

# Superficies con Curvatura Media Constante cuyo Borde es un Círculo

*Constant Mean Curvature Surfaces Bounded by a Circle*

Rafael López \* (rcamino@ugr.es)

Departamento de Geometría y Topología  
Universidad de Granada  
18071 Granada, España

## Abstract

En este trabajo se hace un repaso del estado actual de la teoría de las superficies del espacio euclídeo con curvatura media constante que tienen borde no vacío. Mostramos cómo la geometría del borde determina, en cierta medida, la forma de la superficie, centrándonos en el caso en que el borde sea circular.

**Palabras y frases clave:** curvatura media; principio del máximo; método de reflexión de Alexandrov; fórmula de equilibrio.

## Abstract

In this article we survey the state of art of the theory of constant mean curvature surfaces with non-empty boundary. We show the effect of the geometry of the boundary on the shape of the surface, with special attention in the case of circular boundary.

**Key words and phrases:** mean curvature; maximum principle; Alexandrov reflection method; flux formula.

## 1 Introducción

En estado de equilibrio, y bajo ciertas condiciones de idealidad, la superficie libre de un líquido sobre un substrato sólido tiene la misma curvatura media en cada punto. Decimos entonces que es una superficie con curvatura media

---

Recibido 07/06/06. Revisado 10/11/2006. Aceptado 02/12/2006.

MSC (2000): Primary 53A10; Secondary 53C42.

\* Partially supported by a MEC-FEDER grant no. MTM2004-00109.

constante, o abreviadamente, una superficie CMC. Matemáticamente, una superficie CMC del espacio euclídeo  $\mathbb{R}^3$  minimiza localmente el área sin cambiar el volumen que encierra la superficie. Aparte del plano, que tiene curvatura media cero, el ejemplo más sencillo de una superficie CMC es una esfera euclídea: si  $R$  es su radio, entonces la curvatura media es  $H = 1/R$ . Hasta bien entrado el siglo XX, la esfera era la única superficie CMC conocida que era *cerrada*, es decir, compacta y sin borde. De la esfera se habían logrado diferentes caracterizaciones dentro de la familia de superficies CMC y cerradas. Destacamos las dos más importantes:

1. Es la única embebida, es decir, sin autointersecciones (Alexandrov, 1958) [1].
2. Es la única cuya topología es la misma que la esfera euclídea (Hopf, 1951) [8].

En 1986, Wente fue capaz de construir una superficie CMC con la misma topología que un toro [17]. El descubrimiento de esta superficie resultó ser un punto de inflexión en la teoría de superficies CMC, provocando una gran cantidad de trabajos en busca de nuevos ejemplos. En la página web <http://www.gang.umass.edu/gallery/cmc/> de la Universidad de Massachusetts pueden verse imágenes realizadas por ordenador de tales superficies. No insistiremos más en el caso cerrado y remitimos al lector interesado a la correspondiente bibliografía, como por ejemplo, el reciente survey [11].

Abordamos ahora el problema de estudiar las superficies compactas CMC y *con borde (o frontera) no vacío*. El caso más simple de curva frontera es un círculo. Los primeros ejemplos de superficies CMC con borde circular proceden de la esfera. Si atravesamos una esfera con un plano obtenemos dos casquetes esféricos cuyo borde común es una circunferencia y que serán dos semiesferas si el plano pasa por el centro de la esfera. Ver figura 1. El disco plano determinado por el círculo también es una superficie CMC donde, en este caso, el valor de la curvatura media es cero. Surge de forma natural la siguiente pregunta:

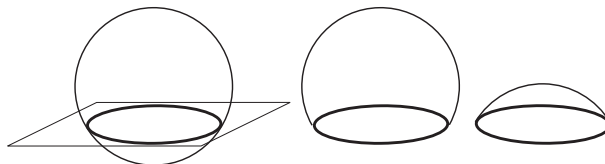


Figura 1: Casquetes esféricos obtenidos al intersecar una esfera por un plano.

¿Cuál es la forma de una superficie compacta con curvatura media constante y cuyo borde es un círculo?

En 1991 Kapouleas demostró la existencia de nuevas superficies compactas CMC con borde circular [10]. Sin embargo, y a diferencia del caso de superficies cerradas, aún no ha sido posible obtener una imagen por ordenador de tales superficies. En contraste con el caso cerrado, y sorprendentemente, aún se tienen planteadas hoy en día las dos siguientes conjeturas:

Conjetura 1. Los discos planos y los casquetes esféricos son las únicas superficies compactas CMC cuyo borde es un círculo y que son *embebidas*.

Conjetura 2. Los discos planos y los casquetes esféricos son las únicas superficies CMC cuyo borde es un círculo y *tienen la misma topología que un disco*.

Dicho de otro modo, en el caso de superficies CMC con borde circular, no ha sido posible probar los teoremas correspondientes de Alexandrov y Hopf enunciados anteriormente. A pesar de ello, veremos en la siguiente sección cómo la experiencia cotidiana nos hace pensar que ambas conjeturas son ciertas. En este artículo de divulgación, repasamos el estado de arte de las superficies CMC con borde circular y, de forma más general, cuando la curva frontera es una curva plana, centrándonos en cómo la forma de dicha curva determina, en cierto modo, la geometría de la superficie que la bordea. Un desarrollo más extenso y preciso puede encontrarse en [14].

Empezaremos en la sección 2 mostrando el sentido físico que subyace en nuestras superficies CMC y su origen en un problema variacional. En la siguiente sección, estudiaremos las consecuencias geométricas que encierra la ecuación de curvatura media constante, enunciando el Principio de Tangencia. En la sección 4 daremos ejemplos de cómo la geometría del borde condiciona las formas de las posibles superficies CMC que la tienen como frontera. En las secciones 5 y 6 abordaremos el estudio de las superficies CMC embebidas, con especial énfasis en el uso del método de Alexandrov y finalizaremos en la sección 7 abordando el caso en el que la superficie CMC sea un disco topológico.

