Divulgaciones Matemáticas 3(1) (1995), 5-21

Una generalización del radical primo de un ideal

A generalization of the prime radical of an ideal

Alirio J. Peña P.

Laboratorio de Álgebra Teórica y Computacional (LATyC)
Departamento de Matemática y Computación
Facultad Experimental de Ciencias. Universidad del Zulia
Apartado 526. Maracaibo 4001 - Venezuela
(apena@luz.ve)

Resumen

El propósito de este artículo es extender las nociones de ideal primo y radical primo de un ideal propio de un anillo R, a la familia formada por las partes absorbentes de R. Estas nociones están motivadas por las respectivas nociones en teoría de ideales y se ajustan satisfactoriamente a un modelo general de primitud sobre semigrupos parcialmente ordenados con elemento máximo. Además, se da una descripción explícita de los elementos de uno de los radicales primos aquí considerados, la cual generaliza la bien conocida descripción de los elementos del radical primo de un ideal propio de R.

Palabras claves: Ideal primo, radical primo, semigrupo, parte absorbente.

Abstract

The aim of this paper is to extend the notions of prime ideal and prime radical of a proper ideal of a ring R to the family formed by the absorbent parts of R. These notions are motivated by the respective notions in ideal theory and they adjust satisfactorily to a general model

of primeness over partially ordered semigroups with maximum element. Furthermore, we give an explicit description of the elements of one of the prime radicals here considered, which generalizes the well known description of the elements of the prime radical of a proper ideal of R.
Key words: Prime ideal, prime radical, semigroup, absorbent part.

Introducción

En este artículo continuamos con el estudio del retículo completo local y du-local $\wp_\alpha(R)$, formado por las partes absorbentes del anillo R, el cual fue iniciado recientemente por el autor en [12]. La noción de parte absorbente de un anillo R representa una axiomatización natural para los subconjuntos de R de la forma

$$A(M) = \{a \in R \,/\, \exists\, x \in M,\ x \neq 0 : aRx = 0\},$$

siendo M un R-módulo a izquierda dado, los cuales juegan un importante rol en la Teoría de Descomposición Terciaria debida a Leonce Lesieur y Robert Croisot (véanse [9] y [14]). El estudio del retículo $\wp_\alpha(R)$ sugiere algunas conexiones con las Teorías de Torsión Hereditarias (véase [12]) y con Geometría Algebraica No Conmutativa.

En el § 1 se ofrecen algunos resultados preliminares, así como la terminología y notaciones básicas. En el § 2 se introducen las nociones de elemento propio, elemento primo y radical primo en un semigrupo parcialmente ordenado con elemento máximo y con suficientes elementos primos, las cuales coinciden con las respectivas nociones usuales en el modelo $(\beta(R), \subseteq, \cdot)$, formado por la familia de ideales biláteros de R, denotada por $\beta(R)$, junto con las operaciones usuales $\subseteq$ y $\cdot$ de inclusión y multiplicación de ideales, respectivamente. Estas nociones son estudiadas en los casos $(\wp_\alpha(R), \subseteq, *)$ y $(\wp_\alpha(R), \subseteq, \cdot)$, siendo $*$ y $\cdot$ dos operaciones internas naturalmente definidas sobre la familia $\wp_\alpha(R)$. Veremos que para el primero de los radicales primos así construidos se tiene una descripción de sus elementos, la cuál generaliza la bien conocida descripción de los elementos del radical primo de un ideal propio de R, debida a J. Levitzki (véase el Teorema en (2.5)). Un resultado similar se obtiene para el segundo radical primo considerado, para el caso en que el retículo $\beta(R)$ contiene un único coátomo (véase la sección (2.6)).

§1. Preliminares y Notaciones Básicas

(1.1) En todo lo que sigue R denotará un anillo asociativo con elemento identidad $1 \neq 0$ y para cada $a \in R$, denotaremos por Ra, aR y RaR, respectivamente, al ideal a izquierda, derecha y bilátero de R generado por a. Por un **ideal de R** entenderemos un ideal bilátero de R y por un **ideal propio** de R entenderemos un ideal de R distinto de R. Denotaremos por $\beta(R)$ a la familia de ideales de R, por Spec(R) (el **espectro de R**) a la familia de ideales primos de R y por U(R) al grupo de unidades de R. Un **módulo** significará un R-módulo a izquierda unitario. Escribiremos ${}_RM$ para denotar que M es un módulo y $N \leq {}_RM$ para indicar que N es un submódulo del módulo M. Si $N \leq_R M$, diremos que N es un **submódulo esencial de M** ($N \leq' {}_RM$) si N se intersecta no-trivialmente con cada submódulo no-nulo de M. Dualmente, si $N \leq {}_RM$, N se dice un **submódulo superfluo de M** si cada vez que $N + H = M$, con $H \leq {}_RM$, se tiene que $H = M$. Si $N \leq {}_RM$ y $X \subseteq M$, el ideal a izquierda

$$(N:X) := \{r \in R \ / \ rx \in N, \ \forall x \in X\},$$

se llama el **conductor de X en N**. En particular, si $N = 0$ y $H \leq {}_RM$, entonces (0:H) es un ideal de R, llamado el **ideal anulador de H**. Dado un módulo M, E(M) denotará la **cápsula inyectiva de M**. Un retículo completo L se dice **local** (respectivamente, **du-local**) si L contiene un único coátomo (respectivamente, átomo). Un **semigrupo** es un par $(S, \cdot)$, formado por un conjunto no-vacío S y una multiplicación asociativa $\cdot$ definida sobre S.

