Divulgaciones Matemáticas v. 6, No. 1 (1998), 15–19

Una Nota sobre los Espacios LωR

A Note about LωR Spaces

José R. Morales * (moralesj@ciens.ula.ve)
Departamento de Matemáticas. Facultad de Ciencias.
Universidad de los Andes. Mérida, Venezuela.

Resumen

En esta nota probaremos que si $(E, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach estrictamente convexo y *LNUC*, entonces E es un espacio LωR.
Palabras y frases clave: espacio de Banach, $L\omega R$, LNUC, propiedad (M), propiedad (ωM).

Abstract

In this note we'll prove that if $(E, \|\cdot\|)$ is a strictly convex and *LNUC* Banach space then E is a $L\omega R$ space.
Key words and phrases: Banach space, $L\omega R$, LNUC, (M) property, (ωM) property.

1 Notación

Para un espacio de Banach $(E, \|\cdot\|)$ denotamos por S_E (respectivamente, B_E) la esfere unitaria (respectivamente, bola unitaria) de E. Si $A \subset E$, entonces $co(A)$ denota la cápsula convexa de A y si (x_n) es una sucesión en E, entonces

$$Sep(x_n) = \inf\{\| x_n - x_m \| \mid n \neq m\}$$

denota la separación de (x_n).

*Este trabajo fue financiado por el Proyecto CDCHT–C–551–92.

2 Introducción

En 1936 J. A. Clarkson [4] introdujo los espacios *uniformemente convexos (UR)*. En 1955 aparecieron dos generalizaciones de estos espacios. Una fue introducida por A. R. Lovaglia [7]: los espacios *localmente uniformemente convexos (LUR)* y la otra por K. Fan y I. Glicksberg [5] generalizando la noción de espacios *2R* dada por Smulyan: los espacios *fully k-convexos* más comúnmente conocidos como los espacios *kR*.

En 1988 Nan Chao-Xun y Wanj Jian-Hua [3] localizan los espacios *kR* y definen los espacios *localmente fully k-convexos (L-kR)* como sigue:

> Sea $k \geq 1$ un entero. Decimos que un espacio de Banach $(E, \| \cdot \|)$ es un espacio *L-kR* si para cualquier sucesión $(x_n) \subset B_E$ y para todo $x \in S_E$ tal que
>
> $$\lim_{n_1,\dots,n_k \to \infty} \| x + x_{n_1} + \cdots + x_{n_k} \| = k + 1$$
>
> se tiene que $x_n \to x$.

Si $k = 1$ entonces tenemos que los espacios *L-kR* coinciden con los espacios *LUR*. Los espacios *L-kR* fueron generalizados por Bor-Luh Lin y Wenyao Zhang [2] al introducir los espacios $L\omega R$ en la forma siguiente:

Definición 1. *Sea $(E, \| \cdot \|)$ un espacio de Banach. Se dice que E es un espacio $L\omega R$ si para toda sucesión $(x_n) \subset B_E$ y todo $x \in S_E$ tales que $\lim_{n_1,\dots,n_k \to \infty} \| x + x_{n_1} + \cdots + x_{n_k} \| = k + 1$, para todo $k \in \mathbb{N}$, se tiene que $x_n \to x$.*

En 1967 L. P. Vlasov [11] introdujo los espacios *(CLUR)*, pero B. B. Panda y O. P. Kapoor [10] denotaron tales espacios como aquellos que poseen la propiedad *(M)* y en esta forma los hemos estudiado. El autor en [8] generaliza la propiedad (M) al introducir los espacios que poseen la propiedad *(k-M)* en la siguiente forma:

> Sea $k \geq 1$ un entero. Se dice que el espacio de Banach $(E, \| \cdot \|)$ satisface la propiedad *(k-M)* si para cada $x \in S_E$ y cada sucesión $(x_n) \subset B_E$ tal que
>
> $$\lim_{n_1,\dots,n_k \to \infty} \| x + x_{n_1} + \cdots + x_{n_k} \| = k + 1$$
>
> se tiene que (x_n) es compacto en B_E.

Si $k = 1$ entonces la propiedad *(k-M)* coincide con la propiedad *M*. Ahora, siguiendo [2] introducimos la propiedad (ωM) como sigue.

Definición 2. *Sea $(E, \| \cdot \|)$ un espacio de Banach. Se dice que E posee la propiedad (ωM) si para cualquier $x \in S_E$ y toda sucesión $(x_n) \subset B_E$ tal que*

$$\lim_{n_1, \dots, n_k \to \infty} \| x + x_{n_1} + \cdots + x_{n_k} \| = k + 1$$

para todo $k \in \mathbb{N}$, se tiene que (x_n) es compacto en B_E.

En 1980 R. Huff [6] introduce los espacios de Banach casi uniformemente convexos:

> Sea $(E, \| \cdot \|)$ un espacio de Banach. Se dice que E es un espacio *casi uniformemente convexo (NUC)* si para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta(\epsilon) > 0$ tal que para cualquier sucesión $(x_n) \subset B_E$ con $Sep(x_n) > \epsilon$ se tiene que $co(\{x_n\}) \cap (1 - \delta) B_E \neq \emptyset$.

Bor-Luh Lin y Wenyao Zhang [2] localizan los espacios *NUC* e introducen los espacios localmente casi uniformemente convexo *(LNUC)*:

Definición 3. *Un espacio de Banach $(E, \| \cdot \|)$ se dice* localmente casi uniformemente convexo (LNUC) *si para todo $x \in S_E$ y todo $\epsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\epsilon, x) > 0$ tal que para toda sucesión $(x_n) \subset B_E$ con $Sep(x_n) > \epsilon$ se tiene que*

$$co(\{x_n\}) \cap (1 - \delta) B_E \neq \emptyset.$$

Evidentemente *(NUC)* $\Rightarrow$ *(NUC)*.

