

La falaise d'un polynôme de Taylor

A. FRUCHARD

Résumé

On examine le phénomène de surconvergence de la suite des polynômes de Taylor associée à une fonction dont les singularités sur le cercle de convergence sont des pôles ou des ramifications. Le lieu de surconvergence associé à une suite extraite donnée coïncide avec les zéros à l'extérieur du disque d'un polynôme d'interpolation de Lagrange qui se calcule directement à partir de la fonction et de la suite extraite. On étend ensuite l'étude au cas des singularités logarithmiques.

English Extended Abstract

We are concerned with the following problem. Given an analytic function whose Taylor series around $x = 0$ has a radius of convergence 1, where does the sequence of Taylor polynomials $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ overconverge, that is to say, for which x of modulus greater than 1 is there a subsequence $(P_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ such that $(P_{\varphi(n)}(x))_{n \in \mathbb{N}}$ has a finite limit? We prove the following result.

Suppose the singularities of f on the unit circle are poles or branching points of type $(1 - \frac{x}{\alpha})^{-r}$, $\alpha, r \in \mathbb{C}$, $|\alpha| = 1$. Let $\alpha_1 \dots \alpha_p$ denote those singularities of maximal order $Re(r_j) = \varrho$. Let $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ be a strictly increasing function such that for each $j \in \{1 \dots p\}$ the argument of $\alpha_j^{\varphi(n)} \varphi(n)^{r_j}$ converges and put $\theta_j = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_j^{1 - \varphi(n)} \varphi(n)^{iIm(r_j)} / \Gamma(r_j)$. Let β_j denote the principal part of f at α_j (i.e. $\lim_{x \rightarrow \alpha_j} (1 - \frac{x}{\alpha_j})^{r_j} f(x) = \beta_j$) and consider the Lagrange polynomial L_φ of degree no more than $p - 1$ that takes the values $L_\varphi(\alpha_j) = \theta_j \beta_j \prod_{k=1; k \neq j}^p (\alpha_k - \alpha_j)$. Then the points at which overconvergence (relative to φ) occurs are the zeroes of L_φ of modulus greater than 1.

In particular there is no overconvergence if f has a unique singularity of maximal order on the unit circle. Analogous results are given in the case of logarithmic singularities.

For the sake of simplicity nonstandard analysis is used in the proof but is not crucial. Classical versions of the main results will be helpful for the reader who is not acquainted with this tool.

1 Introduction

Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ est une série entière de rayon de convergence 1. Il est bien connu que la suite des polynômes de Taylor $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k$ diverge en tout point extérieur au disque unité fermé. On sait aussi depuis les travaux d'Ostrowski [9,10,11] que, pour certaines fonctions, il arrive que des suites extraites convergent vers une valeur finie en des points à l'extérieur du disque unité. L'exemple le plus simple est sans doute $a_{2n} = 2$ et $a_{2n+1} = -1$:

On a $P_{2n}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} 2x^{2k} - \sum_{k=0}^{n-1} x^{2k+1}$, d'où $P_{2n}(2) = 0$.

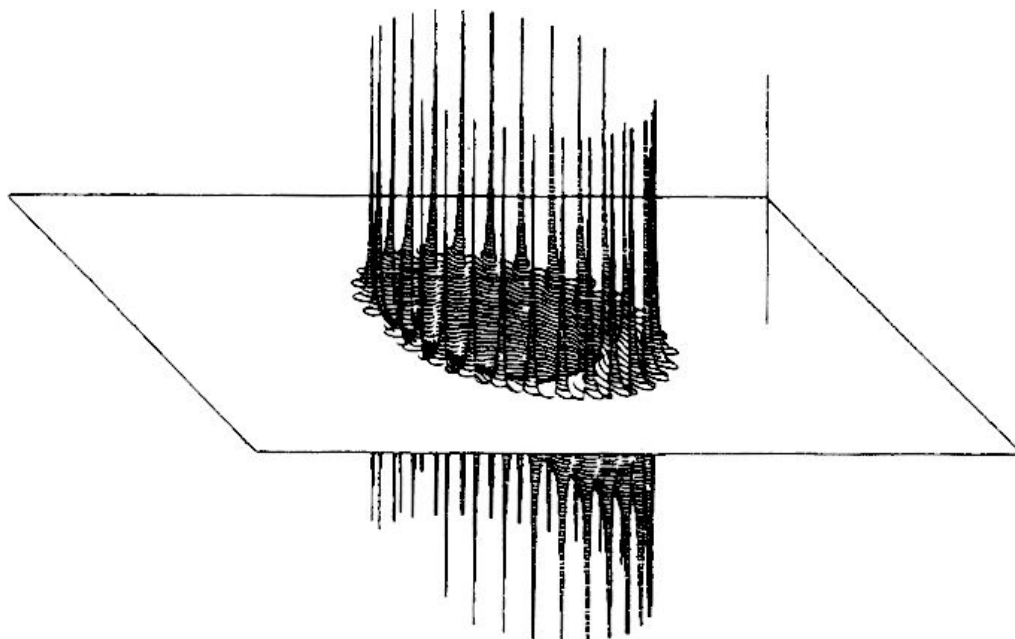


Figure 1 : Courbes de niveau de la partie réelle de la fonction $1/P_{30}(x)$ avec $a_{2n} = 2$ et $a_{2n+1} = -1$.

Les polynômes de Taylor de degré élevé ayant tendance à prendre de grandes valeurs en dehors du disque de convergence, j'ai choisi de représenter leur inverse dans les figures de ce texte. Si l'on considère ces polynômes comme des fonctions à valeurs dans la sphère de Riemann $\mathbb{S}^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, il s'agit simplement de choisir une carte plus adaptée que la carte habituelle. On constate que ce graphe est constitué de trois régions : une première à l'intérieur du disque unité où le graphe du polynôme est proche de celui de la fonction, une deuxième au bord du disque et au point 2 où ce graphe s'apparente à une falaise, enfin une troisième à l'extérieur du disque excepté le point 2, où le graphe est plat.

On dit que le point d'affixe 2 est un *point de surconvergence* de f . On pourrait croire que la convergence d'une suite extraite au point 2 dans l'exemple précédent a un caractère exceptionnel et que le lieu de surconvergence d'une fonction est forcément maigre. En réalité on peut construire des exemples où certaines suites extraites convergent vers la fonction sur toute une région à l'extérieur du disque de convergence.

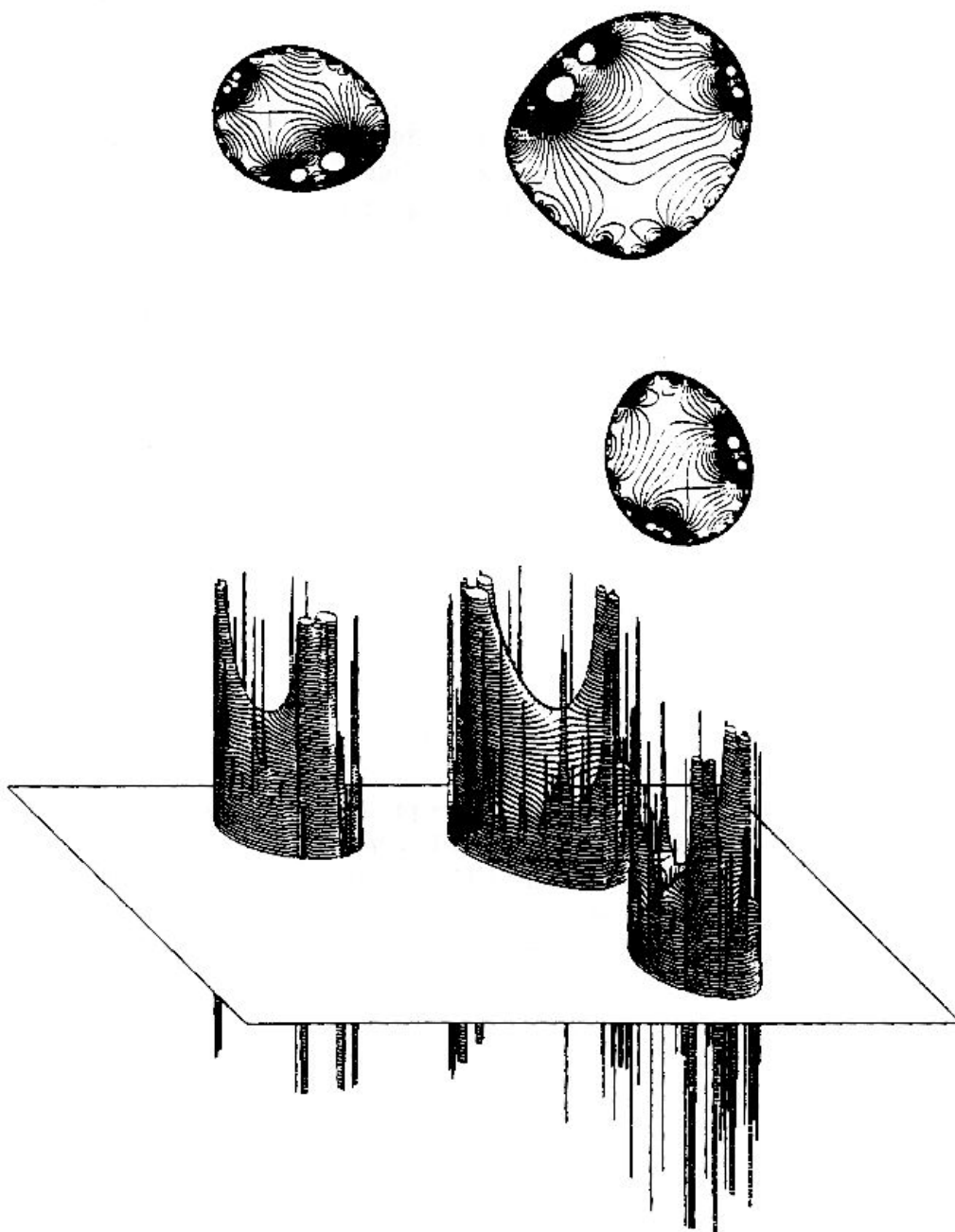


Figure 2 : Courbes de niveau de $Re(1/\pi_7(x))$ avec $\pi_n(x) = \sum_{k=0}^n [4x(1+x)(i+x)]^{3k-1}$.