El lector interesado puede consultar las referencias [1], [4], [5] o [7] para teoría de anillos y módulos (y en particular, para lo relacionado con el radical primo de un ideal propio), y [2] o [6] para teoría de retículos.

(1.2) Dado un módulo M, al conjunto

$$A(M) := \{a \in R \ / \ \exists x \in M, \ x \neq 0 : aRx = 0\}$$

lo llamaremos **el conjunto anulador para M.**

Observaciones:

(1) $A(0) = \phi$ y $(0:M) \subseteq A(M)$, para cada módulo no-nulo M.

(2) Si M es un módulo no-nulo, entonces

$$A(M) = \cup\{(0:N) \ / \ 0 \neq N \leq {}_RM\}$$

y así, $A(M)$ es una unión de ideales (propios) de R. Además, la familia $\mathcal{A}$ formada por los conjuntos anuladores para módulos es cerrada bajo uniones arbitrarias. En efecto, si $\{M_i\}$ es una familia de módulos, entonces es fácil ver que

$$A(\prod_i M_i) = A(\coprod_i M_i) = \bigcup_i A(M_i)$$

donde $\prod$ y $\coprod$ indican las operaciones de producto directo y coproducto directo, respectivamente, en la categoría de módulos. Así pues, el par $(\mathcal{A}, \subseteq)$ es un V-semi-retículo completo con elemento mínimo $A(0) = \phi$ y elemento máximo

$$A_\infty := \{a \in R \ / \ RaR \neq R\} = \cup \mathrm{Spec}(R) = A(C_\infty),$$

siendo

$$C_\infty := \coprod \{\frac{R}{RaR} \ / \ a \in A_\infty\}$$

y donde el módulo cociente $\frac{R}{RaR}$, con $a \in A_\infty$, es considerado como un R-módulo a izquierda.

(3) Si M es un módulo y $a \in A(M)$, entonces Ra y aR están contenidos en $A(M)$. De hecho, $RaR \subseteq A(M)$.

(4) Para cada módulo M, $A(M) = A(E(M))$.

(5) Si $0 \to N \to M \to T \to 0$ es una sucesión exacta corta de módulos, entonces

$$A(N) \subseteq A(M) \subseteq A(N) \cup A(T).$$

(1.3) Sea $A \subseteq R$. Diremos que A es una **parte absorbente de R** si y solo si $A = \phi$ ó si A satisface la siguiente condición:

(PA) Para cada $a \in A$, $Ra \subseteq A$ y $aR \subseteq A$.

Usaremos la notación $\wp_\alpha(R)$ para denotar la familia formada por las partes absorbentes de R.

Observaciones:

(1) Para cada $\phi \neq A \in \wp_\alpha(R)$, $0 \in A$ y $R\cdot A = A\cdot R$ (i.e., el ideal a izquierda de R generado por A coincide con el ideal a derecha de R generado por A)

(2) $\beta(R) \subseteq \wp_\alpha(R)$.

(3) Para cada módulo M, $A(M) \in \wp_\alpha(R)$ (i.e., $\mathsf{A} \subseteq \wp_\alpha(R)$).

(4) Si $A \in \wp_\alpha(R)$, entonces $A = R \Leftrightarrow 1 \in A$.

(5) La familia $\wp_\alpha(R)$ es cerrada bajo uniones, intersecciones y sumas arbitrarias (i.e., si $\{A_i\} \subseteq \wp_\alpha(R)$, entonces el **conjunto suma**

$$\sum_i A_i = \{a_{i_1} + \ldots + a_{i_n} \ / \ a_{i_j} \in A_{i_j}, 1 \leq j \leq n\}$$

está en $\wp_\alpha(R)$ y es claro que $\sum_i A_i$ no necesita ser un ideal de R).

Así, la terna $(\wp_\alpha(R), \cap, \cup)$ es un retículo completo y distributivo. Además, sobre $\wp_\alpha(R)$ podemos definir las siguientes multiplicaciones: Si A y $B \in \wp_\alpha(R)$, pongamos

$$A*B := \{ab \ / \ a \in A \text{ y } b \in B\} \quad \text{y}$$

$$A\cdot B := \{a_1b_1 + \ldots + a_nb_n \ / \ a_i \in A \text{ y } b_i \in B,\ 1 \leq i \leq n\}.$$

Es claro que $A*B \in \wp_\alpha(R)$ y que si A y B son no-vacíos, entonces $A\cdot B$ es justo el ideal de R generado por $A*B$. Además, $A\cdot B = \phi \Leftrightarrow A = \phi$ o $B = \phi$.

(6) Si $X \subseteq R$, denotaremos por Ab(X) a la intersección de todas las partes absorbentes de R que contienen a X y la llamaremos la **parte absorbente de R generada por X**. Es claro que $Ab(\phi) = \phi$; mientras que si $X \neq \phi$, entonces

$$Ab(X) = \{rxs \ / \ r,s \in R \text{ y } x \in X\}.$$

En particular, si $X = \{x\}$, entonces

$$Ab(x) := Ab(\{x\}) = \{ rxs \ / \ r,s \in R\}.$$

Notar que si x está en el centro de R, entonces $Ab(x) = Rx = xR$ y así, si R es conmutativo, toda parte absorbente no-vacía de R es una unión de ideales principales de R.

