Divulgaciones Matemáticas v. 6, No. 1 (1998), 69–80.

La Noción de Continuidad desde la Óptica de los Niveles de van Hiele

The Notion of Continuity from the Viewpoint of van Hiele's Levels

Pedro Campillo Herrero
Pedro Pérez Carreras (pperezc@mat.upv.es)
Departamento de Matemática Aplicada.
Universidad Politécnica de Valencia. España.

Resumen

El objeto de este artículo es dotar de una componente visual dinámica al concepto de continuidad (tal como lo definió Cauchy) que permita su mejor asimilación al alumno en las primeras fases del aprendizaje, que enfatice la controlabilidad de errores, que es la esencia de esa definición y no lo que semánticamente el término continuidad parece sugerir, así como demostrar la existencia de varios niveles de razonamiento (caracterizados por sus descriptores correspondientes) en sintonía con el modelo de van Hiele. Se analizan los instrumentos de confección y detección de niveles y descriptores, dejándose para una nueva contribución el tratamiento estadístico robusto de datos acumulados y la propuesta metodológica que este tipo de estudio persigue.
Palabras y frases clave: continuidad, modelo de van Hiele, niveles, descriptores.

Abstract

The goal of this paper is to endow the concept of continuity (as defined by Cauchy) with a dinamical visual component, allowing a better assimilation by the student at the first learning stages and emphasizing the controlability of errors which is the essence

of that definition and not what semantically the term continuity seems to suggest, as well as demonstrating the existence of several reasoning levels (characterized by its corresponding descriptors) in tune with van Hiele's model. The instruments of confection and detection of levels and descriptors are analyzed, leaving for a future contribution the statistical robust treatment of accumulated data and the methodological proposal that this kind of study seeks.
Key words and phrases: continuity, van Hiele's model, levels, descriptors.

1 La noción de continuidad

La evolución del concepto de función puede contemplarse como la lucha entre dos imágenes mentales: la geométrica (expresada en forma de curva) y la algebraica (expresada como una fórmula permitiendo un número finito de términos y, más tarde, un número infinito, la llamada expresión analítica). Ya hacia 1750 resultaba evidente que cualesquiera de estas dos propuestas era inadecuada desde el punto de vista de las aplicaciones físicas, lo que llevaría a la definición lógica, como una correspondencia, tras los trabajos de Dirichlet y Riemann en el siglo XIX. La noción de función no aparece hasta el siglo XVIII, debido básicamente a dos razones: falta de requisitos algebraicos y notaciones simbólicas y falta de motivación. ¿Por qué introducir una definición abstracta si no había suficientes ejemplos significativos?. El nacimiento de este concepto necesitaba de un caldo de cultivo que se gestó durante los años 1450–1650, periodo que vió la extensión del concepto de número, la creación del Álgebra Simbólica (Vieta, Descartes), el estudio del movimiento como problema central de la Ciencia (Kepler, Galileo) y el matrimonio entre Álgebra y Geometría (Descartes). Todos estos desarrollos sugerían una visión continua y dinámica de la relación funcional, distinta de la visión estática mantenida anteriormente. Particularmente, la última de ellas produjo la introducción de los conceptos de variable y la expresión de las relaciones entre variables mediante ecuaciones, lo que daría pie a un amplio catálogo de curvas a estudiar.

El subsiguiente desarrollo del Cálculo Infinitesimal (siglos XVII y XVIII) cuyos objetos primordiales de estudio eran las curvas, desarrollaría métodos para resolver problemas de esas curvas, como el cálculo de tangentes o áreas encerradas. Como los problemas que originaron esa disciplina eran geométricos y de naturaleza cinemática, no resultaba necesario estructurarlo en forma algebraica con definiciones precisas, siendo nociones como la continuidad algo intuitivamente aceptado como la no rotura de la curva (que es precisamente lo que esa palabra sugiere). La definición algebraico-algorítmica de función, que vendría a reemplazar a la geométrica, ya requería definiciones de carácter algebraico de todas aquellas nociones que, como la continuidad, iban asociadas al concepto de función. Si el término "continuidad" sugiere la no rotura de la gráfica, una posible algebrización del concepto podría ser la (hoy llamada) Propiedad del Valor Intermedio (PVI):

> Sea $f : X \to \mathbb{R}$ una función y sea X un intervalo de la recta real $\mathbb{R}$. Se dice que f tiene la PVI en X si, dados cualesquiera puntos $a < b$ de X y dado cualquier y tal que $f(a) < y < f(b)$ (o $f(b) < y < f(a)$), existe al menos un punto $x \in (a, b)$ tal que $f(x) = y$.