## 2 Gotas líquidas y el problema variacional

Las superficies CMC responden como modelo de numerosos fenómenos físicos. Mostramos el más conocido: las gotas líquidas apoyadas sobre una superficie

sólida. Depositamos una determinada cantidad de líquido (L) en una superficie plana (S) y supongamos que no existen reacciones químicas entre el líquido y el sustrato sólido. Supongamos que el efecto de la gravedad es despreciable (por ejemplo, en un ambiente de microgravedad o en una escala microscópica). En una situación de equilibrio mecánico, la gota líquida alcanza una posición fija y de la cual queremos conocer su forma, concretamente de la interfaz líquido-aire  $S_{LA}$ . El modelo teórico que describe dicha geometría viene determinado por la ecuación de Laplace-Young

$$P_L(p) - P_A(p) = \gamma \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) (p) \quad (1)$$

para cada  $p \in S_{LA}$ . Aquí  $P_L$  y  $P_A$  son las presiones que ejercen cada uno de los medios líquido y aire a cada lado de  $S_{LA}$ ,  $\gamma$  es el coeficiente de la tensión superficial del líquido y  $R_1$  y  $R_2$  son las curvaturas principales de la superficie  $S_{LA}$ . El coeficiente  $\gamma$  viene determinado únicamente por las propiedades físicas-químicas del líquido y mide las fuerzas de cohesión intermoleculares que existen en la interfaz  $S_{LA}$ . Por otro lado, en Geometría Diferencial, la curvatura media de una superficie de  $\mathbb{R}^3$  está definida por  $H = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$ . Concluimos entonces que la ecuación (1) se escribe  $P_L - P_A = 2\gamma H(p)$ . Impongamos ahora condiciones de idealidad, concretamente, que las presiones que se ejercen a cada lado de la interfaz son constantes. Como conclusión:

*La interfaz liquido-aire de una gota de líquida apoyada en un sustrato plano y que se encuentra en equilibrio físico, está modelada por una superficie con curvatura media constante.*

Supongamos ahora que la gota se deposita sobre un dominio de sustrato  $D$  prescrito de antemano, por ejemplo, podemos imaginar que  $D$  es un trozo de (S) con alto grado de mojabilidad (hidrófilo), y que el resto del sustrato,  $(S) \setminus D$ , repele líquido, es decir, no moja (hidrófobo). Ver el esquema en la figura 2. En tal caso, la gota líquida moja todo el dominio  $D$  sin salirse del mismo. En esta situación, la interfaz líquido-sólido  $D$  en (S) está prefijada y por tanto,  $S_{LA}$  es una superficie cuyo borde  $\partial S_{LA}$  es la curva  $C := \partial D$ . Queremos conocer las posibles configuraciones que puede adoptar la gota en relación a la curva  $C$ .

Desde el punto de vista matemático, las superficies con curvatura media constante pueden ser introducidas al considerar el *problema isoperimétrico*: de entre todas las superficies compactas del espacio que tienen el mismo borde y que encierran un volumen prefijado, encontrar cuáles son las que tienen un área mínima. Si se modifica la cuestión y se pide buscar las soluciones del problema isoperimétrico hasta el primer orden, entonces tenemos el siguiente

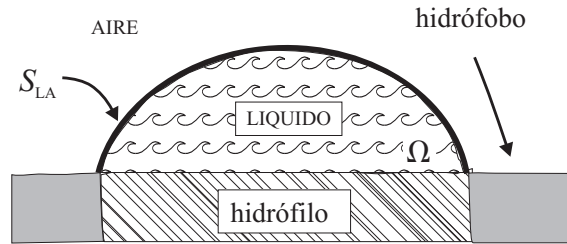


Figura 2: Una gota líquida apoyada sobre un substrato hidrófilo  $D$ .

**Problema variacional.** Dada una curva cerrada  $C$  y un volumen prefijado  $V$ , caracterizar aquellas superficies con frontera  $C$  del espacio euclídeo cuya área es crítica para todas las variaciones que dejan invariante el borde y el volumen de la superficie.

Si una superficie  $S$  de  $\mathbb{R}^3$  la consideramos como una parametrización diferenciable  $\phi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ , donde  $\Sigma$  es un dominio del plano  $\mathbb{R}^2$ , decimos que  $C$  es el borde de  $S$  si  $\phi|_{\partial\Sigma} \rightarrow C$  es una parametrización de la curva  $C$ .

**Definición 1.** Una variación de  $\phi$  es una aplicación diferenciable  $\Phi : \Sigma \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que las aplicaciones  $\Phi_t := \Phi(-, t) : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$  son parametrizaciones de superficies con el mismo borde que  $\phi$  y  $\Phi_0 = \phi$ .

Consideramos los funcionales  $A(t)$  y  $V(t)$  que miden, respectivamente, el área y volumen encerrado de cada una de las superficies  $S_t := \Phi_t(\Sigma)$ . Queremos hallar los puntos críticos de  $A(t)$  asumiendo que el volumen de las superficies se mantiene constante. Usando multiplicadores de Lagrange, buscamos puntos críticos en  $t = 0$  del funcional

$$J(t) = A(t) + \lambda V(t),$$

con  $V(t) = \text{cte}$  y  $\lambda$  una constante. Una computación de dicha derivada nos dice que  $J'(0) = 0$  para cualquier variación si y sólo si  $S$  tiene curvatura media  $H = -\lambda/2$  [11]. Por tanto:

**Teorema 1.** Una superficie compacta  $S \subset \mathbb{R}^3$  y con borde una curva cerrada  $C$  tiene curvatura media constante si y sólo si es un punto crítico del funcional área para todas las variaciones de  $S$  que encierran su mismo volumen.

Volviendo a las gotas líquidas, éstas alcanzan su posición de equilibrio cuando el sistema físico llega a un estado de energía mínima. En nuestra hipótesis de idealidad, la única fuerza que actúa sobre las gotas es la debida a la tensión superficial, y ésta es proporcional al número de moléculas existentes en la interfaz  $S_{LA}$ , es decir, al área de  $S_{LA}$ . Por tanto, la energía se corresponde proporcionalmente con el área de  $S_{LA}$ . Ya que el volumen de la gota líquida se mantiene constante, la interfaz  $S_{LA}$  tiene curvatura media constante en el momento en el que ocurre el punto de equilibrio.

El conocimiento de la forma de las interfaces es un importante objetivo en numerosos campos de ciencia aplicada, tales como la nanotecnología, los nuevos materiales, coloides, medicina, etc. Un ejemplo tipo es el siguiente. Se busca un pegamento líquido que se adhiera a un determinado metal. Diferentes experimentos con gotas de líquidos de composiciones variadas van mostrando al científico la que mejor se adapta a sus necesidades. El científico quiere clasificar dichas sustancias y para ello necesita determinar el valor de la tensión superficial. Experimentalmente va conociendo la forma de las gotas del líquido (por ejemplo, mediante el procesamiento de imágenes digitales), y de ahí, la curvatura media  $H$  de la interfaz  $S_{LA}$ . Las condiciones ambientales informan sobre el término  $P_L - P_A$ . Finalmente, de la ecuación de Laplace-Young (1) se obtiene el valor  $\gamma$  del pegamento. Véase más detalles y ejemplos en [6, 7, 9].