(7) El retículo completo $(\wp_\alpha(R), \cap, \cup)$ es local y du-local, pues si

$$\mathcal{M} := \{a \in R \ / \ ras \neq 1, \ \forall r,s \in R\},$$

entonces $\mathcal{M}$ es el único coátomo de $\wp_\alpha(R)$ y es claro que $\{0\}$ es el único átomo de $\wp_\alpha(R)$. En general,

$$A_\infty \subseteq \mathcal{M} \subseteq R - U(R) \ \text{ y } \ \mathcal{M} \subseteq \mathcal{M} + \mathcal{M}.$$

Se tiene que $\mathcal{M} = R - U(R) \Leftrightarrow$ el anillo R es directamente finito (Proposición (3.1) en [12]). Además,

$$\mathcal{M} + \mathcal{M} = \mathcal{M} \ \text{ ó } \ \mathcal{M} + \mathcal{M} = R.$$

En el primer caso, $\mathcal{M} = A_\infty$ es el ideal propio más grande de R y así, $\mathcal{M} \in \mathrm{Spec}(R)$. Por otro lado, si

$$\mathcal{M} + \mathcal{M} = R,$$

es claro que

$$\mathcal{M} \notin \beta(R) \ \text{ y } \ R \cdot \mathcal{M} = \mathcal{M} \cdot R = R.$$

Puede ocurrir que $A_\infty \in \beta(R)$ y que R no sea un anillo local tal y como lo muestra el siguiente ejemplo, el cual fue comunicado al autor, vía e-mail, por el profesor Jorge Viola-Prioli.

Ejemplo: Sean K un cuerpo, V un K-espacio vectorial de dimensión numerable y $R = \mathrm{End}_K(V)$. Es bien conocido que $\beta(R) = \{0, I, R\}$, siendo $I = \{f \in R \ / \ f$ tiene rango finito$\}$. Así, $A_\infty = I$ es un ideal de R y es claro que R no es un anillo local (de hecho, R ni siquiera es un anillo directamente finito). Notar también que al ser R un anillo regular (en el sentido de von Neumann), se tiene que $J(R) = 0$, donde $J(R)$ denota el radical de Jacobson de R. Así pues, en este caso, se tiene que $J(R) \neq A_\infty$ y $A_\infty \in \beta(R)$, lo cual responde negativamente a un problema propuesto por el autor en [12], a saber: si $A_\infty \in \beta(R)$, ¿será $A_\infty = J(R)$? Más aún, se tiene q' $\mathcal{M} = A_\infty$ (esto último fue comunicado al autor por el profesor Jaime Bravo Puebla), con lo cual R es un ejemplo de un anillo no-local tal que $\mathcal{M} \in \beta(R)$, cuya existencia había sido conjeturada en [12].

Para cada $Y \in \beta(R)$, denotaremos por $\eta[I]$ a la familia de ideales a izquierda de R que contienen a I.

§2. Primitud sobre $\wp_\alpha(R)$

(2.1) Para motivar las dos nociones de primitud y de radical primo que estudiaremos sobre el retículo completo y local $\wp_\alpha(R)$, comenzaremos introduciendo estas nociones sobre un semigrupo parcialmente ordenado con elemento máximo arbitrario, el cual, por brevedad, llamaremos simplemente un po-semigrupo (en analogía con la noción de po-grupo estudiada en [2]).

Definición: Un **po-semigrupo** es una terna $(S, \leq, \cdot)$ que satisface las siguientes condiciones:

(1) El par $(S, \cdot)$ es un semigrupo.
(2) El par $(S, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado.
(3) La multiplicación $\cdot$ es compatible con la relación de orden $\leq$ (i.e., si $x \leq y$ en S y $u,v \in S$, entonces $u \cdot x \cdot v \leq u \cdot y \cdot v$ en S).
(4) Existe un elemento $m \in S$ tal que

$$x \leq m \text{ en S, para cada } x \in S.$$

En lo sucesivo denotaremos un po-semigrupo $(S, \leq, \cdot)$ simplemente por S, dejando implícitos los demás datos $\leq$ y $\cdot$, así como su elemento máximo m.

Sean $x, \pi \in S$. Diremos que x es un **elemento propio de S** si y solo si $m \cdot x \neq m$ en S; y denotaremos por Proper(S) al conjunto de los elementos propios de S. Además, diremos que π es un **elemento primo de S** si y solo si π es un elemento propio de S que satisface la siguiente condición:

(P) Si $x,y \in S$ con $x \cdot y \leq \pi$ en S, entonces $x \leq \pi$ o $y \leq \pi$ en S.

Denotaremos por Prime(S) al conjunto de elementos primos de S. También, diremos que **S tiene suficientes elementos primos** si y solo si para cada elemento propio x de S, existe un elemento primo π de S tal que $x \leq \pi$ en S. En tal caso, para cada elemento propio x de S, pondremos

$$\text{S-rad}(x) := \text{Inf}\{\pi \in S \,/\, x \leq \pi \text{ en S}\} \text{ en S},$$

siempre que este infimum exista en S. En los modelos concretos que estudiaremos en este trabajo, S será siempre un retículo completo y así, S-rad(x) estará bien definido, para cada $x \in$ Proper(S). Llamaremos a S-rad(x) el **radical S-primo de x**.