La fonction π_n est le 3^n -ième polynôme de Taylor de la fonction $\sum_{k=0}^{\infty} [4x(1+x)(i+x)]^{3k-1}$. C'est ici sur la lemniscate d'équation $|4x(1+x)(i+x)| = 1$ que le graphe de π_n s'apparente à une falaise. L'origine du mot falaise provient de ces graphes. Cependant pour des raisons de commodité la falaise d'un polynôme ou d'une suite de polynômes ne désignera pas une partie du graphe mais une partie du plan complexe de la variable x .

Si Ω est l'intérieur d'une lemniscate ($\Omega = \{x \in \mathbb{C}; Q(x) < k\}$ où Q est un polynôme de degré $d \geq 2$ s'annulant en 0 et k une constante quelconque) et si l'on note $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} [\frac{1}{k} Q(x)]^{d^{n-1}}$, la suite extraite de polynômes de Taylor $(P_{d^n})_{n \in \mathbb{N}}$

converge vers f dans Ω et tend vers l'infini dans l'intérieur du complémentaire de Ω . En effet le plus haut degré en x de $[\frac{1}{k} Q(x)]^{d^{n-1}}$, $d(d^n - 1)$, est strictement inférieur au plus bas degré de $[\frac{1}{k} Q(x)]^{d^{n+1}} - 1$ qui est $d^{n+1} - 1$. On en déduit que $P_{d^n}(x) = \sum_{i=0}^{n-1} [\frac{1}{k} Q(x)]^{d^i-1}$. Ainsi toute lemniscate est le lieu de surconvergence d'une fonction. Ce résultat se généralise à tout ouvert simplement connexe (connexe ou non), le cas des lemniscates constituant le premier pas de la démonstration ([6] théorème 16.7.3).

Au vu des exemples et figures précédents il semble que les lieux de surconvergence puissent prendre des formes inattendues, et un problème intéressant serait, connaissant la suite des coefficients a_n ou la fonction f , de décrire la forme possible de ces falaises.

En ce qui concerne la connaissance des coefficients, deux situations simples permettent de conclure à l'absence de surconvergence. La première est celle des séries lacunaires. Par exemple, si $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{n(k)}$ avec $0 < c \leq a_k \leq C < \infty$ et $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{n(k+1) - n(k)}{\text{Log } k} = +\infty$, alors pour tout x de module strictement supérieur à 1 on a

$$\left| \sum_{k=0}^K a_k x^{n(k)} \right| \geq c|x|^{n(K)} - \sum_{k=0}^{K-1} C|x|^{n(k)} \geq c|x|^{n(K-1)} (|x|^{n(K)-n(K-1)} - KC/c)$$

et pour K assez grand $[n(K) - n(K-1)] \text{Log } |x| \geq \text{Log}(2KC/c)$ donc $|\sum_{k=0}^K a_k x^{n(k)}| \geq KC|x|^{n(K-1)} \rightarrow +\infty$.

La deuxième situation concerne les séries presque géométriques, c'est-à-dire de la forme $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ avec $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1}/a_n = 1$. Une conséquence directe des travaux de I. P. VAN DEN BERG ([1] théorème 2.15 p.58) portant sur l'estimation du reste de Taylor est qu'il n'y a pas de surconvergence pour ces séries. Cependant l'exemple suivant montre que l'on peut difficilement espérer des résultats généraux dans cette direction, même en supposant le module des coefficients a_n constant.

Exemple. Prenons $f(x) = 1 + x - x^2 + x^3 + x^4 - x^5 + x^6 + \dots$ c'est-à-dire $a_{3n} = a_{3n+1} = 1$ et $a_{3n+2} = -1$. On a $P_{3n}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} (x^{3k} + x^{3k+1} - x^{3k+2}) = (1 + x - x^2) \frac{1-x^{3n}}{1-x^3}$, d'où $P_{3n}((1 + \sqrt{5})/2) = 0$. Il y a surconvergence en $(1 + \sqrt{5})/2$ bien que les coefficients a_n soient tous de module 1.

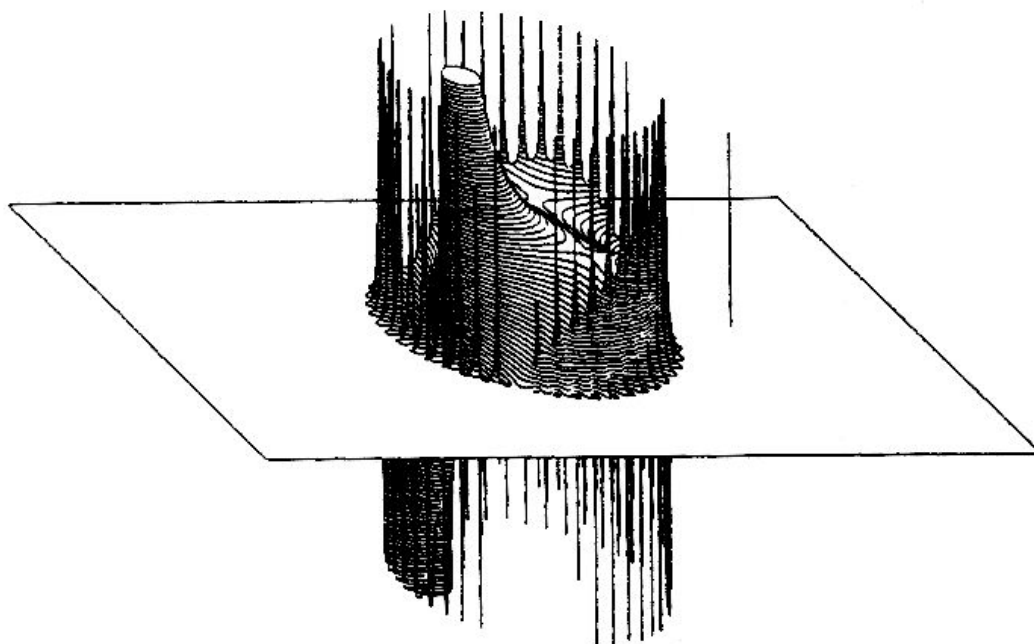


Figure 3 : Courbes de niveau de $Re(1/P_{45}(x))$ avec $a_{3n} = a_{3n+1} = 1$ et $a_{3n-1} = -1$.

En revanche si c'est la fonction f qu'on connaît (et non les coefficients de la série) il est possible de donner plus de renseignements. Je suppose que la fonction f n'admet sur le cercle de convergence que des singularités de type pôle (simple ou multiple) ou des ramifications de type $(1 - \frac{x}{\alpha})^{-r}$, $\alpha, r \in \mathbb{C}$, $|\alpha| = 1$. Ces singularités sont nécessairement en nombre fini puisque les accumulations de singularités n'entrent pas dans cette catégorie. Le nombre $Re(r)$ est l'ordre de la singularité.

Le résultat démontré est le suivant.

i) Si parmi toutes les singularités sur le cercle une seule est d'ordre maximal alors la suite des polynômes de Taylor tend vers l'infini en tout point à l'extérieur du disque fermé : il n'y a pas de surconvergence.

ii) Si plusieurs singularités $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ sont d'ordre maximal il y a surconvergence en des points déterminés de la façon suivante. J'associe à une suite extraite $(\varphi(n))_{n \in \mathbb{N}}$ telle que pour tout j dans $\{1 \dots p\}$ $(\alpha_j^{1-\varphi(n)} \exp[i\text{Im}(r_j) \log \varphi(n)] / \Gamma(r_j))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite θ_j , un polynôme d'interpolation de Lagrange L_φ de degré inférieur ou égal à $p - 1$ prenant en α_k une valeur déterminée par f et par θ_j . Les points de surconvergence de la suite $(P_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ sont alors exactement les zéros de L_φ qui sont à l'extérieur du disque fermé.

Le résultat est analogue dans le cas des singularités logarithmiques (paragraphe 5). Notons que les singularités de f placées à l'extérieur du disque fermé n'ont aucune influence. Dans le premier exemple la fonction est $f(x) = \frac{2-x}{1-x^2}$ Elle possède deux pôles simples sur le cercle \mathbb{S}^1 , d'où une éventuelle surconvergence. Les polynômes d'interpolation sont

$$L_{2n}(x) = 2 - x \quad \text{pour } \varphi(n) = 2n \quad (\text{surconvergence au point } 2)$$

$L_{2n+1}(x) = 2x - 1$ pour $\varphi(n) = 2n + 1$, donc pas de surconvergence puisque le point $1/2$ est à l'intérieur du disque.