Por otro lado, las superficies CMC aparecen frecuentemente en la vida diaria. Ejemplos de ellas son las pompas de jabón. Un experimento sencillo de realizar es el siguiente. En una solución acuosa con jabón líquido, introducimos un extremo de una pipeta de sección cilíndrica y la volvemos a sacar de forma que en el extremo se forme una película de jabón. Lentamente, vamos soplando por el otro extremo. Conforme vamos introduciendo aire en la pipeta, observamos cómo aparece en el otro extremo una pompa de jabón cada vez más grande. En este momento, tapamos con un dedo el extremo por dónde soplamos, de manera que la pompa formada no se desprenda de la pipeta. El dedo impide que el aire salga de la pipeta y provoca que desde el interior, el aire ejerza una presión constante sobre la pompa de jabón. En el otro lado de la pompa de jabón la presión atmosférica se mantiene constante. En esta situación, la película de jabón es una interfaz aire-aire con presiones diferentes a ambos lados de la misma. Observamos entonces que la forma de la pompa de jabón se corresponde con la de un casquete esférico de la figura 1 cuya frontera es el borde circular de la pipeta.

Aunque experimentalmente, es evidente que las formas de las pompas de jabón son esféricas, veremos en este artículo cómo desde el punto de vista matemático la situación es mucho más complicada. Sin embargo... ¡los esquiadores ya conocen que la forma esférica es la adecuada en la construcción de

sus iglúes!: es de esta manera con la que, con un volumen dado que encierra el iglú, el calor interior perdido es el menor posible ya que dicha pérdida es proporcional al área superficial del iglú.

### 3 La ecuación de curvatura media y el Principio de Tangencia

Nos centramos ahora en un estudio más local y analítico de las superficies CMC y que tendrá, como veremos, unas fuertes consecuencias geométricas. Toda superficie  $S$  se puede expresar, en un entorno de cada punto, como el grafo de una función diferenciable  $f = f(x, y)$  definida en cierto dominio  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ . Elegimos como orientación de  $S$  la determinada por la aplicación de Gauss

$$N = \frac{(-f_x, -f_y, 1)}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}},$$

donde los subíndices denotan las correspondientes derivadas parciales. La curvatura media  $H$  de la superficie  $z = f(x, y)$  viene dada entonces por la ecuación:

$$(1 + f_y^2)f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy} + (1 + f_x^2)f_{yy} = 2H(1 + f_x^2 + f_y^2)^{\frac{3}{2}}. \quad (2)$$

Observemos que si cambiamos de orientación, es decir,  $-N$  en vez de  $N$ , la curvatura media  $H$  cambia de signo. En particular, toda superficie CMC con  $H \neq 0$  es orientable: basta con ir eligiendo en cada abierto de la superficie aquella aplicación de Gauss que determine un signo prefijado de  $H$ .

La ecuación (2) es de tipo elíptico y no es integrable por cuadraturas. Esto significa que sólo podemos aspirar a una integración numérica de la misma. En el caso de que  $S$  sea una superficie de revolución, la ecuación (2) depende de una única variable y podemos realizar entonces una primera integración. En tal caso, es fácil probar que los casquetes esféricos son las únicas superficies compactas CMC que son rotacionalmente simétricas.

Por el contrario, destacamos un aspecto, más geométrico, que tiene dicha ecuación y que será fundamental en nuestra teoría. Escribimos (2) en la forma

$$\operatorname{div} \left( \frac{\nabla f}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} \right) = 2H, \quad (3)$$

donde  $\operatorname{div}$  y  $\nabla$  son, respectivamente, los operadores divergencia y gradiente. La ecuación (3) se dice que es de tipo divergencia. Puede probarse entonces

que si dos funciones  $f_1$  y  $f_2$  satisfacen (3), la función diferencia  $u = f_1 - f_2$  satisface una ecuación elíptica *lineal*. Las ecuaciones elípticas y lineales tienen la propiedad del *principio del máximo*. Éste puede formularse del siguiente modo: si la función  $u$  alcanza un extremo local en un punto interior  $q \in \Omega$ , o en un punto frontera  $q \in \partial\Omega$  con la hipótesis añadida de que la derivada conormal  $\partial u / \partial \nu$  se anula en  $q$ , entonces  $u = 0$  en un entorno de  $q$ . De aquí se deduce que  $f_1 = f_2$  alrededor de  $q$ .

El principio del máximo tiene una sencilla traducción geométrica. Damos primero la siguiente

**Definición 2.** Se consideran dos superficies orientables  $S_1$  y  $S_2$  con un punto común de tangencia  $p$ . Si  $p \in \partial S_1 \cap \partial S_2$ , suponemos además que las rectas tangentes de ambas curvas  $\partial S_1$  y  $\partial S_2$  coinciden. Orientamos ambas superficies para que las aplicaciones de Gauss coincidan en  $p$  y las escribimos localmente como grafos de funciones  $f_1$  y  $f_2$  sobre el plano tangente alrededor de  $p$ . Decimos que  $S_1$  se encuentra por encima de  $S_2$  alrededor de  $p$  si  $f_1 \geq f_2$ .

**Teorema 2** (Principio de Tangencia). *Consideramos dos superficies  $S_1$  y  $S_2$  tangentes en un punto común  $p$  y tal que  $S_1$  se encuentra por encima de  $S_2$  alrededor de  $p$ . Supongamos que  $S_i$  tiene curvatura media constante  $H_i$ ,  $i = 1, 2$ . Entonces  $H_1 \geq H_2$ . Además, si  $H_1 = H_2$ , ambas superficies coinciden en un abierto que contiene a  $p$ .*

En el caso  $H_1 = H_2$ , y realizando el mismo razonamiento en los puntos de  $S_1 \cap S_2$ , junto con un argumento de conexión, se concluye que las dos superficies coinciden en el mayor abierto posible.

*Nota 1.* Usando la notación anterior, y si suponemos que  $p = (0, 0, f_1(0, 0)) = (0, 0, f_2(0, 0))$  y el plano tangente es horizontal, un cambio de coordenadas nos dice que la expresión de la curvatura media dada por (2) se escribe

$$2H_1(0, 0) = \left( \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2} \right) (0, 0); \quad 2H_2(0, 0) = \left( \frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial y^2} \right) (0, 0)$$

Si  $S_1$  se encuentra por encima de  $S_2$  en  $p$ , entonces  $u$  tiene un mínimo local en  $(0, 0)$ , luego  $u_{xx}(0, 0) \geq 0$  y  $u_{yy}(0, 0) \geq 0$ , es decir,  $H_1(p) \geq H_2(p)$ . Por tanto, el Principio de Tangencia adquiere su verdadero interés en el caso de la igualdad  $H_1 = H_2$ ,

Una consecuencia inmediata del Principio de Tangencia es

**Corolario 1.** *Si  $C$  es una curva plana, la única superficie compacta con  $H = 0$  y borde  $C$  es el dominio plano que encierra  $C$ .*



