La Controversia entre L. Kronecker y G. Cantor acerca del Infinito

*The L. Kronecker - G. Cantor's Controversy
about Infinite*

María Cristina Solaeche Galera

Departamento de Matemáticas. Facultad de Ingeniería.
Universidad del Zulia. Maracaibo. Venezuela.

Resumen

En este artículo se expone la Controversia del Infinito suscitada entre L. Kronecker y G. Cantor. El infinito perturbó a la Grecia Antigua que intentó someterlo a la intuición natural: el *ápeiron* de Pitágoras y Platón, las *aporías* de Zenón y las *antinomias* de Demócrito y Aristóteles. Rechazado por Galileo. De carácter pluralista y mensurable para Leibniz. Soporte del Análisis Infinitesimal de Newton en tiempos de la Ilustración. Desvanecedor de todo finitismo en el materialismo de Spinoza. Idea central del idealismo trascendental de Kant, Fichte, Hegel y Schelling en época de revoluciones. Tema de Bolzano en sus paradojas del infinito. “Repugna el sentido común” según Du Bois-Reymond fundador de la moderna Electrofisiología. Cuestionado exhaustivamente en el siglo de las tecnologías por Klein, Poincaré, Gdel y Cohen. Fervientemente defendido por Hilbert y Russell. La polémica ha recogido argumentos matemáticos, lógicos, metafísicos y teológicos, pero ninguno tan envuelto en un denso fanatismo como el de L. Kronecker. A todo ello, Cantor especificó exactamente lo que se debe hacer para definir el infinito.

Abstract

In this paper we expound the controversy about infinite raised between L. Kronecker and G. Cantor. The infinite perturbed ancient Greece, which tried to subdue it to natural intuition: the

apeiron of Pythagoras and Plato, Zeno's *apor'ias* and the *antimonies* of Democritus and Aristotle. It was rejected by Galileo. Of pluralistic and measurable character for Leibniz. Support of Newton's infinitesimal analysis in times of the Illustration. Vanisher of every finitism in Spinoza's materialism. Central idea in the transcendental idealism of Kant, Hegel and Schelling in epoch of revolutions. Theme of Bolzano's paradoxes about infinite. "Disgusting to common sense" according to Du Bois-Reymond, founder of modern electrophysiology. Exhaustively questioned by Klein, Poincar'e, Gdel and Cohen in the century of technologies. Fervently defended by Hilbert and Russell. The polemic has gathered mathematical, logical, metaphysical and theological arguments, but none of them are so involved in a dense fanaticism as Kronecker's. Regarding all this Cantor specified exactly what must be done to define infinite.

Desde la antigua e idealista Grecia de Pitágoras y Platón hasta nuestros días, diversas opiniones sobre la Matemática se han mantenido al ritmo de los vaivenes del pensamiento humano.

Algunos matemáticos opinan, que la Matemática es una verdad absoluta independiente del hombre, al que corresponde descubrirla partiendo de la fuente del conocimiento que existe en los recuerdos de su alma inmortal, por lo tanto, los conceptos matemáticos también son independientes de la experiencia y poseen una realidad propia; se descubren, no se les crea o inventa. Se considera la abstracción como parte de la preparación para ese conocimiento del Universo Ideal que atraviesa el camino de la deducción, analizando lo que considera existente y deduciendo una verdad que se acepta o demuestra, o una contradicción que se rechaza para poder llegar a la conclusión deseada.

Otros matemáticos sostienen, que sólo parte de la Matemática está predeterminedada. Que el Intuicionismo basado en la intuición como la facultad de diferenciar e identificar con claridad el objeto del pensamiento, al llenar de contenidos el juicio y conferirle sentido sirviendo como criterio de verdad, desempeña un destacado papel en esta corriente constructivista la cual posee significación real cuando los conceptos emitidos pueden ser contruidos por la mente, admitiéndose solamente aquellos que no sólo definen un objeto sino que también inducen la manera de encontrarlo. Gran parte de este grupo son finitistas que niegan el contenido real y objetivo de la categoría del infinito basándose en que la infinitud no existe en el Universo, ni en el microcosmos, ni en el pensar mismo del ser humano.

