Divulgaciones Matem'aticas v. 4, No. 1/2 (1996), 55–60

El Algoritmo de las Operaciones Elementales y la Matriz Escalonada Reducida: Conceptos Milenarios y Orientales

The Algorithm of Elementary Operations and the Reduced Echelon Matrix: Millennial Oriental Concepts

Mar'ia Cristina Solaeche Galera
Departamento de Matemáticas. Facultad de Ingeniería.
Universidad del Zulia. Apartado Postal 10063.
Maracaibo. Venezuela.

Resumen

En este trabajo se examinan los or'igenes en la China antigua del m'etodo de eliminaci'on gaussiana para resolver sistemas de ecuaciones lineales, as'i como la evoluci'on de los conceptos de matriz y determinante y otras nociones relacionadas.

Abstract

In this paper we examine the origins in ancient China of the method of gaussian elimination for solving systems of linear equations, as well as the evolution of the concepts of matrix and determinant, and other related notions.

1 Introducción

En el mundo occidental, y muy particularmente en su aspecto cient'ifico, acostumbra a pasearse melanc'olica la indiferencia sobre los conocimientos orientales hasta hacer fuerza de costumbre, salvo contad'isimas excepciones, la ignorancia. Pero muchos conocimientos matem'aticos originales surgieron en las tierras del Sol Naciente antes que en Occidente. Vale la pena recordarlo . . .

Las cr'onicas matem'aticas de la antiqu'isima civilizaci'ion china de los valles del Extremo Oriente en el coraz'on del continente asi'atico son escasas y parcialmente aceptables en nuestro mundo occidental. No obstante, a pesar de no haber sido a'un superada esta disparidad y escasez de informaci'on, se realizan continuos intentos para llegar a un acuerdo respecto a los abruptos peldaños que necesariamente el conocimiento humano ha tenido que recorrer en regiones muy distantes entre s'i; sin embargo, suelen a'un alterarse las opiniones al ensamblar con justeza estos esfuerzos y respetar su evoluci'on hist'orica. Trataremos en este estudio los or'igenes del **algoritmo de las operaciones elementales** y el concepto de **matriz escalonada** y su evoluci'on hasta el llamado **m'etodo de eliminaci'on gaussiana**.

Despu'es del *I Qing* o *Libro de las Permutaciones* (2200 a.C., Reino de Hsia) sobre combinaciones y cuadrados m'agicos, y del *Zhou bein Suan Qing* (s. XII a.C., Reino de Shang) sobre astronom'ia, propiedades del tri'angulo rect'angulo y aplicaciones de las fracciones, ambos de autores desconocidos, *Los Cat'alogos Estelares* (s. IV a.C., Dinast'ia Chou del Este) de Kan-Te; *El Oc'eano de Jade* (s. II a.C., Dinast'ia Han) entre otros . . . la Historia de la Matem'atica Oriental nos presenta orgullosa la obra *Zhui Zhang Suan Shu* o *El Arte de la Matem'atica en Nueve Libros* (152 a.C., Dinast'ia Han del Oeste), escrita por el insigne cient'ifico y hombre de estado Chuan Tsanom. Una obra cl'asica que a trav'es del tiempo ha sido objeto de numerosas adiciones y modificaciones a cargo de Hen Chou-Chan en el s. I a.C., Liu Hui en el s. III d.C., Cheng Luang en el s. VI d.C. y Li Chung-Fan en el s. VII d.C., hasta lograr convertirse en el texto fundamental en el cual se basaron los cient'ificos matem'aticos en sus investigaciones entre los siglos VII y X d.C. La obra consta de nueve libros presentados en pergaminos independientes que estudian diferentes temas matem'aticos expuestos de manera pr'actica y dogm'atica, en un total de 246 problemas en orden de creciente dificultad. Son formulados los problemas, los algoritmos necesarios para su soluci'on y los procedimientos y resultados mediante la aplicaci'on de los algoritmos propuestos, utilizando un sistema de numeraci'on decimal.