Pour l'exemple de la figure 3, $f(x) = \frac{1+x-x^2}{1-x^3}$. On trouve trois polynômes $L_{3n}(x) = 1 + x - x^2$ (surconvergence au point $(1 + \sqrt{5})/2$ l'autre racine $(1 - \sqrt{5})/2$ étant dans le disque unité), $L_{3n+1}(x) = 1 - x + x^2$ (pas de surconvergence puisque les racines $\exp(\pm i\pi/3)$ sont placées sur le cercle unité), et $L_{3n+2}(x) = -1 + x + x^2$ (surconvergence en $(-1 - \sqrt{5})/2$, l'autre racine $(-1 + \sqrt{5})/2$ étant dans le disque unité).

Dans la littérature je n'ai rencontré qu'un résultat qui s'apparente au mien, dû à JENTSCH en 1917 [7], qui s'énonce ainsi

Si la fonction f a pour toute singularité sur le cercle de convergence un pôle simple alors les zéros des polynômes de Taylor associés tendent vers le disque fermé. En d'autres termes $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N \forall x \in \mathbb{C} (P_n(x) = 0 \implies |x| < 1 + \varepsilon)$.

Le résultat que je présente en dit plus : non seulement les polynômes ne s'annulent pas mais ils tendent vers l'infini en-dehors du disque fermé. La technique utilisée par JENTSCH ne permet pas la généralisation que je propose. La technique que j'utilise est pourtant simple ; elle repose sur une formule publiée par Charles HERMITE en 1891 [4].

Concédonc que du point de vue de l'utilisation première des séries de Taylor – à savoir l'approximation numérique d'une fonction inconnue – le résultat présenté n'a pas d'intérêt puisque la fonction est supposée connue. Il permet en revanche d'expliquer les phénomènes observés sur les exemples des figures 1 et 3.

2 Le résultat

2.1 Définitions et notations. Dans tout l'article $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ désigne une série de rayon de convergence 1. Par abus de notation je désignerai par la même lettre f la série, la somme de cette série et son prolongé analytique radial.

L'étoile de Mittag-Leffler de f , $ML(f)$, est le plus grand domaine étoilé par rapport à 0 sur lequel f est analytique.

La suite des polynômes de Taylor associée à f , ou *suite des sommes partielles*, est notée $(P_n)_{n \in \mathbb{N}} : P_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k$.

On note $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite des restes : $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$.

Je note \mathbb{U} le disque unité, \mathbb{S}^1 sa frontière, $\overline{\mathbb{U}}$ son adhérence et D l'intersection de l'étoile de Mittag-Leffler de f et du complémentaire de $\overline{\mathbb{U}}$ dans $\mathbb{C} : D = \{x \in ML(f); |x| > 1\}$.

Un point x de D sera dit *surconvergent pour f* s'il existe une suite de points x_n de limite x telle que la suite $(P_n(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ ne tende pas vers l'infini. En d'autres termes, puisque la suite des sommes partielles $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge vers une valeur finie en aucun point de l'extérieur de $\overline{\mathbb{U}}$, un point de surconvergence de f est un point où cette famille n'est pas normale en tant que famille de fonctions à valeurs dans la sphère de Riemann $\mathbb{S}^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

J'appelle *lieu de surconvergence de f* l'ensemble des points de surconvergence de f .

J'appelle *extraction* une fonction strictement croissante φ de \mathbb{N} dans \mathbb{N} . La *suite extraite des sommes partielles associée à φ* est la famille $(P_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$.

La falaise de f associée à l'extraction φ est l'ensemble des points de $ML(f)$ où la suite extraite associée à φ n'est pas normale (toujours en tant que famille de fonctions à valeurs dans la sphère de Riemann).

Deux choses distinguent la falaise du lieu de surconvergence. D'une part la falaise contient éventuellement des points du cercle unité alors que les points de surconvergence ne sont à considérer qu'en-dehors de $\overline{\mathbb{U}}$. D'autre part la falaise concerne une extraction alors que le lieu de surconvergence concerne toute la suite des sommes partielles. Notons aussi que, pour une extraction fixée φ , un point x du lieu de surconvergence n'est pas forcément un point de non normalité de la famille $(P_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$, par exemple lorsque $P_{\varphi(n)}(x)$ tend vers l'infini (si la surconvergence a lieu pour une autre extraction), mais aussi lorsque $P_{\varphi(n)}(x)$ tend vers une limite finie. Ainsi tous les points de module > 1 de $\Omega = \{x \in \mathbb{C}; |4x(1+x)(i+x)| \leq 1\}$ sont des points de surconvergence de f alors que la falaise illustrée figure 2 n'est que la frontière de Ω . Par contre la falaise est toujours incluse dans la réunion de \mathbb{S}^1 et du lieu de surconvergence.

On dira que $\alpha \in \mathbb{C}$ est une *singularité élémentaire* de f s'il existe r et β dans $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ tels que $\lim_{x \rightarrow \alpha} (1 - \frac{x}{\alpha})^r f(x) = \beta$, où pour r non entier on considère la détermination principale de la fonction ramifiée $(1 - \frac{x}{\alpha})^r$ (c'est-à-dire prenant la valeur 1 en 0) et où le point x est contraint à éviter la coupure le long de la demi-droite $[\alpha, \alpha\infty[$, c'est-à-dire à rester dans $ML(f)$.

L'ordre de la singularité α , noté $\varrho(\alpha)$, est le nombre $Re(r)$.

Le nombre complexe β est la *partie principale* de f en α , notée $p(f; \alpha)$.

La fonction f satisfait la condition **(H)** si toute singularité de f placée sur le cercle unité \mathbb{S}^1 est une singularité élémentaire. Soit $\alpha_j (j = 1 \dots p)$ les singularités d'ordre maximal $Re(r_j) = \varrho$.

Une extraction φ est dite *compatible avec f* si pour tout j dans $\{1 \dots p\}$ la suite $(\alpha_j^{1-\varphi(n)} \exp[i\text{Im}(r_j) \log \varphi(n)])_{n \in \mathbb{N}}$ converge. On note dans ce cas

$$(1) \quad \theta_j = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_j^{1-\varphi(n)} \exp[i\text{Im}(r_j) \log \varphi(n)] / \Gamma(r_j)$$

Remarque 2.2. Par compacité de $(\mathbb{S}^1)^p$, il est possible d'extraire de toute extraction une extraction compatible. Cette notion d'extraction compatible peut sembler artificielle. Elle deviendra plus naturelle dans la suite de l'article lorsqu'il s'agira d'examiner non pas une suite de polynômes mais un seul polynôme de Taylor de degré infiniment grand avec le formalisme de l'analyse non standard.

Si la fonction f satisfait la condition **(H)**, le *polynôme de Lagrange associé à une extraction compatible* φ , noté L_φ , est l'unique polynôme de degré inférieur ou égal à $p - 1$ prenant en chaque singularité α_j d'ordre maximal $\varrho = Re(r_j)$ la valeur $L_\varphi(\alpha_j) = \theta_j \beta_j \prod_{k=1, k \neq j}^p (\alpha_k - \alpha_j)$ (avec θ_j donné par (1) et $\beta_j = p(f, \alpha_j)$). On note Z_φ l'ensemble des zéros de L_φ qui sont à l'extérieur du disque de convergence et dans l'étoile de Mittag-Leffler de $f : Z_\varphi = Z(L_\varphi) \cap D$.

Théorème 2.3. Si la fonction f satisfait l'hypothèse **(H)**, alors pour toute extraction compatible φ la falaise associée à φ est la réunion du cercle unité et de Z_φ . De plus on a les résultats suivants.

- i) $\lim_{n \rightarrow \infty} R_{\varphi(n)}(x) = +\infty$ uniformément sur tout compact inclus dans $D \setminus Z_\varphi$.
- ii) $\forall z \in Z_\varphi \forall v \in \mathbb{C} \exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ ($\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = z$ et $R_{\varphi(n)}(x_n) = v$). En particulier $\forall z \in Z_\varphi \exists (x_n(z))_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ ($\lim_{n \rightarrow \infty} x_n(z) = z$ et $R_{\varphi(n)}(x_n(z)) = 0$).
- iii) Si de plus $L'(z) \neq 0$ et $(\overline{x}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une autre suite telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{x}_n = z$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} R_{\varphi(n)}(\overline{x}_n) = 0$, alors $\limsup_{n \rightarrow \infty} |x_n(z) - \overline{x}_n|^{\frac{1}{\varphi(n)}} < 1$.

Corollaire 2.4. *Si la fonction f satisfait l'hypothèse **(H)** et possède une seule singularité d'ordre maximal sur \mathbb{S}^1 alors la suite des sommes partielles tend vers l'infini en tout point de D .*

3 La preuve

Nous nous plaçons dorénavant dans une théorie infinitésimale. Le contexte axiomatique utilisé est celui introduit par E. NELSON, IST [8], mais tout autre contexte, ZFL [2], BST, ou simplement le modèle de Robinson [13] convient. L'avantage d'utiliser une théorie infinitésimale est de remplacer l'étude d'une suite extraite de polynômes par l'étude d'un polynôme. Cela permet déjà de faire disparaître la notion de suite compatible, puisque tout polynôme de degré infiniment grand est compatible. Au demeurant les figures du texte représentent chacune un polynôme de degré assez élevé, et non une suite de polynômes.