Esto es lo más ajustado a la popular imagen escolar de que continuidad significa no tener que levantar el lápiz al dibujar la gráfica de la función. Sin embargo, no fué ésta la definición de continuidad elegida por los rigorizadores del Cálculo Infinitesimal (Lacroix, Cauchy) debido a una variedad de razones (que desgraciadamente no se hacen explícitas a alumnos cuando se ven confrontados por primera vez con la "auténtica" definición ε–δ de Cauchy): por un lado y para conectar con la posible existencia de recta tangente, la continuidad debía ser una definición local (en un punto) y no global (en un intervalo); por otro lado, la PVI no respeta propiedades muy deseables como son:

(i) la acotación (es fácil construir una función con la PVI en un intervalo cerrado, que no esté necesariamente acotada en él. Por ejemplo $f(x) := x^{-1}\mathrm{sen}(1/x)$ en (0,1] con $f(0) := 0$).

(ii) la estabilidad frente a la suma (cada una de las funciones $f(x) := \mathrm{sen}^2(1/x)$ con $x \neq 0$ y $f(0) := 0$, $g(x) := \cos^2(1/x)$ con $x \neq 0$ y $g(0) := 0$ tiene la PVI, mientras que su suma no la tiene).

En lugar de la PVI, Cauchy quiso enfatizar bajo el término "continuidad" la propiedad de que "un ligero error en la estimación de la variable independiente produce un error pequeño en la estimación de la variable dependiente" lo que lograría mediante el concepto de límite funcional. Es necesario aclarar que una función como $\mathrm{sen}(1/x)$ con $x \neq 0$ satisface la PVI (independientemente de cómo definamos $f(0)$ siempre que $-1 \leq f(0) \leq 1$), pero un pequeño error en el input puede dar como resultado cualquier número entre -1 y 1.

Una vez justificado el por qué se eligió una definición poco intuitiva (en relación a la palabra continuidad), a pesar de tener a mano otra que sí pudiera serlo, debemos preguntarnos qué sentido pedagógico tiene el introducir la noción de continuidad al alumno primerizo, acudiendo a su intuición geométrica para luego confrontarle con la definición de Cauchy, que es una definición de control de errores (es decir, aritmética y no geométrica) y que, aparentemementemente, poco tiene que ver con la no rotura de la gráfica. Esta práctica docente tan extendida es muy criticable desde el punto de vista educativo y fuente de muchos conflictos conceptuales para el alumno, aunque desde el punto de vista matemático (no muy estricto) no lo sea, ya que es bien sabido que ambas visiones de la continuidad están (afortunadamente) fuertemente relacionadas:

> Sea X un intervalo de la recta real $\mathbb{R}$ y $f : X \to \mathbb{R}$ una función. Entonces,
>
> (i) Si f es continua en X, f tiene la PVI.
>
> (ii) Si f es monótona a trozos y tiene la PVI, entonces f es continua en X.

Aunque algo de este mundo se le revela posteriormente al alumno (teorema de Bolzano), en raras ocasiones se menciona (ii) que establece la equivalencia (al menos bajo ciertas restricciones): como la mayoría de las funciones con las que se familiariza el alumno son monótonas a trozos, es estimulante pensar que ambas definiciones son intercambiables y definición e intuición van de la mano.

El abandono de la expresión analítica en favor de la correspondencia como definición de función no supuso ninguna alteración sustancial en lo que es la definición moderna de continuidad, aunque sí propició un profundo entendimiento de lo que las definiciones podían dar de sí (básicamente la noción de convergencia que es la sustancia de la definición de límite funcional) mucho más de lo que originalmente se había sospechado: téngase en cuenta que la función entendida como expresión analítica hacía pensar que toda función continua era diferenciable y que no toda función continua era integrable (cuando la situación es precisamente la contraria). La introducción de funciones continuas que no eran diferenciables en ningún punto supuso la jubilación definitiva de la visión geométrica de función, el establecimiento de la separación entre las nociones de continuidad y diferenciabilidad y la necesidad de proceder a una nueva etapa de rigorización (entendida como aritmetización) en los fundamentos del Análisis que eliminara los contenidos intuitivo-geométricos de las nociones más básicas.