Recordemos que un espacio de Banach $(E, \| \cdot \|)$ es *estrictamente convexo (R)* si para todo $x, y \in S_E$ con $\| x + y \| = 2$ se tiene que $x = y$. Los siguientes hechos son ampliamente conocidos:

1. *LUR* $\Leftrightarrow$ *L-1R* $\Rightarrow \dots \Rightarrow$ *L-kR* $\Rightarrow$ *L-(k+1)R* $\Rightarrow \dots \Rightarrow$ *LωR*.

2. Propiedad *(M)* $\Leftrightarrow$ Propiedad *(1-M)* $\Rightarrow \dots \Rightarrow$ Propiedad *(k-M)* $\Rightarrow \dots \Rightarrow$ Propiedad ωM.

3. *LUR* $\Leftrightarrow$ *(R)* + Propiedad *(M)*.

4. *LωR* $\Leftrightarrow$ *(R)* + Propiedad (ωM).

Las pruebas de estos resultados pueden ser vistas en [1] y [9].

3 Resultado principal

Ahora presentaremos nuestro principal resultado:

Teorema 1. *Sea* $(E, \| \cdot \|)$ *un espacio de Banach. Si* E *es* (LNUC)*, entonces* E *satisface la propiedad* ωM*.*

Prueba: Sean $x \in S_E$ y $(x_n) \subset B_E$ tales que

$$\lim_{n_1,\dots,n_k \to \infty} \| x + x_{n_1} + \cdots + x_{n_k} \| = k+1 \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N} \quad (*)$$

Supongamos que existe una subsucesión (x_j) de (x_n) que no posee subsucesión de Cauchy. Entonces existe una subsucesión (x_m) de (x_j) tal que $Sep(x_m) \geq \epsilon$, y como E es un espacio *(LNUC)* entonces existe un $\delta = \delta(\epsilon, x) > 0$ tal que

$$co(\{x, x_m\}) \cap (1-\delta)B_E \neq \emptyset,$$

de donde fácilmente se obtiene que

$$\frac{1}{k+1} \| x + x_{m_1} + \cdots + x_{m_k} \| \leq 1 - \delta,$$

para $m_1, \dots, m_k \in \mathbb{N}$ arbitrarios, lo cual es imposible por (*). Así, toda subsucesión de (x_n) posee una subsucesión de Cauchy, y por tanto es convergente, lo cual nos muestra que E satisface la propiedad (ωM). □

El siguiente corolario resuelve en forma positiva la conjetura planteada en [2].

Corolario 2. *Sea* $(E, \| \cdot \|)$ *un espacio de Banach. Si* E *es estrictamente convexo y* LNUC*, entonces es* $L\omega R$*.*

Prueba: *(R)* + *(LNUC)* $\Rightarrow$ *(R)* + Propiedad $(\omega M) \Leftrightarrow L\omega R$. □

Corolario 3. *Sea* $(E, \| \cdot \|)$ *un espacio de Banach. Si* E *es estrictamente convexo y* LNUC*, entonces* E *posee la propiedad* (G).

Prueba: Para la definición de la propiedad *(G)* ver [9]. En el mismo artículo mostramos que

$$L\text{-}kR \Rightarrow \text{propiedad } (G).$$

Por tanto,

$$(R) + (LNUC) \Rightarrow L\omega R \Rightarrow \text{propiedad } (G).$$

□

4 Agradecimientos

Doy mis más expresivas gracias al Institute of Mathematics, Slovak Academy of Sciences, Bratislava por la colaboración prestada durante mi visita al mismo, y al profesor I. Dobrakov por su amabilidad y gentilezas para con el autor.

Referencias

[1] Bor-Luh, L. *Topics in Banach Space Theory*, Lecture Notes in Math, National Xing-Hua University, China, 1989.

[2] Bor-Luh, L., Wenyao, Z. *Some Geometric Properties related to Uniform Convexity of Banach Spaces*, Function Spaces, Lecture Notes in Pure and Applied Math., Marcel Dekker, **136** (1991), 281–294.

[3] Chao-Xun, N., Jian-Hua, W. *On the Lk–UR and L–kR Spaces*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **104**(1988), 521–526.

[4] Clarkson, J. A., *Uniformly Convex Spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **40**(1936), 396–414.

[5] Fan, K., Glicksberg, I., *Fully Convex Linear Normed Spaces*, Proc. of the Nat. Acad. of Sciences, USA, **41**(1955), 947–953.

[6] Huff, R. *Banach Spaces which are Nearly Uniformly Convex*, Rocky Mountain J. Math,**10**(1980), 743–749.

[7] Lovaglia, A.R. *Locally Uniformly Convex Banach Spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **78**(1955), 225–238.

[8] Morales, J. R. *Sobre los espacios L–kR*, Notas de Matemáticas No. 105, Universidad de los Andes, Mérida, Venezuela.

[9] Morales, J. R. *La Propiedad k–M en espacios de Banach*, Notas de Matemáticas No. 118, Universidad de los Andes, Mérida, Venezuela.

[10] Panda, B. B., Kapoor, O. P. *A Generalization of Local Uniform Convexity of the Norm*, J. Math. Ann. Appl. **52** (1975), 300–308.

[11] Vlasov, L. P. *Approximative Properties of Sets in Normed Linear Spaces*, Russian Math. Surveys. 300–308.