Le symbole \emptyset désigne une quantité quelconque infiniment petite. Deux occurrences de ce symbole n'ont pas forcément la même valeur. De même le symbole \mathcal{L} signifie "limité" (non infiniment grand) et $\textcircled{\mathcal{L}}$ "appréciable" (ni infiniment grand ni infiniment petit). Le symbole \lesssim signifie "appréciablement inférieur à" (par exemple $1 \lesssim 2$), \simeq "infiniment proche de" (ainsi $x \simeq y$ est équivalent à $x = y + \emptyset$) et \lesssim "inférieur ou infiniment proche de".

Un point x est dans le S -intérieur d'une région Ω s'il existe un disque de rayon appréciable centré en x inclu dans Ω .

Sommairement \emptyset correspond au $o(1)$ de l'asymptotique classique, \mathcal{L} au $O(1)$ et la proximité dans le S -intérieur d'une région à la convergence uniforme sur tout compact de la région.

Le lecteur habitué à l'axiomatique IST vérifiera sans peine que le résultat à démontrer est équivalent au résultat suivant¹, qui sera celui démontré dans cet article.

Théorème 3.1 (non standard). *Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ une série standard de rayon de convergence 1 vérifiant l'hypothèse **(H)** ci-dessus. Pour ω entier infiniment grand donné, soit P_ω le ω -ième polynôme de Taylor de f . Soit L_ω le polynôme d'interpolation de Lagrange standard de degré inférieur ou égal à $p - 1$ prenant en chaque singularité de f d'ordre maximal α_j la valeur*

$$L_\omega(\alpha_j) = \theta_j \beta_j \prod_{k=1; k \neq j}^p (\alpha_k - \alpha_j),$$

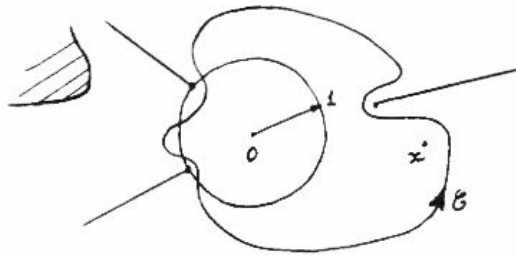
¹Le lecteur non habitué à une théorie infinitésimale n'aura pas de mal à traduire au fur et à mesure les preuves en langage classique : les techniques utilisées sont essentiellement classiques, IST n'étant là que pour apporter un certain confort en simplifiant les détails techniques fastidieux. On trouvera une version classique à la suite de chacun des énoncés.

où θ_j désigne l'ombre de $\alpha_j^{1-\omega} \exp[i\text{Im}(r_j) \log \omega] / \Gamma(r_j)$ et β_j la partie principale de f en $\alpha_j, p(f, \alpha_j)$. Soit Z_ω l'ensemble des zéros de L_ω qui sont à l'extérieur du disque de convergence. Alors

- i) P_ω prend une valeur infiniment grande en tout point du S -intérieur de $D \setminus Z_\omega$;
- ii) pour tout z dans Z_ω il existe x_z infiniment proche de z tel que $R_\omega(x_z) = 0$;
- iii) si de plus $L'_\omega(z) \neq 0$ et si \bar{x} est un autre point du halo de z tel que $R_\omega(\bar{x})$ est infiniment petit alors $|x_z - \bar{x}|^{1/\omega} \lesssim 1$.

3.2. La formule d'Hermite (classique). Voici deux énoncés donnés sans preuve que j'utiliserai dans la suite. Voir par exemple [5] pour la preuve.

3.2.1. Si \mathcal{C} est un lacet d'indice 1 par rapport à x et 0, et d'indice 0 par rapport à chaque singularité de f , on a $R_\omega(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}} \left(\frac{x}{z}\right)^\omega \frac{f(z)}{z-x} dz$.



3.2.2. Si \mathcal{C} est un lacet inclus dans une région où la fonction f est uniforme, d'indice 1 par rapport à x et 0, on a

$$R_\omega(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}} g_x(z) dz - \sum \text{Res}(g_x; \alpha)$$

où la somme est à prendre sur les singularités de f entourées par \mathcal{C} et où

$$g_x(z) = (x/z)^\omega \frac{f(z)}{z-x}$$

Lemme 3.3 (non standard). Si f est la fonction $f(x) = (1 - \frac{x}{\alpha})^{-r}$, α et r standard dans \mathbb{C} avec $|\alpha| = 1$, alors pour tout x dans le S -intérieur de D et tout ω infiniment grand,

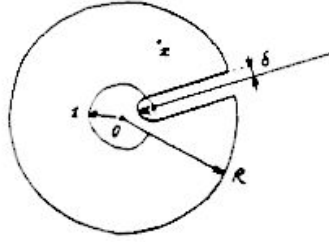
$$R_\omega(x) = (x/\alpha)^\omega \frac{\omega^{r-1} \alpha}{(x-\alpha)\Gamma(r)} (1 + \mathcal{O}(\cdot))^2$$

Rappelons que $D = \{z \in ML(f); |z| > 1\}$. Ici $D = \{z \in \mathbb{C}; |z| > 1 \text{ et } \frac{z}{\alpha} \notin \mathbb{R}^+\}$.

Lemme 3.3 bis (classique) Si $f(x) = (1 - \frac{x}{\alpha})^{-r}$, α et r dans \mathbb{C} avec $|\alpha| = 1$, alors on a, lorsque ω tend vers l'infini, $R_\omega(x) = (\frac{x}{\alpha})^\omega \frac{\omega^{r-1} \alpha}{(x-\alpha)\Gamma(r)} (1 + o(1))$ uniformément sur tout compact inclus dans D .

²J'ai choisi dans un but de simplicité de me restreindre aux points de l'étoile de Mittag-Leffler de f . En particulier, les points de la demi-droite issue de α et de direction α sont exclus. En modifiant le contour d'intégration \mathcal{C} on vérifie que l'approximation proposée reste valide en ces points.

Preuve. Etape 1 : l'énoncé est vrai si $Re(r) < 1$.



On choisit pour \mathcal{C} le contour (δ, R) indiqué ci-dessus et on fait tendre δ vers 0 et R vers l'infini. En notant f_+ et f_- les deux déterminations de f le long de la coupure $[\alpha, \alpha\infty[$ en prolongeant respectivement par la gauche et par la droite, on obtient

$$R_\omega(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_\alpha^{\alpha\infty} (x/z)^\omega [f_-(z) - f_+(z)] \frac{dz}{z-x}$$

Posons le changement de variable $z = \alpha + \alpha t$. On a $f(z) = (-t)^{-r}$, d'où $f_+(z) = t^{-r} \exp(-ir\pi)$, $f_-(z) = t^{-r} \exp(i\pi r)$ et finalement

$$f_-(z) - f_+(z) = 2it^{-r} \sin(\pi r)$$

Ainsi

$$\begin{aligned} R_\omega(x) &= \frac{\sin(\pi r)}{\pi} \int_0^{+\infty} (x/\alpha)^\omega (1+t)^{-\omega} t^{-r} \frac{\alpha dt}{\alpha - x + \alpha t} \\ &= (x/\alpha)^\omega \frac{\alpha}{\alpha - x} \frac{\sin(\pi r)}{\pi} \int_0^{+\infty} t^{-r} (1+t)^{-\omega} \frac{\alpha - x}{\alpha - x + \alpha t} dt. \end{aligned}$$

Par ailleurs, en posant $u = \omega t$,

$$\int_0^{+\infty} t^{-r} (1+t)^{-\omega} \frac{\alpha - x}{\alpha - x + \alpha t} dt = \omega^{r-1} \int_0^{+\infty} u^{-r} \left(1 + \frac{u}{\omega}\right)^{-\omega} \left(1 + \frac{\alpha u}{(\alpha - x)\omega}\right)^{-1} du$$

Par approximation dominée ([1] lemme 5.2 p.142) en majorant les modules des deux fonctions $u^{-r} \left(1 + \frac{u}{\omega}\right)^{-\omega} \left(1 + \frac{\alpha u}{(\alpha - x)\omega}\right)^{-1}$ et $u^{-r} \exp(-u)$ par Ku^{-2} , K standard assez grand, on a

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} u^{-r} \left(1 + \frac{u}{\omega}\right)^{-\omega} \left(1 + \frac{\alpha u}{(\alpha - x)\omega}\right)^{-1} du &= \\ &= \int_0^{+\infty} u^{-r} \exp(-u) du (1 + \varnothing) = \Gamma(1-r)(1 + \varnothing), \end{aligned}$$

donc

$$\int_0^{+\infty} t^{-r} (1+t)^{-\omega} \frac{\alpha - x}{\alpha - x + \alpha t} dt = \omega^{r-1} \Gamma(1-r)(1 + \varnothing).$$

Enfin $\Gamma(1-r) \sin(\pi r)/\pi = 1/\Gamma(r)$ d'où le résultat.

Etape 2 : l'énoncé est vrai si r n'est pas entier.

On démontre le résultat par récurrence externe en montrant que s'il est vrai pour $r-1$ et $\omega+1$ alors il est vrai pour r et ω .