2 Propósito

Dado que la definición de continuidad de Cauchy no es intuitiva en el sentido de casar con aquellas imágenes que la palabra continuidad sugiere (y que, de hecho, fue la responsable de la desaparición de la carga intuitiva que el Análisis conllevaba, dados sus orígenes cinemáticos) y, dada la importancia que en la docencia de las Matemáticas tiene el disponer de una imagen intuitiva de un concepto formal no trivial, parece natural plantearse otra estrategia docente de la habitual en lo que a este concepto se refiere, intentando dotar a la definición de Cauchy de una visualización que permita su mejor asimilación en las primeras fases del aprendizaje y que se centre en su aspecto fundamental de controlabilidad de errores (y no en lo que la palabra continuidad parezca sugerir). La estructuración de esa visualización como instrumento de aprendizaje se implementará a través de una entrevista socrática que permita ir avanzando ordenadamente analizando los distintos elementos que componen esa visualización. La constatación en este proceso de la existencia de varios niveles de razonamiento (tal como postula el modelo de van Hiele) detectables a través de sus descriptores correspondientes y un análisis de las entrevistas realizadas, nos llevará a la confección de un test escrito, que nos permitiría estudiar un número considerable de alumnos, obteniendo así datos suficientes para poder realizar un estudio estadístico riguroso que validará la existencia de niveles de razonamiento. Finalmente, el trabajo realizado nos llevará a la presentación de una propuesta metodológica para la asimilación del concepto de continuidad de Cauchy en niveles elementales. En este artículo presentamos el trabajo realizado en lo que se refiere a la construcción de los instrumentos de detección y clasificación de niveles y una descripción de los descriptores de los niveles, dejando para un segundo artículo el tratamiento estadístico de muestras de alumnos considerables, la propuesta metodológica que proponemos y nuestras conclusiones.

3 El modelo de van Hiele

El modelo de van Hiele proporciona una descripción del proceso de aprendizaje postulando la existencia de niveles de pensamiento que no se identifican con niveles de habilidad computacional y que, en nuestro trabajo, clasificaremos como: Nivel 0 (predescriptivo), Nivel I (de reconocimiento visual), Nivel II (de análisis), Nivel III (de clasificación y relación) y Nivel IV (de deducción formal), aunque este último no será estudiado, dada la propia afirmación de los van Hiele sobre este nivel como difícilmente detectable y sólo de interés teórico. Así, la aplicación de este tipo de modelo a una materia concreta necesita del establecimiento de una serie de descriptores para cada uno de los niveles estudiados que permita la detección de los mismos. Guiados por una investigación anterior sobre el concepto de existencia de recta tangente (ver [1]), asignamos un conjunto de condiciones a los niveles diseñados para que puedan ser considerados dentro del modelo de van Hiele: (i) los niveles deben ser jerárquicos, recursivos y secuenciales (ii) deben ser formulados detectando un progreso del entendimiento como resultado de un proceso gradual (iii) los tests (de cualquier tipo) que se diseñen para su detección deben recoger la relación existente entre nivel y lenguaje empleado en cada uno de ellos y (iv) el diseño debe tener como objetivo primordial la detección de niveles de pensamiento, sin confundirlos con niveles de habilidad computacional o conocimientos previos.

4 Elección del problema objeto de este estudio

Tras nuestro primer apartado, parece claro que la noción de continuidad (emparejada a la propia noción de función), partiendo de una concepción muy acorde con lo que la propia palabra siginifica, ha sufrido revisiones a lo largo de la historia y la definición actual es el producto de una sistematización muy posterior al momento de su primera formulación. La forma habitual de presentarla es a través de una rígida jerarquía de secuencias lógicas que establece demostraciones formales de hechos más generales que los inicialmente tratados. Dado que no existe ningún sustituto no formal razonable de este concepto y dadas las innegables dificultades pedagógicas que la explicación y asimilación de tal concepto conlleva, nuestro objetivo es dotar de un contenido visual a la definición moderna que, progresando desde niveles muy elementales, permita captar la esencia del proceso infinito inherente al concepto de límite funcional y que permita, cuando la madurez matemática (léase manipulación algebraica formal) del alumno lo permita, su formalización algebraica como una cadena de desigualdades condicionadas entre sí, evitando cualquier referencia al término “continuidad” para no introducir imágenes o concepciones ajenas a la esencia de la definición moderna. El diseño de esa visualización, dirigida a alumnos de enseñanza secundaria, debe:

(i) facilitar su introducción temprana sin depender de la madurez computacional y lógica tan característica de la definición moderna;

(ii) transmitir la esencia de lo que es un proceso de razonamiento infinito;

(iii) poseer una jerarquía identificable y ponderable de niveles de razonamiento (que, en nuestro caso, encuadramos en el modelo de van Hiele);

(iv) ser sencilla de visualizar y permitir así el uso de asistentes matemáticos (en nuestro caso, via DERIVE®) y

(v) preparar al alumno de enseñanza secundaria para el salto a la definición formal con mínimo esfuerzo.