Notar que si $m \cdot m \neq m$ en S (i.e., si m es un elemento propio de S), entonces

$$\mathrm{Proper}(S) = S.$$

En lo sucesivo, supondremos que $m \cdot m = m$. De hecho, todos los modelos concretos considerados en este trabajo satisfacen esta condición.

Ejemplo: Si $/^{du}$ denota la relación dual de la relación de divisibilidad usual definida sobre el conjunto **N** formado por los números enteros positivos y $\cdot$ denota la multiplicación usual en **N**, entonces la terna (**N**, $/^{du}$, $\cdot$) es un po-semigrupo con elemento máximo $m = 1$. Asimismo, las ternas

$$(\beta(R), \subseteq, \cdot), (\eta[O], \subseteq, \cdot), (\wp_\alpha(R), \subseteq, *) \text{ y } (\wp_\alpha(R), \subseteq, \cdot),$$

en donde $\cdot$ denota, respectivamente, la multiplicación usual en $\beta(R)$, $\eta[0]$ y $\wp_\alpha(R)$, son po-semigrupos con elemento máximo $m = R$; y todos estos ejemplos de po-semigrupos tienen suficientes elementos primos. Además es claro que en el modelo $(\beta(R), \subseteq, \cdot)$ las nociones de “elemento propio”, “elemento primo” y “radical primo” coinciden con las respectivas nociones usuales en teoría de ideales. Por otro lado, G. Michler en [11], y por sugerencia de J. Lambek (véase p. vi en [9]), estudia la noción de primitud en el modelo $(\eta[O], \subseteq, \cdot)$ y logra generalizar para el caso no-conmutativo un Teorema debido a I. S. Cohen [3], a saber: el anillo R es Noetheriano a izquierda si y solo si cada **ideal a izquierda primo de R** (i.e., un elemento primo en el modelo $(\eta[O], \subseteq, \cdot)$), está finitamente generado.

El objetivo principal de este trabajo es estudiar las nociones de elemento propio, elemento primo y radical primo en los modelos restantes $(\wp_\alpha(R), \subseteq, *)$ y $(\wp_\alpha(R), \subseteq, \cdot)$.

(2.2) Usaremos las siguientes notaciones:

$$S_1 := (\wp_\alpha(R), \subseteq, *) \text{ y } S_2 := (\wp_\alpha(R), \subseteq, \cdot).$$

Además, para i = 1 y 2, indicaremos las nociones de “elemento propio”, “elemento primo” y “radical primo” en S_i por **elemento i-propio**, **elemento i-primo** y **radical i-primo**, respectivamente.
Dado que S_1 y S_2 denotan po-semigrupos que difieren tan sólo en la operación de multiplicación, podemos, y así lo haremos, preguntarnos por

las distintas relaciones existentes entre las nociones recién introducidas. Por ejemplo, es claro que, en general, todo elemento 2-propio es también un elemento 1-propio. Sin embargo, la recíproca es falsa, tal como lo demuestra el siguiente resultado cuya demostración es directa.

Proposición: Las siguientes condiciones son equivalentes:

(1) Todo elemento 2-propio de $\wp_\alpha(R)$ es también un elemento 1-propio.
(2) $M \in \mathrm{Proper}(S_2)$.
(3) $M \in \beta(R)$.
(4) $M \in A_\infty$ es un ideal primo de R
(5) a) La familia $\mathrm{Proper}(S_2)$ es cerrada bajo uniones finitas (arbitrarias). y
b)$A_\infty = M$. ∎

Las condiciones a) y b) en la parte (5) de la Proposición anterior son independientes. En efecto, para ver que a) no implica b), por la proposición (3.1) en [12], basta tomar como R un anillo simple directamente finito y no-local; mientras que para ver que b) no implica a), considérese un anillo conmutativo no-local arbitrario (véase la Proposición en la parte (2.3) siguiente).

Observaciones:

(1) Si $X = \mathrm{Prime}(S_1)$ o $\mathrm{Prime}(S_2)$, entonces $\mathrm{Spec}(R) = X \cap \beta(R)$.
(2) Es claro que:

$$\mathrm{Proper}(S_1) = \{A \in \wp_\alpha(R) \ / \ A \neq R\} \text{ y}$$
$$\mathrm{Proper}(S_2) = \{A \in \wp_\alpha(R) \ / \ R \cdot A \neq R\}.$$

(Recordar que $R \cdot A$ es justo el ideal de R generado por A, si $A \neq \phi$) Así, M y A_∞ son los supremos de los conjuntos $\mathrm{Proper}(S_1)$ y $\mathrm{Proper}(S_2)$ en $\wp_\alpha(R)$, respectivamente.

(3) Sea $A \in \mathrm{Proper}(S_1)$. Es fácil ver que $A \in \mathrm{Prime}(S_1) \Leftrightarrow$ cada vez que $aRb \subseteq A$, con a y $b \in R$, se tiene que $a \in A$ o $b \in A$. De donde M es un elemento 1-primo de $\wp_\alpha(R)$ y, por la Proposición anterior, M no necesita ser un elemento 2-primo de $\wp(R)$.