Soit $I_{r,\omega} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}} \left(\frac{x}{z}\right)^\omega (1 - \frac{z}{\alpha})^{-r} \frac{dz}{z-x}$ où \mathcal{C} est un lacet de longueur limitée évitant le halo de x et comme en **3.2.1**.

$$\begin{aligned} \text{Soit } f(z) &= \frac{\alpha}{r-1} (1 - \frac{z}{\alpha})^{1-r} & f'(z) &= (1 - \frac{z}{\alpha})^{-r} \\ \text{et } g(z) &= \left(\frac{x}{z}\right)^\omega \frac{1}{z-x} & g'(z) &= -\left(\frac{x}{z}\right)^{\omega+1} \frac{1}{z-x} \frac{\omega}{x} \left(1 + \frac{z}{\omega(z-x)}\right) \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} I_{r,\omega} &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}} f'(z)g(z) dz = \frac{-1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}} f(z)g'(z) dz \\ &= \frac{\alpha}{r-1} \frac{\omega}{x} \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}} \left(\frac{x}{z}\right)^{\omega+1} (1 - \frac{z}{\alpha})^{1-r} \left(1 + \frac{z}{\omega(z-x)}\right) \frac{dz}{z-x}. \end{aligned}$$

Puisque \mathcal{C} est limité et évite le halo de x , la fonction $1 + \frac{z}{\omega(z-x)}$ prend des valeurs infiniment proches de 1. On s'attend donc naturellement à ce que l'intégrale

$$I = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}} \left(\frac{x}{z}\right)^{\omega+1} (1 - \frac{z}{\alpha})^{1-r} \left(1 + \frac{z}{\omega(z-x)}\right) \frac{dz}{z-x}$$

soit infiniment proche de l'intégrale

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}} \left(\frac{x}{z}\right)^{\omega+1} (1 - \frac{z}{\alpha})^{1-r} \frac{dz}{z-x} \text{ qui vaut } I_{r-1,\omega+1}.$$

Néanmoins cela reste à vérifier. Le chemin \mathcal{C} est contraint à traverser le segment $[0, \alpha]$. Pour $|z| < 1$, $(\frac{x}{z})^{\omega+1}$ ne garde des valeurs de l'ordre de $x^{\omega+1}$ que si $|z| = 1 - \mathcal{L}/\omega$. En effet $z^\omega = @ \iff \omega \text{Log}|z| = \mathcal{L} \iff \omega(1 - |z|) = \mathcal{L}$. Le chemin est alors contraint à passer à une distance de l'ordre de $1/\omega$ de α . Pour de telles valeurs de z l'erreur commise sur l'intégrand en négligeant le terme $\frac{z}{\omega(z-x)}$ est de l'ordre de $x^{\omega+1}\omega^{r-2}$, c'est-à-dire de l'ordre de $I_{r-1,\omega+1}$. Il faut donc en tenir compte. Soit a appréciable et \mathcal{C} un lacet de longueur limitée évitant le halo de x tel que pour tout z sur \mathcal{C} , $|z| \geq 1 - a/\omega$ et $|z - \alpha| \geq a/\omega$. On a

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}} \left(\frac{x}{z}\right)^{\omega+1} (1 - \frac{z}{\alpha})^{1-r} \left(1 + \frac{\alpha}{\omega(\alpha-x)} + \frac{(\alpha-z)x}{\omega(\alpha-x)(z-x)}\right) \frac{dz}{z-x} \\ &= \left(1 + \frac{\alpha}{\omega(\alpha-x)}\right) I_{r-1,\omega+1} + \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}} \left(\frac{x}{z}\right)^{\omega+1} (1 - \frac{z}{\alpha})^{1-r} \frac{(\alpha-z)x}{\omega(\alpha-x)(z-x)} \frac{dz}{z-x} \\ &= I_{r-1,\omega+1}(1 + \mathcal{O}) + \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}} \left(\frac{x}{z}\right)^{\omega+1} (1 - \frac{z}{\alpha})^{2-r} \frac{\alpha x dz}{\omega(\alpha-x)(z-x)^2} \end{aligned}$$

Avec notre choix de \mathcal{C} , $(\frac{x}{z})^{\omega+1} = x^{\omega+1} \mathcal{L}$, $(1 - \frac{z}{\alpha})^{2-r} = \omega^{r-2} \mathcal{L}$ et $\frac{\alpha x}{\omega(\alpha-x)(z-x)^2} = \frac{\mathcal{L}}{\omega}$ donc $I = I_{r-1,\omega+1}(1 + \mathcal{O}) + x^{\omega+1} \omega^{r-3} \mathcal{L}$.

Si $I_{r-1,\omega+1} = \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\omega+1} \frac{(\omega+1)^{r-2} \alpha}{(x-\alpha)\Gamma(r-1)} (1 + \mathcal{O})$ alors

$$(2) \quad I_{r,\omega} = \frac{\alpha}{r-1} \frac{\omega}{x} I_{r-1,\omega+1} (1 + \mathcal{O})$$

donc

$$\begin{aligned} I_{r,\omega} &= \frac{\alpha}{r-1} \frac{\omega}{x} \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\omega+1} \frac{(\omega+1)^{r-2} \alpha}{(x-\alpha)\Gamma(r-1)} (1 + \emptyset) \\ &= \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\omega} \frac{\omega^{r-1} \alpha}{(x-\alpha)\Gamma(r)} \left(1 + \frac{1}{\omega}\right)^{r-2} (1 + \emptyset) = \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\omega} \frac{\omega^{r-1} \alpha}{(x-\alpha)\Gamma(r)} (1 + \emptyset). \end{aligned}$$

Ainsi, puisque l'énoncé est vrai pour tout $r < 1$ et tout ω infiniment grand, il est vrai pour tout r standard non entier.

Etape 3 : l'énoncé est vrai pour r entier.

La technique précédente n'est pas applicable puisque la récurrence nécessitait $r \neq 1$, mais la fonction f est uniforme, ce qui permet d'appliquer la généralisation **3.2.2** de la formule d'Hermite. On choisit alors pour \mathcal{C} un cercle standard de rayon appréciablement supérieur à $|x|$. On obtient

$$R_{\omega}(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}} g_x(z) dz - \text{Res}(g_x; \alpha)$$

avec

$$g_x(z) = \left(\frac{x}{z}\right)^{\omega} \frac{1}{z-x} \left(1 - \frac{z}{\alpha}\right)^{-r}$$

Il reste à calculer le résidu de g_x en α . On a

$$g_x(\alpha + u) = \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\omega} \left(1 + \frac{u}{\alpha}\right)^{-\omega} \left(-\frac{u}{\alpha}\right)^{-r} \frac{1}{\alpha - x} \left(1 - \frac{u}{x - \alpha}\right)^{-1}$$

Pour u assez petit :

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{u}{\alpha}\right)^{-\omega} &= \sum_{k \geq 0} (-1)^k \alpha^{-k} u^k \frac{(\omega + k - 1)!}{(\omega - 1)! k!} \\ \left(1 - \frac{u}{x - \alpha}\right)^{-1} &= \sum_{k \geq 0} \left(\frac{u}{x - \alpha}\right)^k \end{aligned}$$

Le résidu de g_x en α , qui est le terme en u^{-1} dans le développement de g_x en puissances de u , est donc égal au terme en u^{r-1} dans le produit

$$\frac{1}{\alpha - x} \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\omega} \left(-\frac{1}{\alpha}\right)^{-r} \left(1 + \frac{u}{\alpha}\right)^{-\omega} \left(1 - \frac{u}{x - \alpha}\right)^{-1},$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{\alpha - x} \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\omega} \left(-\frac{1}{\alpha}\right)^{-r} \sum_{k=0}^{r-1} (-1)^k \alpha^{-k} \frac{(\omega + k - 1)!}{(\omega - 1)! k!} \left(\frac{1}{x - \alpha}\right)^{r-1-k}$$

Chaque terme de la somme est de la forme $\mathcal{O}(\omega^k)$, donc la somme est égale, à infiniment petit près, au dernier terme. Ainsi

$$\sum_{k=0}^{r-1} (-1)^k \alpha^{-k} \frac{(\omega + k - 1)!}{(\omega - 1)! k!} \left(\frac{1}{x - \alpha}\right)^{r-1-k} = (-1)^{r-1} \alpha^{1-r} \frac{\omega^{r-1}}{(r-1)!} (1 + \emptyset),$$

donc $\text{Res}(g_x; \alpha) = \frac{1}{\alpha - x} \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\omega} (-\alpha)^{\frac{\omega^{r-1}}{(r-1)!}} (1 + \emptyset) = \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\omega} \frac{\omega^{r-1} \alpha}{(x-\alpha)\Gamma(r)} (1 + \emptyset)$.

On conclut en remarquant que la fonction g_x est exponentiellement petite, a fortiori infiniment petite par rapport à $\text{Res}(g_x; \alpha)$, sur le chemin \mathcal{C} . ■

Lemme 3.4 (non standard). Soit f standard vérifiant l'hypothèse **(H)**, $\alpha_1 \dots \alpha_p$ les singularités élémentaires de f d'ordre maximal $Re(r_j) = \varrho$ placées sur le cercle unité, $\beta_j = p(f; \alpha_j)$, $D = \{x \in ML(f); |x| > 1\}$, ω un entier infiniment grand, et $\theta_j = \circ(\alpha_j^{1-\omega} \exp[iIm(r_j \log \omega)]/\Gamma(r_j))$.