*Demostración.* Por reducción al absurdo, supongamos que la superficie  $S$  tiene puntos fuera del plano  $\Pi$  que contiene a  $C$ , por ejemplo, por encima de  $\Pi$ . Si  $p \in S$  es el punto más alto, consideramos el plano tangente  $T_p S$  a  $S$  en  $p$ . Como un plano tiene curvatura media  $H = 0$ , podemos orientar  $S$  y  $T_p S$  para que ambas orientaciones coincidan en  $p$  y apunten hacia arriba (y las curvaturas medias siguen siendo 0 en ambas superficies). Como  $T_p S$  se encuentra por encima de  $S$ , entonces en un abierto de  $S$  alrededor de  $p$ ,  $T_p S = S$ , es decir, la superficie  $S$  es plana. Por un argumento de conexión, toda la superficie  $S$  es un abierto de  $T_p S$ , en contradicción con que  $C \subset \Pi$ .  $\square$

Ya que en este trabajo estamos considerando curvas fronteras que son planas, el caso de curvatura de curvatura media  $H = 0$  carece de interés. Por tal razón, supondremos en el resto de este artículo que una superficies CMC tienen curvatura media  $H \neq 0$ .

*Nota 2.* Las superficies con curvatura media constante  $H = 0$  se llaman *superficies minimales* y se corresponden, en el problema variacional, con puntos críticos del funcional área (sin preservar el volumen de las superficies de la variación). El Corolario 1 nos dice que las superficies minimales *compactas* cuyo borde es una curva plana, son dominios planos. Las superficies minimales de  $\mathbb{R}^3$  han tenido desde siglos un gran interés matemático. Véase [5].

## 4 El borde condiciona la forma de la superficie

A lo largo del resto de este artículo todas las curvas cerradas planas serán curvas de Jordan. Consideramos  $C$  una curva de este tipo contenida en el plano  $\Pi = \{x \in \mathbb{R}^3; \langle x, \vec{a} \rangle = 0\}$ , con  $|\vec{a}| = 1$ , y denotamos por  $D$  el dominio acotado que determina en  $\Pi$ . Sea una superficie  $S$  compacta CMC con borde  $C$  y un campo de Killing  $Y$  del espacio euclídeo  $\mathbb{R}^3$ , es decir,  $Y$  es el campo determinado por un grupo de isometrías del espacio ambiente. La fórmula de la variación primera  $\delta_Y A$  del área  $A$  de la superficie  $S$  a lo largo  $Y$  da

$$\delta_Y A = -2H \int_S \langle N, Y \rangle dS - \int_{\partial S} \langle Y, \nu \rangle ds,$$

donde  $N$  es la aplicación de Gauss de  $S$ ,  $\nu$  representa el vector conormal interior unitario a lo largo de  $\partial S$  y  $ds$  es el elemento de arco de  $\partial S$ . Tomamos el campo vectorial  $Y$  de traslaciones en la dirección de  $\vec{a}$ . Como  $Y$  genera isometrías del espacio ambiente, la variación primera del área  $A$  es cero. Por tanto,

$$2H \int_S \langle N, \vec{a} \rangle dS + \int_{\partial S} \langle \nu, \vec{a} \rangle ds = 0. \quad (4)$$

La primera integral se puede cambiar a una integral sobre la frontera  $\partial S$  del siguiente modo. La divergencia del campo vectorial  $Z_p = (p \wedge \vec{a}) \wedge N(p)$ ,  $p \in S$ , es  $\text{div} Z = -2\langle N, \vec{a} \rangle$ . El teorema de divergencia junto con (4) implica

$$\int_{\partial S} \langle \nu, \vec{a} \rangle ds + H \int_{\partial S} \langle \alpha \wedge \alpha', \vec{a} \rangle ds = 0, \quad (5)$$

donde  $\alpha$  es una parametrización de  $\partial S$  tal que  $\alpha' \wedge \nu = N$ . Como  $\langle \alpha \wedge \alpha', \vec{a} \rangle$  es la función soporte (con signo) del borde, concluimos

$$\int_{\partial S} \langle \nu, \vec{a} \rangle ds = 2HA_g(D), \quad (6)$$

donde  $A_g(D)$  es el área algebraica de  $D$ . Esta igualdad, o la (5), es conocida como *fórmula de equilibrio*: es una ley de conservación en el sentido de Noether que refleja el hecho de que el área (el potencial) es invariante por el grupo de traslaciones del espacio euclídeo. Por otro lado, la fórmula puede verse como un equilibrio físico entre las fuerzas de la tensión superficial de  $S$  que actúan a lo largo de su borde (término de la izquierda en (6)) con las fuerzas de presión que actúan sobre el dominio plano  $D$  (término de la derecha en (6)). Véase la figura 3.

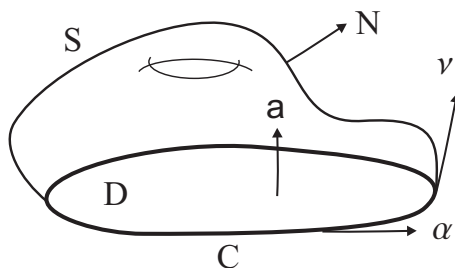


Figura 3: Esquema de la fórmula de equilibrio.

Tomando valores absolutos en ambos miembros de (6) y acotando  $\langle \nu, \vec{a} \rangle$  por 1, concluimos:

**Teorema 3.** Consideramos una curva cerrada plana  $C$ . Si  $H$  es la curvatura media de una superficie CMC cuyo borde es  $C$ , entonces

$$|H| \leq \frac{\text{longitud}(C)}{2\text{área}(D)}. \quad (7)$$

En particular, si  $C$  es un círculo de radio  $R > 0$ ,

$$|H| \leq \frac{1}{R}. \tag{8}$$

Por tanto, dada una curva  $C$ , el valor  $H$  de la curvatura media de las posibles superficies CMC que la tienen como curva frontera *no es arbitrario*, sino que viene impuesto por la geometría del borde, en particular, de su longitud y del área que encierra.

*Nota 3.* Para el caso concreto en que  $S$  es el grafo de una función  $f$  definida en el dominio  $D$ , la desigualdad (7) se obtiene como consecuencia del teorema de la divergencia en la ecuación (3):

$$\begin{aligned} 2|H|\text{área}(D) &= \left| \int_D 2H \, dD \right| = \left| \int_{\partial D} \left\langle \frac{\nabla f}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}, \vec{n} \right\rangle ds \right| \\ &\leq \int_{\partial D} \frac{|\nabla f|}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}} ds < \int_{\partial D} 1 \, ds = \text{longitud}(C), \end{aligned}$$

donde  $\vec{n}$  es el vector conormal plano unitario a lo largo de  $\partial D$ .