(4) Es claro que $A_\infty \in \mathrm{Proper}(S_2) \Leftrightarrow A_\infty \in \beta(R)$. Sin embargo, en general, A_∞ satisface la propiedad (P), relativa a S_2, en la definición de elemento primo de un po-semigrupo arbitrario; i.e., si A y $B \in \wp_\alpha(R)$ tales que $A \cdot B \subseteq A_\infty$ entonces $A \subseteq A_\infty$ o $B \subseteq A_\infty$.

(5) Si R es un anillo conmutativo y M es un módulo no-nulo, entonces A(M) es un elemento 1-primo de $\wp(R)$. En efecto, basta observar que, en tal caso,

$$A(M) = \{a \in R \,/\, ax = 0, \text{ para algún } x \in M,\ x \neq 0\}.$$

Así pues, en el caso conmutativo no-local, tenemos elementos 1-primos de $\wp_\alpha(R)$ que no necesitan ser ideales primos de R (e.g., $A_\infty = A(C_\infty) = R - U(R)$).

(6) Si R tiene elementos idempotentes centrales no-triviales (i.e., distintos de 0 y 1), entonces es fácil ver que $R{\cdot}A_\infty = R$. De donde, si B(R) denota el álgebra Booleana formada por los elementos idempotentes centrales de R, tenemos el siguiente resultado:

Lema: Si A_∞ es un ideal de R, entonces $B(R) = \{0, 1\}$.∎

La recíproca del Lema anterior es claramente falsa; e.g., tomar como R un dominio (conmutativo) no-local.

(7) Sea S un po-semigrupo con suficientes elementos primos que es un retículo completo con la relación de orden subyacente. Entonces, es fácil ver que la aplicación c: $S \to S$, definida por:

$$\overline{x} := c(x) = \begin{cases} S\text{-rad}(x), & \text{si } x \in \text{Proper}(S) \\ m, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

para cada $x \in S$, determina un operador clausura sobre el retículo completo S.

(8) Sea $B \in \text{Proper}(S_2)$. Es claro que si $B \in \text{Prime}(S_1)$, entonces $B \in \text{Prime}(S_2)$. De donde,

$$S_2\text{-rad}(A) \subseteq S_1\text{-rad}(A),$$

para cada $A \in \text{Proper}(S_2)$.

(9) En el modelo $(\eta[0], \subseteq, \ )$ se tiene que: si $P \in \text{Proper}(\eta[0])$, las siguientes condiciones son equivalentes:

i) $P \in \text{Prime}(\eta[0])$ (i.e., si $I, J \in \eta[0]$ tales que $I{\cdot}J \leq P$ en $\eta[0]$, entonces $I \leq P$ o $J \leq P$ en $\eta[0]$).

ii) Si $aRb \subseteq P$, con a y $b \in R$, se tiene que $a \in P$ o $b \in P$.

iii) El módulo cociente R/P es primo. (Un módulo no-nulo M se dice **primo** si y solo si $(0{:}M)=(0{:}N)$, para cada $0 \neq N \leq_R M$.)

Así pues, en particular, todo ideal a izquierda maximal de R (i.e., un coátomo de $\eta[0]$) es un elemento primo en el modelo $(\eta[0], \subseteq, \cdot)$.

(2.3) El siguiente resultado es una extensión del Teorema (5.2) en [12].

Proposición: Las siguientes condiciones son equivalentes:

(1) A_∞ es un ideal de R.
(2) El retículo completo $\beta(R)$ es local.
(3) Cada ideal propio I de R es **β(R)-superfluo en R** (i.e., si J es un ideal de R tal que I + J = R, entonces J = R).
(4) Cada ideal principal propio de R es β(R)-superfluo en R.
(5) La familia Proper(S_2) es cerrada bajo uniones arbitrarias.
(6) La familia Proper(S_2) es cerrada bajo uniones finitas.
(7) La familia Proper(S_2) es un subretículo completo de $\wp_\alpha(R)$, cuyo elemento máximo es A_∞ .

Demostración:
Las partes (1) $\Rightarrow$(2), (3) $\Rightarrow$ (4), (5) $\Rightarrow$ (6) y (7) $\Rightarrow$ (1) son inmediatas.
(2) $\Rightarrow$ (3): Por (2), si I y J son ideales propios de R, entonces se tiene que $I + J \leq A_\infty \neq R$.
(4) $\Rightarrow$ (5): Por (4) y el Teorema (5.2) en [12], A_∞ es un ideal propio de R y así, A_∞ es el elemento máximo de Proper(S_2).
(6) $\Rightarrow$ (7): Como claramente (5) $\Rightarrow$ (7), basta ver que (6) $\Rightarrow$ (5). Sean $\{A_i\}$ una familia arbitraria en Proper(S_2), $A = \bigcup_i A_i$ y supongamos que $R{\cdot}A = R$. Entonces, existirían índices $i_1, \ldots, i_n$ para los cuales se tendría que $A_{i_1} + \ldots + A_{i_n} = R$, lo cual contradice (6). ∎

Notar que si I es un ideal β(R)-superfluo en R, entonces I no necesita ser superfluo (i.e., $\eta[0]$-superfluo, definido de manera similar) en R. En efecto, si R es un anillo tal que $J(R) \neq A_\infty \in \beta(R)$ (e.g., tómese el anillo R considerado en el ejemplo de la parte (1.3) anterior) y donde J(R) denota el radical de Jacobson de R, entonces, por la Proposición anterior, el ideal $I = A_\infty$ es β(R)- superfluo en R, pero no es superfluo en R, pues J(R) es la suma de todos los submódulos superfluos de $_RR$ (véase la Proposición (18.3) en [5]).