2 El algoritmo o regla del "fan-chen"

El tema que nos atañe: las *operaciones elementales* y la *matriz escalonada* y su utilizaci'on en el *m'etodo de eliminaci'on gaussiana* nos remonta hist'oricamente a los Libros VII y VIII del *Zhui Zhang Suan Shu*. En el Libro

VII se encuentra un esbozo de este m'etodo matricial para resolver sistemas de ecuaciones lineales que surgen de problemas pr'acticos previamente planteados. En el siguiente Libro VIII se presenta en toda su extensi'on y detalladamente este m'etodo y su generalizaci'on a un n'umero mayor de inc'ognitas. Se denomina *regla del "fan-chen"*, algoritmo tan 'unico como original, que consist'ia en:

Dado un sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 39 \\ 2x + 3y + z &= 34 \\ x + 2y + 3z &= 26 \end{aligned}$$

escrib'ian la *matriz aumentada o ampliada del sistema* (tomando en cuenta claro est'a la escritura china de derecha a izquierda y en columnas de arriba hacia abajo):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 34 & 39 \end{pmatrix}$$

Al aplicar el algoritmo o regla del "fan-chen" la matriz se transforma en otra equivalente, en la cual todos los n'umeros arriba y a la izquierda de la diagonal principal son ceros:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 34 & 39 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 26 & 8 & 39 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 5 & -2 & 1 \\ 18 & 8 & 39 \end{pmatrix} \cdots$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2/3 \\ 5 & -2 & 1/3 \\ 18 & 8 & 13 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1/3 & 2/3 \\ 5 & -7/3 & 1/3 \\ 18 & -5 & 13 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 12 & -7/3 & 1/3 \\ 33 & -5 & 13 \end{pmatrix} \cdots$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2/3 \\ 12 & -7 & 1/3 \\ 33 & -15 & 13 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2/3 \\ 1 & -7 & 1/3 \\ 11/4 & -15 & 13 \end{pmatrix}$$

Si observamos se realizaron siete operaciones elementales: a la segunda columna de la matriz del sistema se le sum'o la primera multiplicada por -1; en la matriz resultante se sum'o a la primera columna la segunda multiplicada por -1; en la nueva matriz se multiplica la tercera columna por la fracci'on 1/3; en la matriz obtenida a la segunda columna se le se sum'o la tercera multiplicada por -1; en la matriz resultante se le sum'o a la primera columna la segunda multiplicada por -3; en la nueva matriz se multiplic'o por 3 la segunda columna; la 'ultima operaci'on consisti'o en multiplicar por 1/12 la primera columna, obteniendo una matriz escalonada equivalente a la dada que proporciona ecuaciones lineales m'as sencillas:

$$z = \frac{11}{4}; \quad y - 7z = -15; \quad x + \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z = 13$$

La matriz escalonada obtenida corresponde a un nuevo sistema de ecuaciones lineales equivalente al dado y por lo tanto con las mismas soluciones:

$$x = \frac{37}{4}; \quad y = \frac{17}{4}; \quad z = \frac{11}{4}$$

Notemos que se utilizaron n'umeros negativos por la necesidad de la presencia del cero; para ello, proporcionaron el algoritmo "cheng-fun" que actualmente traducir'iamos aproximadamente como "m'as por menos". El problema presentado es el primero del libro VIII. Los siguientes problemas son similares.

3 Comentarios finales

Transcurrieron siglos sin un aporte nuevo, una refutaci'on o alguna observaci'on a estos originales m'etodos, hasta el nacimiento del *Algebra Lineal* en un renovado intento de los matem'aticos para encontrar m'etodos generales para la resoluci'on de sistemas de ecuaciones lineales con varias inc'ognitas. Los conocimientos matem'aticos adquiridos hasta el siglo XVII en Europa proporcionaban una situaci'on ideal para un gran empuje al progreso de esta ciencia y durante este siglo los matem'aticos trabajaron arduamente para enriquecer el *An'alisis Matem'atico* con numerosos algoritmos y descubrimientos de gran inter'es. En 1678 el matem'atico alem'an G. W. Leibniz concibe la idea del *determinante* para resolver el problema de la reducci'on del n'umero de inc'ognitas de un sistema de ecuaciones lineales, pero no ser'a hasta 1693 cuando formaliza este concepto en su *Teor'ia de los Determinantes*, utilizando un conjunto sistem'atico de 'indices para los coeficientes del sistema. Advirtamos que el t'ermino "determinante" aparece tard'iamente en 1815 en las obras del matem'atico franc'es A. Cauchy y el s'imbolo escogido para su notaci'on en 1841, en obras del matem'atico ingl'es A. Cayley, quien al interesarse por estos conceptos en sus trabajos sobre la Teor'ia de los Invariantes introduce el concepto de *matriz*: "No he obtenido ciertamente la noci'on de matriz de ninguna manera de los cuaterniones; fue m'as bien a partir de un determinante o como una manera c'omoda de expresar las ecuaciones", desarrollando el *Algebra Matricial* a partir del concepto de matriz como "un arreglo de n'umeros en filas y columnas", desechando el concepto mantenido hasta ese tiempo, en que se conceb'ia la matriz como un cierto n'umero asociado con un arreglo de n'umeros reconocido como *determinante*. En 1850 el matem'atico brit'anico J. Sylvester contribuye al estudio de los determinantes de una manera continua durante m'as de cincuenta años, creando el m'etodo que llam'o *dial'itico* para eliminar una variable de dos ecuaciones polin'omicas de grados m y n.