5 Visualización elegida

La definición local de continuidad

> Se dice que $f : X \to \mathbb{R}$ es *continua* en $a \in X$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que
>
> $$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

tiene la visualización obvia de que, dado un distanciamiento vertical alrededor de la recta de ecuación $y = f(a)$, existe un pedazo de gráfica que, conteniendo al punto (a,f(a)), se halla localizada dentro de los límites marcados por ese distanciamiento vertical, pero esta visualización estática no transmite el dinamismo inherente al concepto, dinamismo que viene reflejado por la dependencia entre ε y δ. El asistente matemático, con sus opciones de modificar escalas de representación gráfica, permitiendo así la deformación selectiva de la gráfica de la función a considerar es esencial para nuestros propósitos, pues nuestro último objetivo es que el alumno identifique una función continua en un punto de acuerdo con la siguiente sugerencia que aparece en [2]:

> *"a continuous function is one whose graph has the property that any suitably tiny portion stretched horizontally will pull out flat"*

lo que nos lleva a considerar "estiramientos horizontales", es decir, cambios de escala en el eje de abscisas sin alterar el de ordenadas, lo que permitirá, sin apreciar variación en los límites dados por el distanciamiento vertical, visualizar con más detalle la porción de eje de abscisas que interese. A la deformación producida en la gráfica por acción del estiramiento horizontal la llamaremos "estiramiento de la curva" en similitud con lo que puede ser el estiramiento de una goma elástica. El estiramiento junto con la acción *Zoom* (estiramiento simultáneo en ambos ejes y de la misma magnitud) serán nuestros dos instrumentos de trabajo para lo que llamaremos "control local" de la curva. Variando el distanciamiento vertical y observando cómo varía el trozo de curva controlado por ese distanciamiento (utilizando estiramientos y *Zooms*) reproduciremos los primeros pasos del proceso infinito de razonamiento que lleve al control local definitivo. El nivel más alto de razonamiento detectable por este procedimiento sería la expresión verbal por parte del alumno de un método de detección de la controlabilidad local (le'ase continuidad) de curvas identificando el concepto de control local con la definición visual antes sugerida.

6 Diseño

Nuestro primer objetivo es el diseño de una entrevista socrática que reproduzca el proceso de razonamiento desde supuestos elementales a nuestro objetivo último. Ante la imposibilidad de incluir en este artículo el guión completo de la entrevista por su extensión y su amplio contenido gráfico, pasemos a describir en qué consiste. Nos hemos impuesto el no introducir ninguna terminología extraña al lenguaje coloquial para evitar preconcepciones o imágenes semánticas ajenas al problema que puedan llevar a confusiones aunque, a lo largo de la entrevista, se intenta precisar lo que entenderemos por términos como "estiramiento" o "control". No utilizamos en ningún momento la palabra "continuidad" para intentar evitar la evocación de la imagen de curva sin cortes. No hablamos de función, sino de curva, y la representamos sin ejes coordenados, para intentar evitar relaciones con conceptos métricos o identificación de la curva como gráfica de alguna función que el alumno pueda reconocer y evitar así la evocación de su expresión analítica. Nos ayudamos de un ordenador con el asistente DERIVE® para permitir al alumno manipularla dinámicamente cuando llegue el momento si lo desea.