(2.4) Como en el modelo $(\beta(R), \subseteq, \cdot)$, donde R es un anillo conmutativo, para cada $A \in$ Proper(S_i), con i = 1 y 2, pondremos

$$V_i(A) := \{B \in Proper(S_i) \,/\, A \subseteq B\}.$$

(Recordar que cada S_i tiene suficientes elementos primos).
Es claro que $M \in V_1(A)$, para cada $A \in Proper(S_1)$; mientras que si $A \in Proper(S_2)$, entonces $R \cdot A \neq R$ y así, existe un ideal primo P de R tal que $A \subseteq R \cdot A \subseteq P$. De donde, $P \in V_2(A)$. Ahora si $A \subseteq B$ en $Proper(S_i)$, para cada i = 1 y 2, tenemos que $V_i(B) \subseteq V_i(A)$ y así, S_i-rad(A) $\subseteq S_i$-rad(B).
Usando un Teorema de J. Levitzki [10], que describe los elementos del radical primo de un ideal propio I de R, denotado por rad(I), como el conjunto de elementos fuertemente nilpotentes módulo I de R (véanse [1], [5] o [7]), se sigue que:

$$rad(I) = S_1\text{-}rad(I), \text{ para cada } I \in \beta(R) - \{R\}.$$

En particular, para I = 0, se tiene que

$$rad(R) := rad(0) = \cap\, Prime(S_1).$$

Veamos ahora que, para el caso conmutativo, la noción de radical 2-primo coincide con la noción usual de radical primo sobre los ideales propios de R.

Proposición: Si R es un anillo conmutativo e I es un ideal propio de R, entonces rad(I) = S_2-rad(I).

Demostración:
Es claro que S_2-rad(I) $\subseteq$ rad(I). Ahora, si $a \in$ rad(I), existe un $n \in \mathbf{N}$ tal que $a^n \in I$. Si $n = 1$, $a \in I \subseteq S_2$-rad(I). Por otro lado, si $n > 1$ y $B \in V_2(I)$, entonces $Ra \cdot Ra^{n-1} = Ra^n \leq I \subseteq B$ y así, $Ra \subseteq B$ o $Ra^{n-1} \subseteq B$. Supongamos que $Ra \not\subset B$. Entonces, sería $Ra^{n-1} \subseteq B$ y $n > 2$. Luego, como $Ra \cdot Ra^{n-2} = Ra^{n-1} \subseteq B$ y $Ra \not\subset B$, tendríamos que $Ra^{n-2} \subseteq B$ y $n > 3$. Continuando de esta manera, después de n pasos, obtendríamos que $Ra \subseteq B$, lo cual es una contradicción. Por tanto, $a \in B$ y así, $a \in S_2$-rad(I). ∎

El autor desconoce si la Proposición anterior vale ó no para el caso no-conmutativo.

(2.5) Sean $a \in R$ y $A \in \wp_\alpha(R)$. Una **m-sucesión de a** es una sucesión $\{a_n \,/\, n \geq 0\}$ de elementos de R tal que

$$a_0 = a \quad y \quad a_{n+1} \in a_n R a_n, \text{ para cada } n \geq 0.$$

Ahora, diremos que a es un **elemento A-fuertemente nilpotente** (abreviado, **A-f.n.**) **de R** si y solo si toda m-sucesión de a, digamos

$\{a_n \,/\, n \geq 0\}$, **se anula módulo A** (i.e., existe un índice $k \in \mathbf{N}$ para el cual $a_k \in A$ y así, $a_n \in A$, para cada $n \geq k$). Es claro que las nociones de elemento fuertemente nilpotente y elemento $\{0\}$-f.n., coinciden; y que todo elemento fuertemente nilpotente de R es también un elemento A-f.n. de R, para cada $A \in \wp_\alpha(R) - \{\phi\}$.
Para cada $A \in \wp_\alpha(R)$, pongamos

$$\overline{A} := \{a \in R \,/\, a \text{ es un elemento A-f.n. de R}\}.$$

(La notación se debe al Teorema siguiente y a la observación (7) en la parte (2.2) anterior). Es claro que $\overline{\phi} = \phi$, $\overline{R} = R$ y que si $Y \in \beta(R) - \{R\}$, entonces, por el Teorema de Livitzki antes mencionado, $\overline{I} = \mathrm{rad}\ (I)$. Veamos ahora que esta última igualdad vale sobre la familia Proper(S_1).