Cuando  $C$  es un círculo de radio  $R$ , los casos extremos en la desigualdad (8), esto es,  $H = 0$  y  $|H| = 1/R$ , están completamente estudiados. Concretamente, si  $H = 0$ , ya sabemos por el Corolario 1 que  $S$  es un disco plano. Por otro lado,

**Teorema 4** ([3]). *Se considera un círculo  $C$  de radio  $R$ . Si  $S$  es una superficie compacta CMC cuyo borde es  $C$  y con  $|H| = 1/R$ , entonces  $S$  es una semiesfera de radio  $R$ .*

*Demostración.* Se va a probar que  $S$  es una superficie umbilical y, por tanto, un abierto de una esfera de radio  $R$ . De aquí,  $S$  es una semiesfera. Usaremos el siguiente hecho conocido para una superficie CMC: los puntos umbilicales son aislados, a no ser que la propia superficie sea umbilical [8, 11].

Supongamos que  $C$  es un círculo en el plano  $x_3 = 0$  y centrado en el origen. Si  $|H| = 1/R$  y volviendo a la demostración de la fórmula de equilibrio y la desigualdad (7), se obtiene que  $|\langle \nu, \vec{a} \rangle| = 1$  a lo largo de  $C$ . Sin perder generalidad, suponemos que  $\nu = \vec{a}$  en  $C$ . Elegimos la aplicación de Gauss  $N$  en  $S$  para que la orientación inducida en  $\partial S = C$  satisfaga  $\alpha \wedge \alpha' = R\vec{a}$ . De la igualdad (5) se deduce que  $H = -1/R$ .

Ya que  $\langle N, \vec{a} \rangle = \langle N, \nu \rangle = 0$  en  $\partial S$ , derivamos respecto del parámetro de arco  $s$  y obtenemos

$$0 = \sigma(\alpha', \alpha') \langle \alpha', \vec{a} \rangle + \sigma(\nu, \alpha') \langle \nu, \vec{a} \rangle = \sigma(\nu, \vec{a}),$$

donde  $\sigma$  representa la segunda forma fundamental de  $S$ . Esto quiere decir que a lo largo de  $\partial S$ , los vectores  $\alpha'$  y  $\nu$  son direcciones principales. Por otro lado, del hecho de que  $C$  es un círculo de radio  $R$ ,  $\alpha'' = -\frac{1}{R^2}\alpha$ . Entonces

$$\sigma(\alpha', \alpha') = -\langle N', \alpha' \rangle = \langle N, \alpha'' \rangle = -\frac{1}{R^2} \langle N, \alpha \rangle = \frac{-1}{R} \langle \nu, \vec{a} \rangle = -\frac{1}{R} = H,$$

es decir, todos los puntos de  $\partial S$  son umbilicales. Como ya hemos comentado, esto implica directamente que la superficie es umbilical.  $\square$

Otra caracterización de la semiesfera en la familia de las superficies compactas CMC ha sido obtenida recientemente por el autor en [15].

## 5 El método de reflexión de Alexandrov

Ya hemos comentado que el teorema de Alexandrov no es generalizable al caso en que la frontera  $C$  sea un círculo: véase la Conjetura 1 para el caso de que la superficie sea cerrada. Si volvemos a la situación de que la superficie sea compacta y cerrada, dicho teorema fue verdaderamente sorprendente, no por su contenido, que era esperado, sino por la original forma de demostración. Desde entonces ese método, llamado *el método de reflexión de Alexandrov*, ha sido usado en amplios campos de la Geometría Diferencial. Desde el punto de vista geométrico, dicha técnica se reduce a usar el Principio de Tangencia para comparar una superficie CMC consigo misma. Recordaremos dicho método en el caso  $\partial S \neq \emptyset$  y señalaremos porqué no se puede dar una respuesta definitiva a la Conjetura 1.

**Teorema 5.** *Se considera un círculo  $C$  contenido en un plano  $\Pi$ . Sea  $S$  una superficie compacta CMC cuyo borde es  $C$ . Si  $S$  es embebida y se encuentra a un lado de  $\Pi$ , entonces  $S$  es un casquete esférico.*

*Demostración.* Lo primero que hay que decir, para comparar con la Conjetura 1, es que la hipótesis extra que se añade es que  $S$  se encuentre a un lado del plano  $\Pi$ . Después de un cambio de coordenadas, podemos suponer que  $C \subset \Pi = \{x_3 = 0\}$ , y que  $S$  se encuentra por encima de  $\Pi$ . La superficie  $S$  junto con el dominio  $D$  acotado por  $C$  en  $\Pi$ , define un dominio acotado  $W$  del espacio  $\mathbb{R}^3$ . Empezamos tomando una aplicación de Gauss  $N$  de forma que apunte hacia el exterior de  $W$ . Esto es posible por el hecho de estar  $S$  por encima de  $\Pi$ . Se fija un vector horizontal  $\vec{v}$ , el cual podemos suponer que es  $\vec{v} = (1, 0, 0)$ , y orientamos el eje  $x_1$  de "izquierda a derecha", según la figura 4.

Se considera una familia de planos  $P(t)$  perpendiculares a  $\vec{v}$  parametrizados por  $P(t) = \{x \in \mathbb{R}^3; x_1 = t\}$ . Ya que la superficie es acotada, para  $t$  cerca

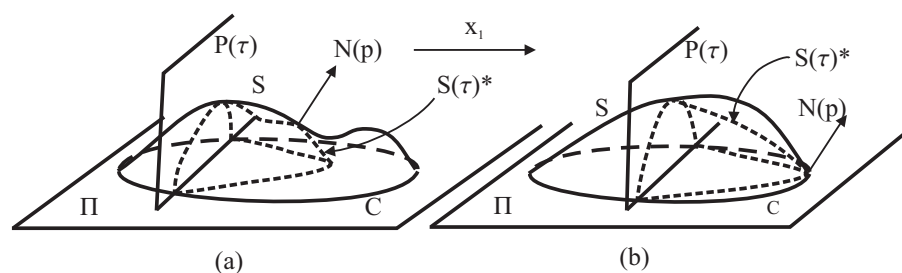


Figura 4: El método de reflexión de Alexandrov.