Un tercer grupo opina que la Matemática es una creación humana

y a medida que avanza proporciona y aclara con mayor rigor, profundidad y plenitud las propiedades y relaciones entre los elementos de la Naturaleza, a través de los modelos matemáticos creados al desechar unas hipótesis y confirmar otras. En su formalismo, aspira resolver los problemas recurriendo a construcciones axiomáticas y formales que interpreten la veracidad de las teorías obtenidas como lo no contradictorio a las mismas, aceptando sin reservas la infinitud potencial y actual.

En el girar del mundo del pensamiento, dos matemáticos del siglo XIX protagonizaron la llamada “Controversia del Infinito”: Leopold Kronecker (1823-1891) y George Cantor (1845-1918).

L. Kronecker con su epigrama: “Dios ha creado los números naturales, el resto es trabajo del hombre” y su pitagorismo meticuloso que insiste en descartar el infinito, edificando toda la Matemática a partir de los números Naturales y realizando operaciones constructivas en número finito, se coloca entre uno de los representantes más radicales del Finitismo al rechazar el infinito como: “. . . futilidad perniciosa heredada de filosofías anticuadas y teologías confusas, pudiendo llegar sin él tan lejos como se quiera. . .”

En su tiempo, se consideró uno de los fundadores del Operaciona-
lismo, en el cual, un concepto puede definirse únicamente mediante la descripción de las operaciones utilizadas y, cobra significación si es aplicado y comprobado, mientras, los no vinculados a operaciones de ningún tipo se consideran sin sentido. Leamos sus propias palabras entresacadas de una misiva dirigida al matemático Hermann von Helmholtz, con motivo de los estudios que éste último realizaba sobre la caracterización de las

Geometrías en las que son posibles los movimientos rígidos: “La riqueza de su experiencia práctica con problemas sanos e interesantes, dará un nuevo sentido y un nuevo ímpetu a las Matemáticas. La especulación matemática unilateral e introspectiva conduce a campos estériles”. Al mismo tiempo, G. Cantor escribía: “La Matemática es completamente libre en su desarrollo, y sus conceptos sólo se ven restringidos por la necesidad de ser no contradictorios y están coordinados con los conceptos previamente introducidos mediante definiciones precisas. La esencia de la Matemática es su libertad”, prefiriendo siempre utilizar el término “Matemática libre”, al más generalizado “Matemática pura”.

Para Euclides, la noción de infinito potencial se puede resumir en su expresión: “. . . para toda línea larga, siempre existe otra más larga. . .”, razonamiento que resultaba de extrapolar la experiencia natural. Sin embargo, el concepto de infinito actual o completo, urgía en el siglo

XIX de alguna mente osada que se atreviera a dar el salto que lo definiera por vez primera libre de esquivamientos. Recordemos, que por infinito actual se entiende en Matemática un conjunto sin fin, acabado y ya realizado; por infinito potencial, un conjunto sin fin susceptible de incremento o disminución ilimitados, haciéndose mayor o menor que cualquier magnitud establecida de antemano.

Ya en el pasado, las paradojas de Zenón provocaron el alejamiento del pensamiento griego de la categoría de la infinitud que sólo lograba abrumarlos y confundirlos. Pero, en el siglo XIX la obra de G. Cantor dota de contenido matemático al concepto del infinito actual, demostrando con rigor y formalismo que es una noción indiferenciada. Su creación de la Teoría de Conjuntos introdujo definitivamente el infinito actual y otras ideas igualmente revolucionarias que le hicieron concluir: “. . . la cardinalidad de los conjuntos infinitos puede variar y ciertos conjuntos son más infinitos que otros. Así, de un conjunto numerablemente infinito se pueden generar infinitos conjuntos infinitos. . .”

Las paradojas cantorianas quebraron la hasta el momento sólida confianza de los matemáticos en las concepciones del infinito, al demostrarse rigurosamente que existe una jerarquía de infinitos, cada uno mayor que su precedente.