Pour tout x dans le S -intérieur de D on a

$$R_\omega(x) = x^\omega \omega^{\varrho-1} \sum_{j=1}^p \frac{\theta_j \beta_j}{x - \alpha_j} + \mathcal{O}.$$

Lemme 3.4 bis (classique). Soit f vérifiant l'hypothèse **(H)**, $\alpha_1 \dots \alpha_p$ les singularités élémentaires de f d'ordre maximal $Re(r_j) = \varrho$ placées sur le cercle unité, $\beta_j = p(f; \alpha_j)$, $D = \{x \in ML(f); |x| > 1\}$, φ une extraction compatible, et θ_j donné en (1). On a, lorsque n tend vers l'infini,

$$R_{\varphi(n)}(x) = x^{\varphi(n)} \varphi(n)^{\varrho-1} \left(\sum_{j=1}^p \frac{\theta_j \beta_j}{x - \alpha_j} + o(1) \right)$$

uniformément sur tout compact inclus dans D .

Preuve. On a $f(x) = \sum_{j=1}^q \beta_j (1 - \frac{x}{\alpha_j})^{-r_j} + g(x)$ avec

- g holomorphe sur un disque centré en 0 de rayon $R > 1$,
- q le nombre de singularités élémentaires α_j de f ,
- $\varrho_j = Re(r_j)$ leur ordre respectif : $\varrho_j = \varrho$ pour $1 \leq j \leq p$, $\varrho_j < \varrho$ pour $p+1 \leq j \leq q$,
- β_j la partie principale de f en α_j .

Par linéarité de l'opérateur qui à une fonction fait correspondre son reste de Taylor, en notant R_ω , $R_{\omega,j}$ et S_ω les restes de Taylor associés respectivement à f , $(1 - \frac{x}{\alpha_j})^{-r_j}$ et g , on a $R_\omega(x) = \sum_{j=1}^q \beta_j R_{\omega,j}(x) + S_\omega(x)$.

D'après le lemme 3.3,

$$\begin{aligned} R_{\omega,j}(x) &= \left(\frac{x}{\alpha_j}\right)^\omega \omega^{r_j-1} \frac{\alpha_j}{(x - \alpha_j)} (1 + \mathcal{O})/\Gamma(r_j) \\ &= x^\omega \omega^{\varrho_j-1} \frac{\theta_j}{(x - \alpha_j)} (1 + \mathcal{O}). \end{aligned}$$

Pour $j > p$ on a $\omega^{\varrho_j-\varrho} \simeq 0$ donc $R_{\omega,j}(x) = x^\omega \omega^{\varrho-1} \mathcal{O}$, ainsi

$$\sum_{j=1}^q \beta_j R_{\omega,j}(x) = x^\omega \omega^{\varrho-1} \left(\sum_{j=1}^p \frac{\theta_j \beta_j}{x - \alpha_j} + \mathcal{O} \right).$$

Reste à montrer que $S_\omega(x) = x^\omega \omega^{\varrho-1} \mathcal{O}$. Pour cela on applique la formule d'Hermitte en choisissant pour \mathcal{C} un contour standard inclus dans l'étoile de Mittag-Leffler de g et évitant un disque centré en 0 de rayon R' standard, $1 < R' < R$. On a $S_\omega(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}} \left(\frac{x}{z}\right)^\omega \frac{g(z)}{z-x} dz = (x/R')^\omega \mathcal{L} = x^\omega \omega^{\varrho-1} \mathcal{O}$, et finalement $R_\omega(x) = x^\omega \omega^{\varrho-1} \left(\sum_{j=1}^p \frac{\theta_j \beta_j}{x - \alpha_j} + \mathcal{O} \right)$, ce qu'il fallait démontrer. \blacksquare

3.5. Démonstration du théorème 3.1.

Posons $L_\omega(x) = \sum_{j=1}^p \theta_j \beta_j \prod_{k=1, k \neq j}^p (x - \alpha_k)$. Le polynôme L_ω est standard de degré $\leq p - 1$ et $L_\omega(\alpha_j) = \theta_j p(f, \alpha_j) \prod_{k=1, k \neq j}^p (\alpha_j - \alpha_k)$. Pour x dans le S -intérieur de D , on a

$$R_\omega(x) = \frac{x^\omega \omega^{\varrho-1}}{\prod_{j=1}^p (x - \alpha_j)} (L_\omega(x) + \emptyset)$$

$$R_\omega(x) = \frac{x^\omega \omega^{\varrho-1}}{\prod_{j=1}^p (x - \alpha_j)} l_\omega(x) \text{ avec } l \text{ analytique et } S\text{-continue.}$$

i) Si x est dans le S -intérieur de $D \setminus Z_\omega$ alors $l_\omega(x)$ est appréciable et $x^\omega \omega^{\varrho-1}$ est infiniment grand donc $R_\omega(x)$ est infiniment grand.

ii) Soit z dans W_ω . La fonction analytique l_ω est S -continue d'ombre L_ω non constante. D'après le théorème de Robinson ([13] chapitre 6) l'image du halo de z par l_ω coïncide avec le halo de $l_\omega(z)$. Or $l_\omega(z) \simeq 0$ donc il existe $x_z \simeq z$ tel que $l_\omega(x_z) = 0$.

iii) Pour $\bar{x} \simeq z$ on a $l_\omega(\bar{x}) = (\bar{x} - x_z)(L'_\omega(z) + \emptyset)$ avec $L'_\omega(z)$ standard non nul, donc

$$R_\omega(\bar{x}) = \frac{\bar{x}^\omega \omega^{\varrho-1}}{\prod_{j=1}^p (\bar{x} - \alpha_j)} (\bar{x} - x_z)(L'_\omega(z) + \emptyset) = \left(\bar{x}(\bar{x} - x_z)^{1/\omega} (1 + \emptyset) \right)^\omega.$$

On a donc

$$R_\omega(\bar{x}) \simeq 0 \implies |\bar{x}(\bar{x} - x_z)^{1/\omega}| \lesssim 1 \implies |\bar{x} - x_z|^{1/\omega} \lesssim 1.$$

■

4 Exemples

Dans les exemples considérés les singularités sont des pôles simples, si bien que les nombres θ_j sont donnés par $\theta_j = \circ(\alpha_j^{1-\omega})$.

4.1. Reprenons le premier exemple $f(x) = \frac{2-x}{1-x^2}$. Avec les notations du texte, $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = -1$, $(1-x)f(x) = \frac{2-x}{1+x}$ donc $\beta_1 = 1/2$, $(1+x)f(x) = \frac{2-x}{1-x}$ donc $\beta_2 = 3/2$.

Utilisons la formule $L_\omega(x) = \sum_{j=1}^p \theta_j \beta_j \prod_{k=1, k \neq j}^p (x - \alpha_k)$.

Pour 2ω , $\theta_1 = 1$ et $\theta_2 = (-1)^{1-2\omega} = -1$ donc $L_{2\omega}(x) = (1+x)/2 - 3(x-1)/2 = 2-x$.

Pour $2\omega + 1$, $\theta_1 = 1$ et $\theta_2 = 1$ donc $L_{2\omega+1}(x) = (1+x)/2 + 3(x-1)/2 = 2x-1$, comme annoncé dans l'introduction. On peut calculer explicitement les polynômes de Taylor et vérifier la formule encadrée au paragraphe 3.5 :

$$x \in S - \text{int}(D) \implies P_\omega(x) = \frac{x^\omega}{x^2 - 1} (L_\omega(x) + \emptyset)$$

En effet $P_{2\omega}(x) = (2-x) \sum_{k=0}^{\omega-1} x^{2k} = \frac{1-x^{2\omega}}{1-x^2} (2-x) = \frac{x^{2\omega}}{x^2-1} [2-x - (2-x)x^{-2\omega}]$
et

$$P_{2\omega+1}(x) = P_{2\omega}(x) + 2x^{2\omega} = \frac{1}{1-x^2}[2-x-(2x-1)x^{2\omega+1}] = \frac{x^{2\omega+1}}{x^2-1}[2x-1-(2-x)x^{-2\omega-1}]$$

4.2. Pour l'exemple de la figure 3, $f(x) = \frac{1+x-x^2}{1-x^3}$. Les calculs donnent :

$$\alpha_1 = 1, \alpha_2 = j = \exp(2i\pi/3), \alpha_3 = j^2, \beta_1 = 1/3, \beta_2 = -2j^2/3, \beta_3 = -2j/3.$$

$$\text{Pour } 3\omega, \quad \theta_1 = 1, \theta_2 = j, \theta_3 = j^2 \quad L_{3\omega}(x) = 1+x-x^2.$$

$$\text{Pour } 3\omega+1, \quad \theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 1 \quad L_{3\omega+1}(x) = 1-x+x^2.$$

$$\text{Pour } 3\omega+2, \quad \theta_1 = 1, \theta_2 = j^2, \theta_3 = j \quad L_{3\omega+2}(x) = -1+x+x^2.$$

Le calcul direct des polynômes de Taylor donne

$$P_{3\omega}(x) = \frac{x^{3\omega}}{x^3-1}[1+x-x^2-(1+x-x^2)x^{-3\omega}]$$

$$P_{3\omega+1}(x) = \frac{x^{3\omega+1}}{x^3-1}[1-x+x^2-(1+x-x^2)x^{-(3\omega+1)}]$$

$$P_{3\omega+2}(x) = \frac{x^{3\omega+2}}{x^3-1}[-1+x+x^2-(1+x-x^2)x^{-(3\omega+2)}]$$

donc on a bien : $x \in S - \text{int}(D) \implies P_\omega(x) = \frac{x^\omega}{x^3-1}(L_\omega(x) + \emptyset)$.