de  $-\infty$ ,  $P(t)$  no interseca  $S$ . Desplazamos  $P(t)$  hacia la derecha, es decir, hacemos  $t \nearrow \infty$  hasta el primer instante  $t_0$  tal que  $P(t_0)$  toca  $S$ . Movemos un poco más  $P(t)$  hacia la derecha. Denotamos por  $S(t)^-$  y  $S(t)^+$  las partes de  $S$  a la izquierda y derecha de  $P(t)$  respectivamente. Si  $S(t)^*$  es la reflexión de  $S(t)^-$  respecto de  $P(t)$ , el hecho de que  $S$  sea una superficie embebida implica que  $S(t)^*$  se encuentra incluido en  $W$ . Moviendo hacia la derecha  $P(t)$ , y reflejando  $S(t)^-$ , la compacidad de  $S$  implica que habrá un primer momento  $t = \tau$  tal que  $S(\tau)^*$  toca de nuevo por primera vez a  $S(\tau)^+$ . Si el punto de contacto  $p$  es un punto tangente entre  $S(\tau)^*$  y  $S(\tau)^+$ , tanto interior (figura 4, caso (a)) o frontera (figura 4, caso (b)), el Principio de Tangencia implica que  $S(\tau)^* = S(\tau)^+$ . Observemos que las aplicaciones de Gauss de ambas superficies coinciden en  $p$ , ya que ambas apuntan hacia el exterior de  $W$  y que, respecto de  $N(p)$ ,  $S(\tau)^+$  se encuentra por encima de  $S(\tau)^*$ . Por tanto,  $P(\tau)$  es un plano de simetría de  $S$ . Por el contrario, si el punto de contacto  $p$  no es de tangencia, es porque  $p \in C$ . Ya que  $C$  es un círculo,  $P(\tau)$  es un plano de simetría de  $C$  y  $S(\tau)^*$  se encuentra a la izquierda de  $S(\tau)^+$ . Hacemos ahora el mismo razonamiento, pero con planos verticales que vienen de la derecha, y concluimos que  $P(\tau)$  es necesariamente un plano de simetría de  $S$ .

Si repetimos este razonamiento con todos los vectores horizontales  $\vec{v}$ , concluimos que  $S$  es rotacionalmente simétrica respecto de un eje vertical. Pero en la sección 3, ya hicimos la observación de que los casquetes esféricos son las únicas superficies compactas CMC que son de revolución.  $\square$

*Nota 4.* El hecho de que  $S$  se encuentre a un lado de  $\Pi$  se ha usado no sólo para definir el dominio  $W$ , sino también para evitar el hecho (posible) de que

el punto de contacto  $p$  fuera, por ejemplo, un punto interior de  $S(\tau)^*$  y un punto frontera de  $S(\tau)^+$ , impidiendo usar el Principio de Tangencia. Véase también la figura 7, caso (b).

El método de Alexandrov puede aplicarse en una diversidad de situaciones. El siguiente resultado usa planos horizontales paralelos al plano  $\Pi$  que contiene al borde.

**Teorema 6** ([13]). *Se considera una curva cerrada  $C$  contenida en un plano  $\Pi$  y sea  $D$  el dominio plano que encierra. Supongamos que  $S$  es una superficie embebida CMC cuyo borde es  $C$ . Si  $S$  se encuentra a un lado del plano  $\Pi$  y si alrededor de  $C$ , la superficie  $S$  es un grafo sobre  $D$ , entonces toda la superficie  $S$  es un grafo sobre  $D$ .*

*Demostración.* Empezamos pegando a  $S$  el dominio plano  $D$ , obteniendo una superficie cerrada que acota un abierto  $W$  del espacio. Orientamos  $S$  mediante la aplicación de Gauss  $N$  que apunta hacia  $W$ . Suponiendo que la superficie se encuentra por encima de  $\Pi$ , tomamos la familia de planos horizontales parametrizadas según su altura respecto de  $\Pi$ . Viniendo desde arriba, llegamos hasta el primer contacto con  $S$ . Vamos ahora descendiendo los planos  $P(t)$  y reflejando respecto de  $P(t)$  el trozo de  $S$  por encima de  $P(t)$ , hasta que interseque de nuevo con la superficie original en un instante  $t = \tau$ . Puede suceder dos casos. En el primero, la superficie reflejada  $S(\tau)^*$  respecto de  $P(\tau)$  interseca de nuevo a la superficie  $S(\tau)^+$  en un punto de tangencia. Por la hipótesis sobre el comportamiento de grafo de la superficie alrededor del borde, este punto debe ser un punto interior de la superficie: ver la figura 5. En esta situación,  $S(\tau)^*$  se encuentra por encima de  $S(\tau)^+$  alrededor de  $p$ . El Principio de Tangencia nos diría entonces que ese plano sería un plano de simetría de  $S$ , lo cual es imposible, ya que  $C$  se encuentra por debajo de  $P(\tau)$ . Por tanto, el caso que queda es que podemos ir bajando los planos horizontales (y reflejando) hasta llegar al plano original  $\Pi$  sin que  $S(0)^*$  toque a  $S(0)^+ = S$ . Esto quiere decir que la superficie  $S$  es un grafo sobre  $D$ .  $\square$

## 6 Superficies CMC embebidas

Para el caso de superficies CMC que son embebidas, y una vez demostrado el teorema 5, nos interesa conocer aquellas hipótesis que nos aseguren que la superficie se encuentre a un lado del plano  $\Pi$ . A continuación damos dos ejemplos de resultados de este tipo. El primero, debido a Koiso, asume que  $C$  es una curva cerrada y usa el Principio de Tangencia.

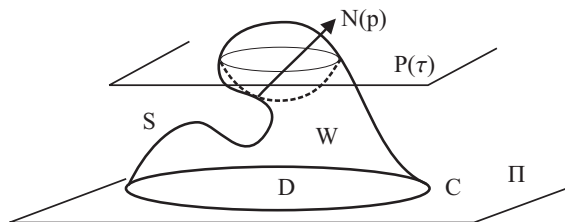


Figura 5: Caso imposible en la demostración del teorema 6.

**Teorema 7** ([12]). *Sea  $C$  una curva cerrada contenida en un plano  $\Pi$  y  $D$  el dominio plano que encierra. Si  $S$  es una superficie CMC embebida cuyo borde es  $C$  y no interseca el exterior de  $D$  en  $\Pi$ , entonces  $S$  se encuentra a un lado de  $\Pi$ . En particular, si  $C$  es un círculo, entonces  $S$  es un casquete esférico.*

*Demostración.* Por reducción al absurdo, supongamos que  $S$  tiene puntos a ambos lados de  $\Pi$ . Tomamos una semiesfera  $Q$  por debajo de  $\Pi$ , con  $\partial Q \subset \Pi$ , lo suficientemente grande para que el disco que acota  $\partial Q$  en  $\Pi$  contenga  $C$  y a la vez,  $Q \cap S = \emptyset$ . Entonces  $Q \cup S$ , junto el anillo topológico en  $\Pi$  acotado por  $C \cup \partial Q$  constituye una superficie cerrada de  $\mathbb{R}^3$ , luego divide al espacio ambiente en dos dominios. Llamamos  $W$  el dominio acotado que encierra. Véase la figura 6. Se toma la aplicación de Gauss  $N$  en  $S$  que apunta hacia  $W$ .