Teorema: Para cada $A \in$ Proper(S_1) se tiene que $\overline{A} = S_1$-rad(A).
Demostración:
Sea $a \in R$, Si $a \notin S_1$-rad(A), existe un $B \in V_1(A)$ tal que $a_0 = a \notin B$. Así, $a \notin A$ y $aRa \not\subset B$. De donde, existe un elemento $a_1 \in aRa - B$. Luego, $a_1 \notin A$ y $a_1Ra_1 \not\subset B$. Continuando de esta manera podemos construir una m-sucesión de a, $\{a_n \,/\, n \geq 0\}$, que no se anula módulo A. De donde, $\overline{A} \subseteq S_1$-rad(A). Supongamos ahora que $X = \{a_n \,/\, n \geq 0\}$ es una m-sucesión de a que no se anula módulo A. Entonces, $X \cap A = \phi$. Consideremos la familia

$$\Sigma = \{B \in \text{Proper}(S_1) \,/\, A \subseteq B \text{ y } X \cap B = \phi\}.$$

Entonces, $A \in \Sigma$, Σ está parcialmente ordenada por la relación de inclusión $\subseteq$ y, por el Lema de Zorn, Σ contiene un elemento maximal, digamos B_0. Veamos que $B_0 \in V_1(A)$. En efecto, es claro que $A \subseteq B_0 \neq R$. Ahora, si $bRc \subseteq B_0$, con b y $c \in R - B_0$, entonces tendríamos que b y $c \in M$ y así, sería $Ab(b) \neq R$ y $Ab(c) \neq R$. De donde, $B_0 \cup Ab(b) \neq R$ y $B_0 \cup Ab(c) \neq R$, lo cual, junto con la maximalidad de B_0, implicarían la existencia de n y $m \in \mathbf{N}$ tales que $a_n \in Ab(b)$ y $a_m \in Ab(c)$. Pero entonces, podríamos escribir

$$a_n = r_1bs_1 \quad \text{y} \quad a_m = r_2cs_2 \text{, con los } r_i \text{ y } s_i \in R.$$

Luego, para $k = \max\{n, m\}$, tendríamos que $a_k \in (a_nRa_n) \cap (a_mRa_m)$ y $a_{k+1} \in a_kRa_k$. De aquí se sigue que $a_{k+1} \in B_0$, contradiciendo la elección de B_0. Luego, por la observación (3) de (2.2), $B_0 \in V_1(A)$ y $X \cap B_0 = \phi$. Por tanto, $a = a_0 \notin B_0$ y $a \notin S_1$-rad(A). ∎

(2.6) Describiremos ahora los elementos del radical 2-primo S_2-rad(A), para cada $A \in$ Proper(S_2) y bajo la condición que A_∞ es un ideal de R. Sea $a \in R$. Llamaremos el **ideal de a** al ideal RaRaR de R, el cual denotaremos por I(a). Además, diremos que una sucesión $\{a_n \ / \ n \geq 0\}$ de elementos de R es una **sucesión bilátera de a** si y solo si satisface que $a_0 = a$ y $a_{n+1} \in I(a_n)$, para cada $n \geq 0$.
Notar que si $a \in R$, entonces se tiene lo siguiente:

(1) $I(a) \leq RaR$ en $\beta(R)$.
(2) $I(a) = R \Leftrightarrow RaR = R$.
(3) Como $aRa \subseteq I(a)$, toda m-sucesión de a es también una sucesión bilátera de a.
Sean $a \in R$ y $A \in \wp_\alpha(R)$. Diremos que a es un **elemento A-bilátero de R** si y solo si toda sucesión bilátera de a se anula módulo A.

Proposición: Si $A \in$ Proper(S_2), entonces se tiene que

$$\{a \in R \ / \ a \text{ es un elemento A-bilátero de R}\} \subseteq S_2\text{-rad}(A).$$

Además, la igualdad vale si A_∞ es un ideal de R.

Demostración:
Sea $a \in R$. La demostración se sigue paralelamente a la anterior, excepto para probar que $B_0 \in V_2(A)$, cuando A_∞ es un ideal de R, donde B_0 es el elemento maximal de la familia

$$\sum = \{B \in \text{Proper}(S_2) \ / \ A \subseteq y \ X \cap B = \phi\},$$

siendo $X = \{a_n \ / \ n \geq 0\}$ una sucesión bilátera de a que no se anula módulo A (i.e., $X \cap A = \phi$ y a no es un elemento A-bilátero de R). Veamos esto. Sean B y $C \in \wp_\alpha(R)$ tales que $B \cdot C \subseteq B_0$ y supongamos que $B \not\subset B_0$ y $C \not\subset B_0$. Entonces, existirían elementos $b \in B - B_0$ y $c \in C - B_0$. Notar que si fuese $R \cdot Ab(b) = R$, existirían elementos r_i y $s_i \in R$ (con $1 \leq i \leq n$) tales que $\sum_i r_i b s_i = 1$ y así, $c = \sum_i r_i b s_i c \in B \cdot C \subseteq B_0$, lo cual es una contradicción. Así pues, $Ab(b) \in$ Proper(S_2) y, análogamente, se tiene que $Ab(c) \in$ Proper(S_2). Luego, como $A_\infty \in \beta(R)$ y por la Proposición en (2.3), tendríamos que $B_0 \cup Ab(b)$ y $B_0 \cup Ab(c)$ están en Proper(S_2). Luego, por la maximalidad de B_0, existirían números enteros n y $m \in \mathbf{N}$ tales que $a_n \in Ab(b)$ y $a_m \in Ab(c)$. De donde, como en la prueba anterior, tendríamos que