4.3. Considérons une fonction f ayant deux pôles simples comme seules singularités sur le cercle unité. Quitte à tourner le plan de la variable x et à effectuer une homothétie sur f , on peut supposer qu'une de ces singularités est placée en 1 avec pour partie principale (ici le résidu) $p(f; 1) = 1$. Soit $\alpha = \exp(2i\pi a)$ l'affixe de la deuxième singularité ($a \in [0, 1[$) et β la partie principale de f en α . Ainsi la fonction f s'écrit

$$f(x) = \frac{1}{1-x} + \frac{\beta}{1-\frac{x}{\alpha}} + g(x)$$

avec g holomorphe dans un disque de rayon $R > 1$. Soit φ une extraction compatible, c'est-à-dire telle que la suite $(\alpha^{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge. Pour x de module strictement supérieur à 1 et dans $ML(g)$ on a d'après l'étude précédente $R_{\varphi(n)}(x) = x^{\varphi(n)}(\frac{1}{x-1} + \frac{\beta\theta}{x-\alpha} + o(1))$ $n \rightarrow \infty$, avec $\theta = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha^{1-\varphi(n)}$, ou encore $R_{\varphi(n)}(x) = \frac{x^{\varphi(n)}}{(x-1)(x-\alpha)}[L_\varphi(x) + o(1)]$ avec $L_\varphi(x) = (1+\beta\theta)x - (\alpha + \beta\theta)$. La falaise associée à φ est

\mathbb{S}^1 si $|\frac{\alpha+\beta\theta}{1+\beta\theta}| < 1$, c'est-à-dire si $\text{Arg}(-\beta\theta) < \pi(a-1)$ ou $\text{Arg}(-\beta\theta) > \pi a$ ($a \in [0, 1[$ est donné par $\alpha = \exp(2i\pi a)$; l'argument est à prendre dans $]-\pi, \pi]$)

$$\mathbb{S}^1 \cup \left\{ \frac{\alpha+\beta\theta}{1+\beta\theta} \right\} \text{ si } \pi a < \text{Arg}(-\beta\theta) < \pi(a-1).$$

Examinons à présent le lieu de surconvergence de f ; autrement dit on tient compte de toutes les extractions compatibles. Deux cas se présentent.

$a \notin \mathbb{Q}$ Dans ce cas $\beta\theta$ parcourt le cercle de rayon $b = |\beta|$ lorsque l'on change d'extraction. Le lieu de surconvergence est paramétré par $x(t) = \frac{\alpha+b \exp(it)}{1+b \exp(it)}$ où $t = \text{Arg}\beta + \text{Arg}\theta$.

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{1+b^2}(\alpha + be^{it})(1 + be^{-it}) = \frac{1}{1+b^2}[\alpha + b^2 + b(e^{it} + \alpha e^{-it})] \\ &= \frac{1}{1+b^2}[A^2 + b^2 + 2Ab \cos(t - \pi a)], \text{ avec } A = \exp(i\pi a) \quad (A^2 = \alpha). \end{aligned}$$

Lorsque t parcourt \mathbb{R} , $x(t)$ parcourt le segment $[\frac{1}{1+b^2}(A-b)^2, \frac{1}{1+b^2}(A+b)^2]$; autrement dit le lieu de surconvergence est la partie du segment $I = [\frac{(e^{i\pi a} + |\beta|)^2}{1+|\beta|^2}, \frac{(e^{i\pi a} - |\beta|)^2}{1+|\beta|^2}]$ à l'extérieur de $\overline{U} = \{x \in \mathbb{C}; |x| \leq 1\}$.

$\boxed{a \in \mathbb{Q}}$ Posons $a = p/q$ avec p et q premiers entre eux. Dans ce cas, θ prend q valeurs distinctes $\theta_k = \exp(2ki\pi/q)$, ce qui donne q points du segment I répartis suivant la distribution de Chebyshev

$$x_k = \frac{1}{1+|\beta|^2} \left(\exp(2pi\pi/q) + |\beta|^2 + 2|\beta| \exp(pi\pi/q) \cos[\text{Arg}\beta + (2k-p)i\pi/q] \right).$$

Le lieu de surconvergence est constitué des points x_k à l'extérieur de \overline{U} .

5 Le cas d'une singularité logarithmique

Dans un but de simplicité j'ai énoncé le résultat principal de l'article pour les fonctions dont les singularités sur le cercle de convergence sont dites élémentaires, c'est-à-dire de la forme $(1 - \frac{x}{\alpha})^{-r}$. Le résultat persiste pour d'autres types de singularités. La méthode présentée au début de la preuve du lemme 3.3 s'adapte lorsque l'intégrale impropre de f converge au voisinage de chacune des singularités du cercle de convergence. C'est le cas des singularités logarithmiques (proposition 5.1) et des singularités du type $(1 - \frac{x}{\alpha})^{-r} [\text{Log}(1 - \frac{x}{\alpha})]^p$ avec $r < 1$ (proposition 5.2) (J'ai choisi de donner la proposition 5.1, bien qu'elle soit contenue dans la proposition 5.2, pour présenter la méthode dans un cas simple). Une formule de récurrence analogue à (2) permet d'étendre le résultat à $r > 1$ non entier (proposition 5.3).

Comme précédemment f est supposée standard et D est l'ensemble des points de l'étoile de Mittag-Leffler de f qui sont de module > 1 .

Proposition 5.1 (non standard). *Si $f(x) = [\text{Log}(1 - \frac{x}{\alpha})]^p$, $|\alpha| = 1$, $p \in \mathbb{Z}$, alors pour tout x dans le S -intérieur de D et tout ω infiniment grand,*

$$R_\omega(x) = \left(\frac{x}{\alpha}\right)^\omega \frac{p\alpha}{\alpha - x} (-\text{Log } \omega)^{p-1} / \omega (1 + \mathcal{O})$$

Preuve. On reprend l'étape 1 dans la preuve du lemme 3.3.

$$R_\omega(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_\alpha^{\alpha\infty} \left(\frac{x}{z}\right)^\omega [f_-(z) - f_+(z)] \frac{dz}{z-x}$$

où f_+ et f_- sont les deux déterminations de f sur $[\alpha, \alpha\infty[$ en prolongeant respectivement par la gauche et par la droite. Effectuons le changement de variable $z = \alpha + \frac{\alpha u}{\omega}$ et posons $\varphi(u) = f(\alpha + \frac{\alpha u}{\omega})$ et $\Delta(u) = \varphi^+(u) - \varphi^-(u)$. On a

$$R_\omega(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_0^{+\infty} \left(\frac{x}{\alpha}\right)^\omega \left(1 + \frac{u}{\omega}\right)^{-\omega} \frac{1}{\alpha - x} \left(1 + \frac{\alpha u}{(\alpha - x)\omega}\right)^{-1} \Delta(u) \frac{\alpha}{\omega} du.$$

$\varphi(u) = [\text{Log}(-\frac{u}{\omega})]^p$, donc $\varphi^+(u) = (\text{Log } u + i\pi - \text{Log } \omega)^p$. Pour u appréciable

$$\varphi^+(u) = (-\text{Log } \omega)^p + p(\text{Log } u + i\pi)(-\text{Log } \omega)^{p-1} (1 + \mathcal{O}) \text{ et de même}$$

$$\varphi^-(u) = (-\operatorname{Log} \omega)^p + p(\operatorname{Log} u - i\pi)(-\operatorname{Log} \omega)^{p-1}(1 + \emptyset)$$

donc

$$\Delta(u) = 2pi\pi(-\operatorname{Log} \omega)^{p-1}(1 + \emptyset).$$

Puisque les contributions dans l'intégrale pour u infiniment petit et u infiniment grand sont négligeables, on a

$$\begin{aligned} R_\omega(x) &= \left(\frac{x}{\alpha}\right)^\omega \frac{p}{\alpha-x} \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{u}{\omega}\right)^{-\omega} \left(1 + \frac{\alpha u}{(\alpha-x)\omega}\right)^{-1} (-\operatorname{Log} \omega)^{p-1} \frac{\alpha}{\omega} du (1 + \emptyset) \\ &= \left(\frac{x}{\alpha}\right)^\omega \frac{p\alpha}{\alpha-x} (-\operatorname{Log} \omega)^{p-1} / \omega \int_0^{+\infty} \exp(-u) du (1 + \emptyset) \\ &= \left(\frac{x}{\alpha}\right)^\omega \frac{p\alpha}{\alpha-x} (-\operatorname{Log} \omega)^{p-1} / \omega (1 + \emptyset). \end{aligned}$$