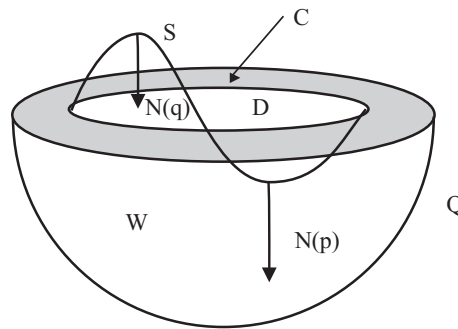


Figura 6: Demostración del teorema 7

Llamamos respectivamente  $p$  y  $q$  a los puntos más bajo y alto respecto del plano  $\Pi$ . Comparamos ahora  $S$  con los planos tangentes  $T_p S$  y  $T_q S$  en

cada uno de los puntos de tangencia  $p$  y  $q$ . Recordemos que los planos tienen curvatura media cero. Como en el punto  $p$ ,  $N(p)$  apunta hacia  $W$ , entonces apunta hacia abajo. Respecto de la dirección vertical determinada por  $N(p)$ , el plano  $T_p S$  se encuentra por encima de  $S$ . Se deduce del Principio de Tangencia que  $H < 0$ . Como  $H$  es constante, esto quiere decir que la curvatura media es negativa en toda la superficie. Si miramos ahora en  $q$ , y como  $N(q)$  apunta hacia  $W$ , entonces  $N(q)$  debe apuntar hacia abajo: véase de nuevo la figura 6. Esto significa que en la dirección vertical dada por  $N(q)$ ,  $S$  se encuentra por encima de  $T_q S$  alrededor de  $q$ , concluyendo ahora por el Principio de Tangencia que  $H$  es positiva y obteniendo la deseada contradicción.  $\square$

De la demostración anterior, puede extenderse el resultado del Teorema 7 a superficies cuya función curvatura media  $H$  no cambie de signo, sin ser necesariamente constante.

El segundo resultado que probamos en esta sección necesita que  $C$  sea una curva convexa y usa tanto el método de Alexandrov como la fórmula de equilibrio.

**Teorema 8** ([4]). *Se considera una curva convexa  $C$  incluida en un plano  $\Pi$ . Si  $S$  es una superficie CMC embebida cuyo borde es  $C$  y es transversa a  $\Pi$  a lo largo de  $C$ , entonces  $S$  se encuentra a un lado de  $\Pi$ . En particular, si  $C$  es un círculo, entonces  $S$  es un casquete esférico.*

*Demostración.* Aunque la prueba del resultado no es difícil, se necesita ciertas consideraciones técnicas que nos llevaría a alejarnos de sus principales ideas. Por ello, mostramos dos situaciones imposibles de configuraciones de superficies y que ilustran cómo trabaja la demostración. En ambas situaciones,  $S \cup D$  encierra un dominio acotado  $W$ . Orientamos  $S$  mediante la aplicación de Gauss  $N$  que apunta hacia  $W$ .

- A. En la figura 7 (a) la superficie  $S$  interseca el plano  $\Pi$  en una curva cerrada  $G$  que es nulhomotópica en el dominio  $\Pi \setminus D$ . Usamos el método de Alexandrov con planos verticales que vienen del infinito e intersecando a  $G$  antes que toque  $D$ : esto es posible porque  $C$  es convexa. Entonces existiría un plano vertical  $P$  (que no toca  $C$ ) de forma que la reflexión de la parte de  $S$  en el lado de  $P$  que no contiene a  $C$  toca en una primera vez con la propia superficie  $S$ . El Principio de Tangencia implicaría que  $P$  es un plano de simetría de la superficie, lo cual es contradictorio ya que  $C$  se encuentra a un lado de  $P$ .
- B. El segundo caso que analizamos aparece en la figura 7 (b) y muestra una superficie que interseca a  $\Pi$  en una curva  $G$  homotópica a  $C$ . Sin perder



generalidad, y por hipótesis, suponemos que  $\vec{a}$  apunta hacia arriba y que  $S$  se encuentra por encima de  $\Pi$  alrededor de  $C$ . Ya que  $\alpha' = \nu \wedge N$ , el término  $\langle \alpha \wedge \alpha', \vec{a} \rangle$  en (5) también es positivo. Sustituyendo en la expresión (5), llegamos a una contradicción. En este caso, no se ha usado la hipótesis de convexidad de la curva  $C$ .

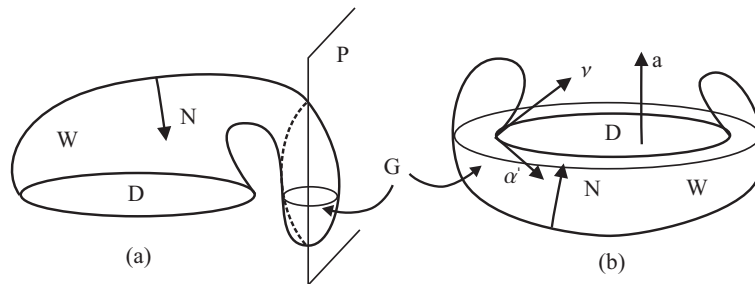


Figura 7: Casos A y B de la demostración del teorema 8

□

Obsérvese que en la superficie de la figura 7, caso (b), y suponiendo que  $C$  es un círculo, no puede concluirse que  $S$  es un casquete esférico usando el método de Alexandrov: al ir reflejando, encontraríamos un punto de contacto interior de  $S$  con un punto frontera de  $C$ . Esto ya fue comentado en la demostración del teorema 5.

## 7 Discos CMC con borde circular

La última sección de este artículo se dedica al caso en el que la superficie tiene la misma topología que un disco. De la misma forma que sucedía con el caso embebido, tampoco es posible trasladar la demostración de Hopf al contexto de superficies CMC con borde circular.