La entrevista comienza con la acción de estiramiento de una curva a semejanza de lo que ocurre con una goma elástica para permitir que se implante en el entrevistado la idea de curva como una goma ideal sin huecos entre puntos y la apreciación de la diferencia existente entre estiramiento y observar la curva bajo la acción de una lupa (o *Zoom*, si utilizamos el asistente matemático). Se hace necesario posteriormente la idea de trozo de curva controlado localmente, introduciendo la idea de control a través de una pregunta sobre lo que pueda significar coloquialmente el término "controlar" (de momento, sin relación con curvas), para así matizar la idea de control en el contexto de curvas planas localmente: la no superación de unos límites dados por rectas horizontales equidistantes del punto considerado. Tras unos ejercicios de calentamiento con la idea de control local, asentamos el nuevo elemento del estiramiento y del trozo controlado, además de introducir preguntas que los combinen. Una vez producida la imagen estática del concepto que deseamos, comenzamos el delicado proceso de sustitución de la imagen estática por otra dinámica, lo que conseguimos variando la magnitud del distanciamiento para enfatizar la variación en el trozo de curva controlado. Se hace necesario el proponer el ejemplo de una curva localmente no controlable (discontinua) que nos permita observar que no podemos encontrar un trozo controlado conteniendo al punto, para un distanciamiento vertical dado. Como las discontinuidades evitables y de salto son fácilmente detectables, nuestros ejemplos para el análisis del alumno serán curvas oscilantes alrededor del punto de estudio ya que, en este caso, es cuando se hace necesario un proceso de razonamiento infinito, al tener el entrevistado que comprobar la imposibilidad de encontrar un trozo de curva controlado, haciéndose necesario un proceso infinito de estiramiento de la curva, a diferencia de los procesos anteriores que eran estiramientos finitos. Se pretende que observe una situación, en la que no viéndose cortes en la curva, es incapaz de establecer el control requerido, lo que deberá provocar (en caso de haber descubierto que realmente se está tratando encubiertamente la continuidad) que se enfrenten las ideas preconcebidas que pudiera tener (la idea que se va forjando el entrevistado a lo largo de la entrevista es que, en todos los casos que se puedan presentar, será capaz de establecer el control que se le está pidiendo repetidamente). Cuando ésto no ocurre, la situación de frustación provocada deberá jugar ventajosamente para poder enfrentarse al nuevo desafío de plantearle una curva sin rectas horizontales previas para que analice la posibilidad de controlarla localmente. Debemos de incidir en si se ha comprendido el delicado aspecto de la dependencia (en lenguaje matemático, si comprende la diferencia entre “dado un épsilon encontrar un delta” y “dado un delta encontrar un épsilon”). Para ello, introducimos unas rectas verticales y le hacemos practicar con la idea de si, dadas unas rectas verticales, es capaz de encontrar rectas horizontales que controlen la porción de curva y si este procedimiento es igual o esencialmente distinto del anterior. Como última tarea le solicitamos un método de clasificación de aquellas curvas controlables localmente de las que no lo son. Ante esta petición, nos encontraremos con muestras significativas de entrevistados que, aplicándolo correctamente en casos concretos, no producen una explicación verbal satisfactoria de cómo proceder en general. La culminación exitosa de la entrevista debiera producir la respuesta que aquellas curvas que tienden a quedarse planas como producto del estiramiento horizontal son precisamente aquellas que pueden ser controladas localmente. La entrevista lleva aparejada un código de asignación de aciertos y errores, en lo que a detección de niveles concierne, de las preguntas relevantes para uso del entrevistador.

Dado el número relativamente pequeño de alumnos que pueden ser sometidos a la entrevista socrática y motivados por la necesidad de validar estadísticamente nuestra detección de niveles de razonamiento en todo el proceso y posibles conclusiones, se hizo imperativo la confección de un test escrito cuyo esqueleto es el contenido de la entrevista y cuyo posterior análisis deberá estar en concordancia con el código de asignación antes mencionado. Tras un análisis de las respuestas más habituales obtenidas en la entrevista, seleccionamos las opciones de respuesta del test, intentando que estas opciones englobasen todas las clases de respuestas que hemos detectado, como más habituales, en la entrevista. Aunque es claro que, como instrumento de estudio, la entrevista es muy superior a la prueba test (al disponer en la primera de la posibilidad de ir controlando el desarrollo de la entrevista, pudiendo añadir ayuda individualizada y el uso de preguntas *ad hoc* que tengan la función de aportar más información individualizada), la necesidad de tener un mayor número de muestras nos forzó al más despersonalizado test, en el que nos hemos visto obligados a introducir algunas aportaciones de información al que lo realiza y algunas preguntas cuya respuesta no nos aportará mucha información valiosa. Así hemos diseñado un test con 32 preguntas y con un tiempo de respuesta que ronda en torno a los treinta minutos con cinco opciones de respuesta por pregunta, siendo la ultima opción de respuesta abierta, en la que el alumno puede escribir aquello que considere más oportuno, si las otras opciones no le satisfacen del todo y que tiene también el objetivo de suplir, en alguna medida, las deficiencias de un test sin contacto personal. Por las experiencias realizadas con el test, las contestaciones realizadas en modalidad abierta, pueden ser reclasificadas en alguna de las cuatro opciones anteriores. Estas respuestas proporcionan un vector con 32 filas para cada uno de los alumnos, lo que nos permitirá realizar un estudio estadístico robusto tal como se llevó a cabo en [1].