Transcurrieron dieciocho siglos estudi'andose estos y otros conceptos hasta el renacer en el siglo XIX de la antiqu'isima regla oriental del "fan-chen". Con el matem'atico alem'an K. F. Gauss en 1805 se formaliz'o el ahora llamado "m'etodo de eliminaci'on gaussiana" para encontrar todas las soluciones de un sistema de m ecuaciones lineales con n inc'ognitas.

Una vez m'as la Historia de la Matem'atica revela como el desarrollo de sus conceptos y teor'ias no necesariamente est'a sometido a un acontecer orientado exclusivamente por la l'ogica, y cu'an 'util es examinar los conceptos como formas del reflejo del pensar que manifiestan la actividad y el car'acter creador del matem'atico en determinado contexto hist'orico, desde las apariciones primeras y su evoluci'on hasta el estado actual, contribuyendo a descubrir el papel que desempeñan las circunstancias, las condiciones y las premisas en su paso a trav'es de diferentes estadios necesarios para expresar un proceso real del origen, su formaci'on y su devenir.

Mirando muy hacia atr'as, al horizonte de los tiempos en la China antigua, se nos develan tesoros del conocimiento que suelen permanecer carentes de justeza en la oscuridad y el anonimato, en un aglutinar de desconocimiento envueltos escasamente entre las leyendas y los mitos de estas tierras del Sol Naciente.

Despu'es de escribir estas notas aletean, quiz'as impertinentes o quiz'as ansiosas de ser escuchadas y respondidas, las preguntas ... algunas de ellas las compartiremos: ¿Ha terminado la evoluci'on de estas ideas planteadas? ¿Es menos profundo de lo que temporalmente pareciera el abismo que las separa? O nos limitaremos a la opini'on de E. T. Bell [1]: "Los adelantos antiguos en China ... hasta las t'ecnicas precisas que inventaron, o pertenecieron a las matem'aticas triviales o no las conocieron los matem'aticos europeos hasta mucho despu'es de su invenci'on independiente y demostrable en Europa".

En cada estadio de la evoluci'on los antepasados cre'ian haberlo logrado, m'as " ... si la verdad es el 'unico fin que merece ser perseguido" (H. Poincar'e [3]) ¿Podemos esperar alcanzarlo? ¿ De qu'e disponemos para lograrlo? ¿Acaso la inteligencia humana es susceptible de una variedad infinita que se recrea en el conocimiento como un juego del esp'iritu? ...

Referencias

[1] Bell, E. T.*Historia de las Matem'aticas*, Fondo de Cultura Econ'omica, Mexico, 1985.

[2] Kuhn, T. *La estructura de las revoluciones cient'ificas*, Fondo de Cultura Econ'omica, Mexico, 1978.

[3] Poincar'e, H. *Ultimos Pensamientos*, Colecci'on Austral, Madrid, 1964.

[4] Ribnikov, K. *Historia de las Matem'aticas*, Editorial Mir, Mosc'u, 1974.

[5] Temple, R. *El genio de China*, Editorial Debate/C'irculo, Madrid, 1987.

[6] *Presencia de la China en las Matem'aticas*, Revista de Ediciones en lenguas extranjeras No. 30, Beijing, 1993.