$a_{k+1} \in B_0$, para $k = \max\{n, m\}$, lo cual contradice la elección de B_0. Por tanto, $B_0 \in V_2(a)$, $a = a_0 \notin B_0$ y así, $a \notin S_2$-rad(A). ∎

Observaciones Finales:

(1) La noción de po-semigrupo (i.e., semigrupo parcialmente ordenado con elemento máximo) nos permitió considerar en un mismo modelo general los importantes conceptos de elemento primo y radical primo en los modelos concretos $(\mathbf{N}, /^{du}, \cdot)$, $(\beta(R), \subseteq, \cdot)$, $(\eta[0], \subseteq, \cdot)$, $(\wp_\alpha(R), \subseteq, *)$ y $(\wp_\alpha(R), \subseteq, \cdot)$. Además, la excelente descripción de los elementos del radical primo de un ideal propio de R, debida a J. Levitzki, se puede extender al modelo $S_1 = (\wp_\alpha(R), \subseteq, *)$; y si A_∞ es un ideal de R, ésta se puede extender también al modelo $S_2 = (\wp_\alpha(R), \subseteq, \cdot)$. Un problema interesante sería tratar de extender, de alguna manera razonable, las técnicas de J. Levitzki a un po-semigrupo arbitrario.

(2) La condición (3) de la Proposición en (2.3) junto con el hecho bien conocido de que el radical de Jacobson de un módulo M, J(M), coincide con la suma de todos los submódulos superfluos de M (i.e., L(M)-superfluos de M, definidos de manera natural y donde L(M) denota la familia formada por todos los submódulos de M), sugieren el estudio del "radical de Jacobson de M relativo a una familia de submódulos de M, que contiene a M como uno de sus miembros", a saber: Si $L \subseteq L(M)$ tal que $M \in L$ y $N \leq_R M$, diremos que **N es un submódulo *L*-superfluo de M** si y solo si cada vez que $N + H = M$, con $H \in L$, se tiene que $H = M$.
Ahora pongamos

$$J_L(M) := \sum\{N \leq_R N \,/\, N \text{ es } L\text{-superfluo en } M\}$$

que bien podríamos llamar **el *L*-radical de Jacobson de M.** Las propiedades de este "radical de Jacobson relativo" serán estudiadas por el autor en un trabajo próximo.

(3) Las observaciones (2) - (4) en (1.2), junto a las observaciones (3) y (5) en (1.3), muestran que la asignación $M \mapsto A(M)$ es una $\wp_\alpha$-asignación reticular fuerte sobre la categoría de módulos (en el sentido de [13]). De hecho, , las observaciones antes mencionadas motivaron al autor a considerar un modelo general de L-asignaciones reticulares fuertes sobre la categoría de módulos,

siendo L un retículo completo dado, a saber: A cada módulo M le asignamos un único elemento $\psi(M)$ de L y tal que se satisfacen las siguientes condiciones:
I) Si M y M' son módulos isomorfos, entonces $\psi(M) = \psi(M')$.
II) $\psi(M) = \psi(E(M))$, para cada módulo M.
III) $\psi(\Pi_i M_i) = V_i \psi(M_i)$ en L, para cada familia de módulos $\{M_i\}$.
Este modelo general de L-asignaciones reticulares fuertes sobre la categoría de módulos incluye importantes ejemplos en amplios contextos, tales como las Teorías de Torsión Hereditaria, las Teorías de Descomposición y las Teorías de Dimensión sobre la categoría de módulos.

Referencias

[1] Anderson, Frank W. and Fuller, Kent R.: Rings and Categories of Modules, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 13, Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, (1974).

[2] Birkhoff, Garrett: Lattice Theory, fourth edition, Colloquium Publ. 25, Amer. Math. Soc., Providence R. I., (1964).

[3] Cohen, I. S. : Rings with restricted minimum condition, Duke Math. J. 17 (1950), 27-42.

[4] Faith, Carl: Algebra I: Rings, Modules and Categories I, Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, (1973).

[5] Faith, Carl: Algebra II: Ring Theory, Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, (1976).

[6] Gericke, Helmuth: Lattice Theory, Frederck Ungar Publishing Co., New York, (1966).

[7] Lambek, Joachim: Rings and Modules, third edition, Chelsea, New York, (1986).

[8] Lambek, Joachim: Torsion Theories, Additive Semantics and Rings of Quotients, Lecture Notes in Mathematics, vol. 177, Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, (1971).

[9] Lesieur, Leonce et Croisot, Robert: Sur la decomposition en ideaux primaires dans un anneaux non necessariament commutatif, Comptus Rendus Acad. Sci. Paris 243 (1955), (1988-1991).

[10] Levitzki, J. : Prime ideals and the lower radical, Amer. J. Math. 73 (1951), 25-29.

[11] Michler, Gerhard O. : Prime right ideals and right Noetherian rings, Ring Theory, Ed. Robert Gordon, Academic Press, New York-London, (1972).

[12] Peña P., Alirio J. : Filtros idempotentes y conjuntos anuladores, Divulgaciones Matemáticas 2(1) (1994), 11-35.

[13] Peña P., Alirio J. : Asignaciones reticulares sobre la categoría R-Mod., Preprint, (1995).

[14] Riley, John A. : Axiomatic primary and tertiary decomposition theory, Trans. Amer. Math. Soc. 105 (1962), 177-201.