7 Niveles y Descriptores

Aunque, naturalmente, se tenían ideas previas a cuáles pudieran ser los niveles y sus posibles descriptores, fueron las primeras versiones de la entrevista (preludiada por un lectura atenta de algunos de los “Diálogos” de Platón) realizadas con alumnos de enseñanza secundaria, las que nos llevaron a una revisión de nuestras ideas previas (atendiendo de forma especial a la forma de expresión verbal de esos alumnos) y a la explicitación clara y manejable de niveles y descriptores, que reproducimos a continuación:

Nivel 0 (Predescriptivo)

0.1 El mero reconocimiento de los objetos a estudio (puntos, curvas, rectas) constituye lo que consideramos nivel 0 o predescriptivo: se reconocen los objetos con sus propiedades matemáticas elementales. Un punto no tiene dimensiones, una curva esta formada por infinitos puntos y no tiene agujeros entre puntos.

Nivel I (Visual)

1.1 La construcción del estiramiento por el alumno será una característica del nivel I, estiramiento entendido como separación horizontal de los puntos de una curva, dejando fijo el distanciamiento vertical entre ellos.

1.2 El reconocimiento del trozo de curva controlado localmente, fijándose para distinguirlo en los puntos de corte entre la curva y la recta.

1.3 Una característica del nivel I es una primera apreciación de lo que luego vendrá a constituir el dinamismo del concepto: unas rectas horizontales más cercanas al punto provocan una reducción del trozo de curva controlado localmente; comprende que el resultado depende de la variable rectas.

1.4 (Diferenciación del nivel II) El alumno en nivel I que no ha llegado a nivel II no recurre a las deformaciones, cuando tiene dificultades para apreciar cuál es el trozo de curva controlado localmente, al no ser capaz de utilizar herramientas anteriores ante un problemas nuevo.

Nivel II (Análisis)

2.1 La utilización de las deformaciones de forma adecuada para poder decidir el trozo de curva controlado localmente es una característica del nivel II: la utilización de nuevos medios para resolver un problema que hasta ahora no se le había presentado

2.2 Fijado un distanciamiento vertical, la apreciación de que una curva no tiene trozo controlado localmente para esas rectas, es una distinción con el nivel I, siempre que llegue a esta aseveración tras haber realizado las deformaciones adecuadas y haya generalizado que, en el teórico proceso infinito de posibles deformaciones, no podrá apreciar el trozo controlado. Así como la apreciación de trozo de curva controlado localmente es un proceso finito y realiza deformaciones a la curva hasta poder apreciar los cortes de las rectas con la curva con claridad, la conjetura de la no existencia de control local, supone un paso más en la calidad de razonamiento.

2.3 El alumno en nivel II avanzado también podrá desenvolverse en este tipo de problemas, aunque no se le explicite un distanciamiento vertical de entrada.

2.4 La separación entre los niveles II y III, sería la capacidad de distinguir que no se obtiene el mismo concepto de control local comenzando por distanciamientos verticales en lugar de horizontales.

Nivel III (de Clasificación o Relación)

3.1 Es capaz de ejemplificar situaciones en donde la distinción mencionada en 2.4 es patente.

3.2 Proporciona el método adecuado para saber si una curva es controlable localmente y es capaz de aplicarlo correctamente, siendo esta actitud un diferenciador claro del nivel III.

Referencias

[1] Llorens, J. L., Pérez Carreras, P. *An Extension of van Hiele's Model to the Study of Local Approximation*, Int. J. Math. Educ. Sci. Technol. **28** No. 5 (1997), 713–726.

[2] Tall, D. O. *Intuition and Rigour: The Role of Visualization in the Calculus*, en *Visualization in Teaching and Learning Mathematics* (W. Zimmermann y S. Cunningham, editores), MAA Notes, Mathematical Association of America, 1991.