_i \in A_{X_i}$: $a_{i+1}^{-1}a_i = u_1^{-1}u^{-1}vv_1$ avec $u, v, u_1, v_1 \in A^+_{X_i}$ et $\begin{cases} uu_1 \text{ et } vv_1 \text{ premiers entre eux pour } \prec, \\ v_1 \in A^+_{R_i} \text{ et } v \text{ réduit-}R_i, \\ u_1 \in A^+_Z \text{ et } u \text{ réduit-}Z. \end{cases}$

Montrons que $a_iA_{R_i} \cap a_{i+1}A_Z \neq \emptyset$; ceci est équivalent à montrer que $vA_{R_i} \cap uA_Z \neq \emptyset$. Or, par hypothèse $span(\varphi_p(a_i)A_{p(R_i)}, \varphi_p(a_{i+1})A_Y)$ existe et par le lemme 3.3 on en déduit que $\varphi_p(a_i)A_{p(R_i)} \cap \varphi_p(a_{i+1})A_Y \neq \emptyset$; c'est-à-dire qu'il existe $\alpha \in A_{p(R_i)}$ et $\beta \in A_Y$ tel que $\varphi_p(v)\varphi_p(v_1)\alpha = \varphi_p(u)\varphi_p(u_1)\beta$. On peut écrire $\varphi_p(v_1)\alpha = \alpha_1\alpha_2^{-1}$ avec $\alpha_1, \alpha_2 \in A^+_{p(R_i)}$ et $\alpha_1 \wedge_\succ \alpha_2 = 1$; de même, on peut écrire $\varphi_p(u_1)\beta = \beta_1\beta_2^{-1}$ avec $\beta_1, \beta_2 \in A^+_Y$ et $\beta_1 \wedge_\succ \beta_2 = 1$. Ceci nous donne $\varphi_p(v)\alpha_1\alpha_2^{-1} = \varphi_p(u)\beta_1\beta_2^{-1}$; mais l'écriture $\varphi_p(v)\alpha_1\alpha_2^{-1}$ est normale: $\varphi_p(v)\alpha_1$ et α_2 sont premiers entre eux à droite car α_1 et α_2 le sont, $\varphi_p(v)$ est réduit-$p(R_i)$ car v est réduit-R_i (*cf.* le lemme 2.9), et on utilise l'analogue à droite du lemme 2.3. Donc il existe w, a priori dans $A^+_{p(X_i)}$, tel que $\alpha_2w = \beta_2$ et $\varphi_p(v)\alpha_1w = \varphi_p(u)\beta_1$. L'égalité $\alpha_2w = \beta_2$ impose $w \in A^+_Y$. Maintenant, en simplifiant α_1w et β_1 par leur pgcd à droite et en prenant pour a le représantant réduit-Y de $\alpha_1A^+_Y$, on déduit de l'égalité $\varphi_p(v)\alpha_1w = \varphi_p(u)\beta_1$ qu'il existe $a \in A^+_{p(R_i)}$ et $b, c \in A^+_Y$ tels que que a est réduit-Y et $ac \wedge_\succ b = 1$ avec $\varphi_p(v)ac = \varphi_p(u)b$. Cette égalité implique que $b = \varphi_p(u)^{-1}(\varphi_p(u) \vee_\prec \varphi_p(v))z = \varphi_p(u^{-1}(u \vee_\prec v))z$ et $ac = \varphi_p(v)^{-1}(\varphi_p(u) \vee_\prec \varphi_p(v))z = \varphi_p(v^{-1}(u \vee_\prec v))z$ avec $z \in A^+_Y$; mais puisque $ac \wedge_\succ b = 1$, on a $z = 1$. On peut maintenant appliquer le lemme 3.5(ii) : $u^{-1}(u \vee_\prec v) \in A^+_Z$ et il existe $x \in A^+_{R_i}$, $y \in A^+_Z$ tel que $v^{-1}(u \vee_\prec v) = xy$. D'où $vA_{R_i} \cap uA_Z \neq \emptyset$. De plus, $Z \cup T_i = T_i \in \mathcal{S}_{f,S}$, donc par la proposition 3.3, on a que $span(K(a_iA_{R_i}, a_iA_{T_i}), a_{i+1}A_Z)$ existe; si l'on montre que que l'on a aussi $a_{i+1}A_Z \in K_{i+1}$ on aura alors une contradiction avec le fait que la suite des $x_iA_{X_i}$ est un chemin cubique normal, puisque Z et X_i sont distincts. Montrons ce dernier point. Ceci revient à voir que

$R_{i+1} \subset Z \subset T_{i+1}$. Mais d'une part on a $Z \subset X_i \subset T_{i+1}$, et d'autre part on a $p(R_{i+1}) \subset Y$ puisque $\varphi_p(a_{i+1})A_Y$ est un sommet de C_{i+1}. Par definition de Z, cela implique $R_{i+1} \subset Z$.