■

Proposition 5.2 (non standard). Si $f(x) = (1 - \frac{x}{\alpha})^{-r} [\operatorname{Log}(1 - \frac{x}{\alpha})]^p$, $|\alpha| = 1, p \in \mathbb{Z}$, $\operatorname{Re}(r) < 1$, alors pour tout x dans S -intérieur de D et tout ω infiniment grand,

$$\text{Si } -r \in \mathbb{N} \quad R_\omega(x) = (-1)^r (-r)! \frac{p\alpha}{\alpha-x} \left(\frac{x}{\alpha}\right)^\omega \omega^{r-1} (-\operatorname{Log} \omega)^{p-1} (1 + \emptyset)$$

$$\text{Si } -r \notin \mathbb{N} \quad R_\omega(x) = \frac{\alpha}{(\alpha-x)\Gamma(r)} \left(\frac{x}{\alpha}\right)^\omega \omega^{r-1} (-\operatorname{Log} \omega)^p (1 + \emptyset).$$

Preuve. Avec les notations précédentes,

$$R_\omega(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_0^{+\infty} \left(\frac{x}{\alpha}\right)^\omega \left(1 + \frac{u}{\omega}\right)^{-\omega} \frac{1}{\alpha-x} \left(1 + \frac{\alpha u}{(\alpha-x)\omega}\right)^{-1} \Delta(u) \frac{\alpha}{\omega} du$$

$\varphi(u) = (-\frac{u}{\omega})^{-r} [\operatorname{Log}(-\frac{u}{\omega})]^p$ donc $\varphi^+(u) = (\frac{u}{\omega})^{-r} \exp(ir\pi)(\operatorname{Log} u + i\pi - \operatorname{Log} \omega)^p$. Pour u appréciable,

$$\varphi^+(u) = \left(\frac{u}{\omega}\right)^{-r} \exp(ir\pi) [(-\operatorname{Log} \omega)^p + p(\operatorname{Log} u + i\pi)(-\operatorname{Log} \omega)^{p-1}(1 + \emptyset)].$$

On a donc $\Delta(u) = \delta(u)(1 + \emptyset)$ avec $\delta(u) = 2pi\pi(-\operatorname{Log} \omega)^{p-1}(\frac{u}{\omega})^{-r}$ si $-r \in \mathbb{N}$ et $\delta(u) = 2i \sin(\pi r)(-\operatorname{Log} \omega)^p(\frac{u}{\omega})^{-r}$ si $-r \notin \mathbb{N}$. Par convergence dominée,

$$R_\omega(x) = \frac{1}{2i\pi} \left(\frac{x}{\alpha}\right)^\omega \frac{1}{\alpha-x} \int_0^{+\infty} \exp(-u) \delta(u) \frac{\alpha}{\omega} du$$

On conclut en utilisant $\int_0^{+\infty} u^{-r} \exp(-u) du = \Gamma(1-r)$ et $\Gamma(1-r) \sin(\pi r) / \pi = 1/\Gamma(r)$. ■

Proposition 5.3 (non standard). Si $f(x) = (1 - \frac{x}{\alpha})^{-r} [\operatorname{Log}(1 - \frac{x}{\alpha})]^p$, $|\alpha| = 1, p \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, alors pour tout x dans le S -intérieur de D et tout ω infiniment grand,

$$(3) \quad R_\omega(x) = \frac{\alpha}{(\alpha-x)\Gamma(r)} \left(\frac{x}{\alpha}\right)^\omega \omega^{r-1} (-\operatorname{Log} \omega)^p (1 + \emptyset).$$

Preuve. Comme pour l'étape 2 de la preuve du lemme 3.3, on démontre le résultat par récurrence externe. Supposons donc la formule (3) vraie pour $r-1$ et pour

tout p dans \mathbb{N} . Soit $I_{r,p,\omega} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}} \left(\frac{x}{z}\right)^\omega (1 - \frac{z}{\alpha})^{-r} \left[\text{Log}(1 - \frac{z}{\alpha})\right]^p \frac{dz}{z-x}$ où \mathcal{C} est un lacet d'indice 1 par rapport à x et 0, d'indice 0 par rapport à chaque singularité de f , de longueur limitée évitant le halo de x , tel que pour tout z sur \mathcal{C} , $|z| \geq 1 - a/\omega$ et $|z - \alpha| \geq a/\omega$ avec a appréciable. Soit $f(z) = \frac{\alpha}{r-1} (1 - \frac{z}{\alpha})^{1-r}$, d'où $f'(z) = (1 - \frac{z}{\alpha})^{-r}$, et $g(z) = \left(\frac{x}{z}\right)^\omega \left[\text{Log}(1 - \frac{z}{\alpha})\right]^p \frac{1}{z-x}$ d'où

$$g'(z) = -\left(\frac{x}{z}\right)^{\omega+1} \left[\text{Log}(1 - \frac{z}{\alpha})\right]^p \frac{1}{z-x} \frac{\omega}{x} \left(1 + \frac{z}{\omega(z-x)} + \frac{zp/\alpha}{\omega(1 - \frac{z}{\alpha}) \text{Log}(1 - \frac{z}{\alpha})}\right)$$

$$I_{r,p,\omega} = \frac{-1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}} f(z)g'(z)dz = \frac{\alpha}{r-1} \frac{\omega}{x} \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}} \left(\frac{x}{z}\right)^{\omega+1} \left[\text{Log}(1 - \frac{x}{\alpha})\right]^p (1 - \frac{z}{\alpha})^{1-r} \left(1 + \frac{\alpha}{\omega(\alpha-x)} + \frac{(\alpha-z)x}{\omega(\alpha-x)(z-x)} + \frac{zp/\alpha}{\omega(1 - \frac{z}{\alpha}) \text{Log}(1 - \frac{z}{\alpha})}\right) \frac{dz}{z-x}.$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence,

$$\begin{aligned} I_{r,p,\omega} &= \frac{\alpha}{r-1} \frac{\omega}{x} \left(I_{r-1,p,\omega+1} \left(1 + \frac{\alpha}{\omega(\alpha-x)}\right) + I_{r-1,p,\omega+1} \emptyset + \frac{px}{\alpha\omega} I_{r,p-1,\omega} \right) \\ &= \frac{\alpha}{r-1} \frac{\omega}{x} I_{r-1,p,\omega+1} (1 + \emptyset) + \frac{p}{r-1} I_{r,p-1,\omega}. \end{aligned}$$

On effectue à présent une récurrence externe sur p . La formule (3) est vraie pour $p = 0$ d'après le lemme 3.3. Si elle est vraie pour $p - 1$ alors $I_{r,p-1,\omega}$ est infiniment petit par rapport à $\frac{\omega}{x} I_{r-1,p,\omega+1}$ donc $I_{r,p,\omega} = \frac{\alpha}{r-1} \frac{\omega}{x} I_{r-1,p,\omega+1} (1 + \emptyset)$, ce qui prouve le résultat. ■

Ainsi dans le cas des singularités logarithmiques aussi il n'y a surconvergence que lorsque plusieurs singularités sont de même ordre maximal, et le polynôme d'interpolation de Lagrange précisant le lieu de surconvergence est donné par la même formule que pour les singularités élémentaires.

Références

- [1] I. P. van den BERG *Non Standard Asymptotic Analysis* Lecture Note **1249** Springer Verlag (1987).
- [2] J. L. CALLOT *Trois leçons d'analyse infinitésimale* Le Labyrinthe du Continu, Actes du Colloque de Cerisy Ed. J. M. Salanskis et H. Sinaceur, Springer Verlag (1992).
- [3] Paul DIENES *The Taylor Series : an introduction to the theory of functions of a complex variable* Dover (1931).
- [4] E. FABRY *Sur les points singuliers d'une fonction donnée par son développement en série et sur l'impossibilité du prolongement analytique dans les cas très généraux* Ann. Ec. Normale (3) **13** (1896) 107-114.

- [5] Ch. HERMITE *Cours d'Analyse à la Faculté de Paris* Hermann (1891).
- [6] E. HILLE *Analytic function theory* 2 Gin and Company (1962).
- [7] Robert JENTZSCH *Untersuchungen zur Theorie der folgen analytischer Funktionen et Fortgesetzte Untersuchungen über die abschnitte von Potenzreihen* Acta Math. **41** (1917) 219-270.
- [8] E. NELSON *Internal Set Theory : a new approach to non standard analysis* Bull. Amer. Math. Soc. **83**(6) : 1165-1198 (1977).
- [9] A. OSTROWSKI *Über eine Eingeschaft gewisser Potenzreihen mit unendlich vielen verschiedenen Koeffizienten* Berlin Ber. **34** (1921) 557-565.
- [10] A. OSTROWSKI *Über vollständige Gebiete Gleichmässiger Konvergenz von Folgen analytischer Funktionen* Hamburg Math. Abh. **1** (1922) 326-350.
- [11] A. OSTROWSKI *Über Potenzreihen die überkonvergente Abschnittsfolgen besitzen* Berlin Ber. (1922) 185-192.
- [12] M. B. PORTER *On the polynomial convergents of a power series* Ann. of Math. (2) **8** (1906) 189-192.
- [13] A. ROBINSON *Non-standard analysis*, North- Holland (1966).
- [14] S. SAKS, A. ZYGMUND *Analytic Functions* Panstwowe Wydawnictwo Naukowe, Warsawa (1965).
- [15] E. C. TITCHMARSH *The theory of functions* Oxford University Press (1939).
- [16] J. L. WALSH *Interpolation and approximation by rational functions in the complex domain* A.M.S. Colloquium Publi. **20**, 5° éd. Providence Rhode Island (1969).

Augustin Fruchard
Institut de Recherche Mathématique Avancée
Université Louis Pasteur et CNRS
7, rue René-Descartes
67084 STRASBOURG CEDEX
FRANCE