Para entender el significado de las hipótesis del siguiente teorema, vamos a estudiar cómo es el área de un *disco* dotado de una métrica riemanniana. Para ello necesitamos un resultado de Barbosa y do Carmo. Si  $S$  es un disco riemanniano, y llamamos  $K$  a su curvatura de Gauss, ellos probaron que el área  $A$  satisface la siguiente desigualdad:

$$L^2 - 2A \left( 2\pi - \int_S (K - c)^+ dS \right) + cA^2 \geq 0,$$

donde  $L$  es la longitud del borde,  $K$  es la curvatura de Gauss de  $S$  y  $c$  es una constante arbitraria. Supongamos ahora que  $S$  está inmerso en el espacio euclídeo  $\mathbb{R}^3$  y consideramos en  $S$  la métrica inducida. Entonces tiene sentido hablar de curvatura media  $H$ . Si ésta es constante y en la desigualdad anterior ponemos  $c = H^2$ , tenemos que  $(K - c)^+ = 0$ , ya que  $K \leq H^2$ . Por tanto la desigualdad de Barbosa y do Carmo se escribe ahora

$$L^2 - 4\pi A + H^2 A^2 \geq 0.$$

Además, la igualdad ocurre si y sólo si  $K = H^2$  en  $S$ , es decir,  $S$  es un abierto de una esfera. En nuestra situación inicial de este artículo, si  $C$  es un círculo de radio  $R$ , se tiene  $L = 2\pi R$  y la desigualdad anterior implica entonces que existen dos números positivos  $A_-$  y  $A_+$ , con  $A_- < A_+$ , tales que  $A \leq A_-$  o  $A \geq A_+$ . Concretamente, estos números son

$$A_- = \frac{2\pi}{H^2} \left(1 - \sqrt{1 - R^2 H^2}\right), \quad A_+ = \frac{2\pi}{H^2} \left(1 + \sqrt{1 - R^2 H^2}\right),$$

y se corresponden, respectivamente, con las áreas de los dos casquetes esféricos (pequeño y grande en la figura 1) que tienen el mismo borde y curvatura media que  $S$ .

Ya estamos en condiciones de probar el siguiente:

**Teorema 9** ([16]). *Sea  $S$  una superficie CMC con la topología de un disco y cuyo borde es un círculo  $C$ . Si el área de  $S$  es menor que el área de un casquete esférico con la misma curvatura media y mismo borde, entonces  $S$  es realmente un casquete esférico.*

*Demostración.* La hipótesis del teorema nos dice que  $A = A_+$  o  $A \leq A_-$ . Por tanto la demostración finaliza si probamos que  $A \leq A_-$  implica realmente la igualdad  $A = A_-$ . Usamos la notación seguida a lo largo de este trabajo. La curvatura geodésica  $\kappa_g$  a lo largo de  $C$  satisface

$$\kappa_n^2 + \kappa_g^2 = \kappa^2 = \frac{1}{R^2},$$

donde  $\kappa$  y  $\kappa_n$  son, respectivamente, la curvatura y la curvatura normal de  $S$  en la dirección de  $\alpha'$ . Ya sabemos del teorema 4 que

$$\kappa_n = -\frac{1}{R} \langle \nu, \vec{a} \rangle.$$

De la fórmula de equilibrio (5) se sigue

$$2\pi R^2 H = \int_C \langle \nu, \vec{a} \rangle ds = -R \int_C \kappa_n ds.$$

Elevando al cuadrado y aplicando dos veces la desigualdad de Cauchy-Schwarz,

$$4\pi^2 R^2 H^2 \leq 2\pi R \int_C \kappa_n^2 ds \leq 4\pi^2 - \left( \int_C \kappa_g ds \right)^2.$$

Por tanto,

$$\left| \int_C \kappa_g ds \right| \leq 2\pi \sqrt{1 - R^2 H^2}. \quad (9)$$

Usamos ahora el Teorema de Gauss-Bonnet. Como la superficie es un disco topológico, entonces

$$2\pi = \int_S K dS + \int_C \kappa_g ds.$$

Acotamos ahora la curvatura de Gauss  $K$  por  $H^2$ , y usando (9), tenemos

$$2\pi \leq AH^2 + 2\pi \sqrt{1 - R^2 H^2}.$$

Como conclusión,  $A \geq A_-$ , obteniendo la igualdad  $A = A_-$  deseada.  $\square$

Un resultado más reciente prueba que la Conjetura 2 es cierta bajo la condición añadida de que la superficie sea *estable*. Una superficie CMC se dice que es estable si la variación segunda del área  $\delta_Y^2 A$  es no negativa para cualquier campo variacional  $Y$ , es decir, la superficie es localmente un mínimo local del funcional área. Desde el punto de vista físico, las gotas líquidas obtenidas experimentalmente, son estables (por ello son realizables). En este sentido, se ha probado

**Teorema 10** ([2]). *Los casquetes esféricos son los únicos discos con curvatura media constante estables y con borde circular.*

## Referencias

- [1] Alexandrov, A. D. *Uniqueness theorems for surfaces in the large*, V. Vestnik Leningrad Univ., **13**, No. 19, A.M.S. (Series 2), **21** (1958), 412–416.
- [2] Alías, L. J., López, R., Palmer, B. *Stable constant mean curvature surfaces with circular boundary*, Proc. A. M. S. **127** (1999), 1195–1200.
- [3] Brito, F., Earp, R. *Geometric configurations of constant mean curvature surfaces with planar boundary*, An. Acad. Bras. Ci. **63** (1991), 5–19.

- 
- [4] Brito, F., Earp, R., Meeks III, W. H., Rosenberg, H. *Structure theorems for constant mean curvature surfaces bounded by a planar curve*, Indiana Univ. Math. J. **40** (1991), 333–343.
- [5] Dierkes, U., Hildebrandt, S. *Minimal Surfaces*, Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [6] deGennes P, G., Brochard-Wyart F., Quéré D. *Capillarity and wetting phenomena: drops, bubbles, pearls, waves*, Springer Verlag, New York, 2004.
- [7] Hildebrandt, S., Tromba, A. *Matemáticas y formas óptimas*, Prensa Científica, Barcelona, 1990.
- [8] Hopf, H.: *Differential Geometry in the Large*, Lecture Notes in Mathematics, **1000**, Springer-Verlag, Berlin, 1983.
- [9] Isenberg, C. *The Science of Soap Films and Soap Bubbles*, Dover, New York, 1992.
- [10] Kapouleas, *Compact constant mean curvature surfaces in Euclidean three-space*, J. Diff. Geom. **33** (1991), 683–715.
- [11] Kenmotsu, K. *Surfaces with constant mean curvature*, American Math. Soc., Providence, 2003.
- [12] Koiso, M. *Symmetry of hypersurfaces of constant mean curvature with symmetric boundary*, Math. Z. **191** (1986), 567–574.
- [13] López, R. *A note on  $H$ -surfaces with boundary*, J. Geom. **60** (1997), 80–84.
- [14] López, R. *Wetting phenomena and constant mean curvature surfaces with boundary*, Reviews Math. Physics, **17** (2005), 769–792.
- [15] López, R. *A characterization of hemispheres*, Diff. Geom. Appl. **24** (2006), 398–402.
- [16] López, R., Montiel, S. *Constant mean curvature discs with bounded area*, Proc. Amer. Math. Soc., **123** (1995), 1555–1558.
- [17] Wente, H. C. *Counterexample to a conjecture of H. Hopf*, Pacific J. Math., **121** (1986), 193–243.