Deuxième cas: supposons que $\varphi_p(x_i)A_{p(X_i)} \subsetneq \varphi_p(a_{i+1})A_Y$ (et distincts) et posons maintenant $Z = \{s \in S; p(s) \cap Y \neq \emptyset\}$. On a alors $R_i \subset X_i \subsetneq Z$ et $a_iA_{R_i} \cap a_{i+1}A_Z = a_iA_{R_i} \neq \emptyset$. De plus, puisque $span(\varphi_p(a_i)A_{p(T_i)}, \varphi_p(a_{i+1})A_Y)$ existe, on a que $p(T_i) \cup Y$ est de type sphérique (en particulier sans liaison infinie); ceci implique par l'axiome **(L3)** que $T_i \cup Z$ n'a pas non plus de liaison infinie. Il est donc de type sphérique puisque S est de type FC. Comme dans le premier cas, on en déduit par le lemme 3.3, que $span(K(a_iA_{R_i}, a_iA_{T_i}), a_{i+1}A_Z)$ existe. Comme dans le premier cas, il nous reste à voir que $a_{i+1}A_Z \in K_{i+1}$, c'est à dire $R_{i+1} \subset Z \subset T_{i+1}$, pour obtenir une nouvelle contradiction puisque Z et X_i sont encore une fois distincts. Tout d'abord, on a $R_{i+1} \subset X_i \subset Z$. Ensuite puisque $\varphi_p(a_{i+1})A_Y$ est un sommet de C_{i+1}, on a $Y \subset p(T_{i+1})$; ce qui implique $p(Z) \subset p(T_{i+1})$ et finalement $Z \subset T_{i+1}$ par l'axiome **(L0)** de la définition 0.1. □



Un exemple

Corollaire 3.8 *Soit (A_S, S) et $(A_{S'}, S')$ deux systèmes d'Artin-Tits de type FC et $\varphi_p : A_S \to A_{S'}$ un LCM-homomorphisme. Alors, Φ_p est injective.*

Preuve Par la proposition précédente, Φ_p est injective sur les sommets et est donc injective. □

Théorème 3.9 *Soit (A_S, S) et $(A_{S'}, S')$ deux systèmes d'Artin-Tits de type FC et $\varphi_p : A_S \to A_{S'}$ un LCM-homomorphisme. Alors φ_p est injective.*

Preuve On applique le corollaire 3.8 et le lemme 3.4(ii). □

Références

[1] **N. Bourbaki**, *Groupes et Algèbres de Lie chapitres 4,5,6*, Hermann (1968).

[2] **M. Bridson and A. Haefliger**, *Metric spaces of non-positive curvature*, A series of comprehensive studies in mathematics, Springer-Verlag (1999).

[3] **E. Brieskorn, K. Saito**, *Artin-Gruppen und Coxeter-Gruppen*, Invent. Math. **17** (1972), 245–271.

[4] **R. Charney**, *Geodesic automation and growth functions for Artin groups of finite type*, Math. Ann. **301** (1995) 307-324.

[5] **R. Charney** *Injectivity of the positive monoid for some infinite type Artin groups*, (1999) 103-118. Geometric Group Theory Down Under, J. Cossey and C. Miller and W. Neumann and M. Shapiro eds, Walter de Gruyter.

[6] **J.A. Altobelli and R. Charney**, *A geometric Rational Form for Artin Groups of FC type*, Geom. Dedicata **79** (2000) 277-289.

[7] **R. Charney and M.W. Davis**, *The $K(\pi,1)$-problem for hyperplane complements associated to infinite reflection groups*, J. Amer. Math. Soc. **8** (1995) 597-627.

[8] **R. Charney and M.W. Davis**, *Finite $K(\pi,1)$s for Artin groups*, Ann. of Math. Stud., Princeton Univ. Press **138** (1995) 110-124.

[9] **J Crisp**, *Injective maps between Artin groups*, Proceedings of the Special Year in Geometric Group Theory,Berlin, (1999), 119 – 138.

[10] **J. Crisp**, Symmetrical Subgroups of Artin Groups, Adv. in Math. **152** (2000), 159-177.

[11] **P. Dehornoy**, *On completeness of word reversing*, Discrete Math. **225** (2000), 93–119.

[12] **P. Deligne**, *Les immeubles des groupes de tresses généralisés*, Invent. Math. **17** (1972), 273–302.

[13] **J. Michel**, *A note on words in braid monoids*, J. Algebra **215** (1999), 366–377.

[14] **G. Niblo and L. Reeves**, *The geometry of cube complexes and the complexity of their fundamental groups*, Topology **37(3)** (1998) 621-633.

[15] **L. Paris**, *Artin monoids inject in their groups*, preprint janvier 2001.

[16] **M. Salvetti**, *Topology of the complement of real hyperplanes in $\mathbb{C}^n$*, Invent. Math. **88** (1987) 603-618.

[17] **H. van der Lek**, “The homotopy type of complex hyperplane complements”, Ph. D. Thesis, University of Nijmegen, 1983.

LAMFA CNRS 2270, Université de Picardie-Jules Verne
Faculté de Mathématiques et d’Informatique
33 rue Saint-Leu, 80000 Amiens, France

Email: `eddy.godelle@u-picardie.fr`

URL: `http://www.mathinfo.u-picardie.fr/godelle`

Received: 11 October 2001