En 1874, paralela al nacimiento de la Teoría de Conjuntos de Cantor, nace una infeliz oposición a ella a cargo de L. Kronecker, quien fervientemente se dedicó a contradecir y desterrar en lo posible toda idea cantoriana. Se hicieron célebres estas disputas generadas por L. Kronecker y centradas en el concepto de infinito potencial como opuesto al infinito actual; atacó duramente la, a su parecer, atrevida postura matemática de Cantor; se basaba para ello en un Intuicionismo y un Constructivismo que le proporcionaban resultados muy diferentes en un número finito de etapas. A pesar, de que esta animosidad de L. Kronecker hacia C. Cantor se fundamentaba en diferencias científicas muy fuertes y posturas filosóficas al parecer irreconciliables para él, con el tiempo degeneró en una vituperante invectiva personal al calificar a Cantor de “renegado”, “charlatán”, “corruptor de la juventud estudiosa”. . . , en una postura doctrinal inflexible, que aunada a la débil fortaleza de Cantor, provocó o al menos contribuyó en él a crear fuertes desasosiegos, temores y angustias que lo forzaron a recluirse en un sanatorio. Cantor solía publicar sus resultados en el Journal de Crelle, del cual Kronecker era uno de sus editores y, con el poder que este cargo le confería, detuvo intencionalmente en 1877 toda publicación de quien años antes fuera su más excelente alumno.

Kronecker abogaba por la construcción de una Matemática fundada en los números enteros y combinaciones finitas de ellos; por su parte, Cantor aducía que aceptar esa rígida postura era equivalente a anular prometedores desarrollos y gravar todo avance matemático. La Teoría de Cantor sobrevivió a los amargos años iniciales de dudas, denuncias y acorralamientos, fortaleciéndose vigorosamente y revolucionando el pensamiento científico de la Matemática durante los siglos XIX y XX.

Posteriormente, D. Hilbert convirtió las demostraciones de pura existencia en potentes herramientas que produjeron valiosos resultados remitiendo constantemente la violenta objeción a sus métodos; su esfuerzo es plasmado en su frase: “Nadie puede expulsarnos del paraíso de los pensamientos de Cantor”. Pero, el tiempo transcurre... y en 1931, K. Gdel demuestra que el formalista está condenado al fracaso al probar que no existe ningún sistema de axiomas adecuado para la Matemática, porque sería incompleto.

Sin embargo, estas y otras posturas no han logrado aún establecer un planteamiento de la Matemática aceptable universalmente. Podemos atenernos si lo deseamos al grupo N. Bourbaki, optimista en su afirmación: “Hace veinticinco siglos que los matemáticos vienen practicando la costumbre de corregir sus errores, viendo así su ciencia enriquecida y no empobrecida; esto les da derecho a contemplar el futuro con serenidad” o quizás en la opinión de H. Weyl: “El problema de los fundamentos últimos y del significado último de la Matemática sigue abierto; no sabemos en qué dirección hallará su solución final, ni siquiera si cabe esperar en absoluto una respuesta final objetiva. El ‘matematizar’ muy bien pudiera ser una actividad creativa del hombre, como el lenguaje y la música, de una originalidad primaria, cuyas decisiones históricas desafíen una racionalización objetiva completa”.

Pero dejemos al lector una serie de preguntas que tal vez lo motiven acerca de cualesquiera de las posturas matemáticas presentadas y encaucen sus juicios sobre la controversia planteada y sus consecuencias.

¿Acaso la intuición es manipulada por los lenguajes de la filosofía y la ciencia?

¿La experiencia, proporciona siempre conceptos que pueden expresarse claramente en términos formalistas?

¿Hasta dónde el formalismo limita el conocimiento?

¿Intuicionismo, Constructivismo, Formalismo y Axiomatización obedecen a leyes externas o al conocimiento?

El Infinito: ¿Tentación del pensamiento humano, término que nos remite al misterio consolador, categoría que exige explicación científica,

concepto definible filosóficamente, evidente en su existencia, inalcanzable en su concretación, razón suficiente para la unidad matemática, concepto anárquico de un anarquista de esta ciencia, ideal que se pretende alcanzar o utopía irrealizable?